

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

AVTOMATIKA

študijsko gradivo za visokošolski strokovni program - 2. del

Gašper Mušič

Ljubljana, junij 2013

Kazalo

4	Opisi in analiza sistemov vodenja	1
4.1	Matematično modeliranje	1
4.2	Simulacija	5
4.2.1	Simulacijska shema	6
4.2.2	Simulacija diferencialne enačbe	10
4.3	Lastnosti dinamičnih sistemov	12
4.4	Laplaceova transformacija	16
4.4.1	Lastnosti Laplaceove transformacije	18
4.4.2	Prenosna funkcija	20
4.4.3	Značilni signali in njihovi transformi	23
4.4.4	Računanje odziva sistema	28
4.5	Blokovni diagrami	32
4.5.1	Preoblikovanje in poenostavljanje blokovnih diagramov	33
4.5.2	Modeliranje z blokovnimi diagrami	38
4.6	Uvod v analizo sistemov v časovnem prostoru	43
4.6.1	Odziv na stopničasto vzbujanje	43
4.6.2	Odziv na enotin impulz	45
4.6.3	Ničle in poli prenosne funkcije	47
4.6.4	Razvrstitev sistemov glede na njihovo naravo	51
5	Regulacijski sistemi	59
5.1	Sledilno in regulacijsko delovanje	60
5.2	Blokovni diagram zaprtozančnega sistema	62
5.2.1	Zaprtozančni sistem z enotino povratno zanko	62
5.2.2	Zaprtozančni sistem s splošno povratno zanko	63
5.2.3	Vpliv povratne zanke pri sledilnem in regulacijskem delovanju	64

5.3	Učinki povratne zanke	65
5.4	Proporcionalni regulator	68
5.5	Proporcionalno-integrirni regulator	71
5.6	Nastavljanje regulatorjev	74

Poglavje 4

Opisi in analiza sistemov vodenja

Do sedaj smo podrobneje obravnavali logično in sekvenčno vodenje, kjer so bile v ospredju logične zveze med vhodnimi in izhodnimi signali. Načrtovanje vodenja je v teh primerih dokaj preprosto.

Velik delež pri vodenju sistemov pa predstavlja tudi zaprto-zančno vodenje oziroma regulacija. Zveza med vhodnimi in izhodnimi signali je v tem primeru bolj zapletena, načrtovanje vodenja pa je bistveno bolj zahtevno in mora biti podprto z ustrezno analizo.

Za začetek ponovimo, da so sistemi vodenja dinamični sistemi, kar pomeni, da:

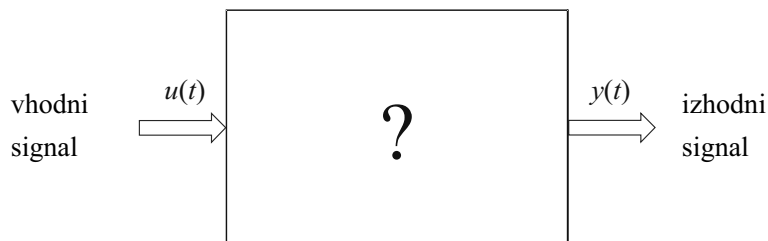
- v njih potekajo procesi,
- se stanje spreminja s časom.

Potrebujemo univerzalen opis tega spreminjanja, ena od možnosti je matematičen opis, do katerega pridemo z matematičnim modeliranjem.

4.1 Matematično modeliranje

Značilen vhodno-izhodni zapis sistema prikazuje slika 4.1. Z matematičnim opisom takšnega zapisa želimo določiti matematično relacijo med vhom sistema $u(t)$ in izhodom sistema $y(t)$.

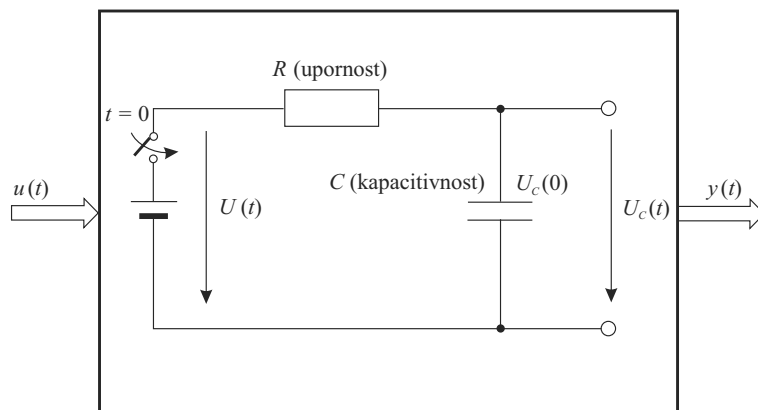
Oglejmo si nekaj primerov izpeljav tovrstne matematične relacije.



Slika 4.1: Vhodno-izhodni prikaz sistema in matematični opis

Primer 4.1 Električno vezje

Slika 4.2 prikazuje električno vezje z uporom in kondenzatorjem (RC-vezje).



Slika 4.2: Električno vezje z uporom in kondenzatorjem kot sistem

Vezje obravnavamo kot sistem z napajalno napetostjo $u(t) = U(t)$ kot vhomom in napetostjo na kondenzatorju kot izhodom $y(t) = U_C(t)$. Čas opazujemo od trenutka vklopa stikala. Pomembna je tudi napolnjenost kondenzatorja v tem trenutku, kar odraža napetost $U_C(0) = y_0$.

Z upoštevanjem Kirchoffovega zagona o vsoti napetosti v zanki lahko zapišemo

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) \quad (4.1)$$

Velja tudi

$$\begin{aligned} U_R(t) &= Ri(t) \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} \\ q(t) &= CU_C(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

V enačbo (4.1) vstavimo zveze (4.2), preuredimo in dobimo

$$\frac{dU_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}U_C(t) + \frac{1}{RC}U(t) \quad (4.3)$$

oziroma z upoštevanjem oznak za vhodni in izhodni signal

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}y(t) + \frac{1}{RC}u(t) \quad (4.4)$$

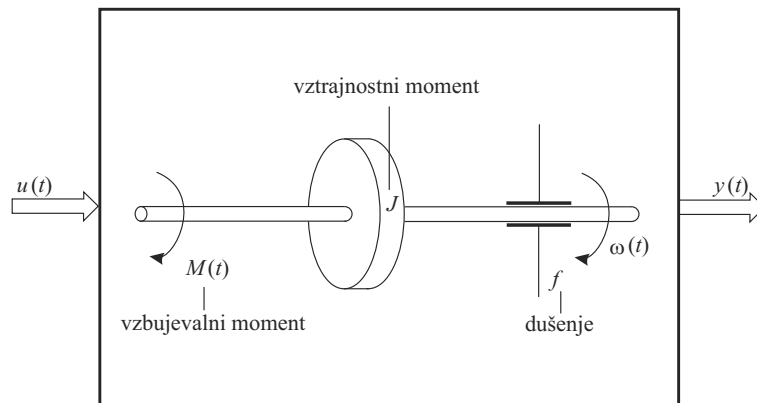
Vpeljemo še oznaki $-\frac{1}{RC} = a$ in $\frac{1}{RC} = b$, upoštevajmo začetni pogoj in dobimo zvezo

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t), \quad y(0) = y_0 \quad (4.5)$$

Sprememba izhoda je odvisna od trenutne vrednosti vhoda in trenutne vrednosti izhoda, torej od tega, kaj se je prej dogajalo s sistemom. Zato za enoličen opis potrebujemo tudi začetno stanje. \square

Primer 4.2 Mehanski sistem

Slika 4.3 prikazuje mehanizem z vztrajnikom.



Slika 4.3: Mehanski sistem z vztrajnikom kot sistem

Prikazan mehanizem obravnavamo kot sistem z vzbujevalnim navorom M na gredi kot vhodnim signalom $u(t) = M(t)$ in kotno hitrostjo ω kot izhodnim signalom $y(t) = \omega(t)$. Signale pričemo opazovati v trenutku, ko se vztrajnik vrti z določeno kotno hitrostjo $\omega(0) = y_0$.

Vrtenje vztrajnika opisuje enačba

$$M(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t) \quad (4.6)$$

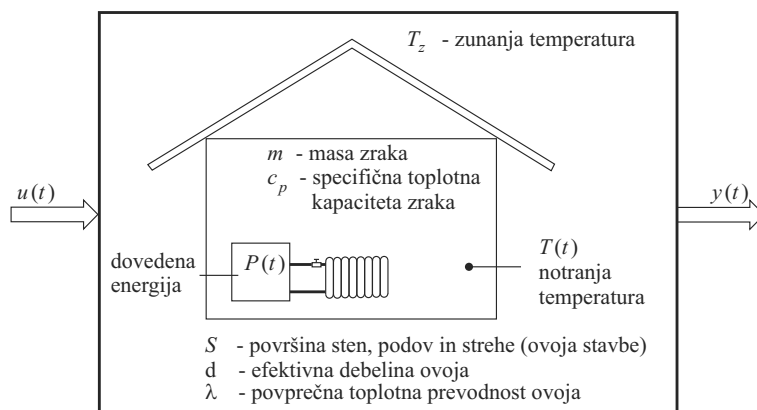
kjer je J vztrajnosni moment vrtečega se dela in f koeficient dušenja v ležajih. Če vpeljemo koeficienta $-\frac{f}{J} = a$ in $\frac{1}{J} = b$ ter upoštevamo definiran vhod in izhod sistema, dobimo

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t), \quad y(0) = y_0 \quad (4.7)$$

Enako kot v prejšnjem primeru je tudi tu sprememba izhoda odvisna od trenutne vrednosti vhoda in trenutne vrednosti izhoda. \square

Primer 4.3 Ogrevalni sistem

Slika 4.4 prikazuje ogrevalni sistem v zgradbi.



Slika 4.4: Ogrevanje stavbe kot sistem

Prikazano zgradbo obravnavamo kot sistem z dovedenim toplotnim tokom $P(t)$ kot vhodnim signalom $u(t) = P(t)$ ter razliko med temperaturo $T(t)$ v prostoru znotraj stavbe in zunanjo temperaturo T_z kot izhodnim signalom $y(t) = T(t) - T_z(t)$. Privzamemo še, da se v obdobju opazovanja zunanja temperatura ne spreminja, $T_z(t) = T_z = \text{konst.}$ Signale pričemo opazovati v trenutku, ko je v prostoru temperatura $T(0)$ in je razlika med notranjo in zunanjo temperaturo $T(0) - T_z = y_0$.

Toplotne tokove v zgradbi opisuje enačba

$$P(t) = mc_p \frac{dT(t)}{dt} + \frac{\lambda S}{d} (T(t) - T_z) \quad (4.8)$$

kjer je m masa zraka v stavbi, c_p specifična toplota zraka, S skupna površina zunanjih sten, podov in strehe (ovoja stavbe) in d efektivna debelina ovoja stavbe. λ je povprečna toplotna prevodnost ovoja stavbe. Prvi člen na desni strani enačbe

(4.8) predstavlja akumulacijo toplote v ovojju stavbe, drugi člen pa toplotne izgube skozi ovoj stavbe. Če vpeljemo koeficienta $-\frac{\lambda S}{mc_p d} = a$ in $\frac{1}{mc_p} = b$ ter upoštevamo definiran vhod in izhod sistema, dobimo

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t), \quad y(0) = y_0 \quad (4.9)$$

Tudi v tretjem primeru dobimo enako obliko zveze med vhomom in izhodom sistema, seveda z drugačnima koeficientoma a in b . \square

Vidimo, da smo dobili enak matematični opis sistema v vseh treh primerih. To je enačba, ki povezuje odvod vrednosti izhodne spremenljivke z njeno trenutno vrednostjo in vrednostjo vhodne spremenljivke. Takšno enačbo imenujemo *diferencialna enačba*.

V splošnem diferencialna enačba povezuje vrednosti odvisnih spremenljivk z njihovimi prvimi ali višjimi odvodi. Takšna enačba predstavlja splošen matematični opis dogajanja v dinamičnem sistemu. Takšen opis imenujemo tudi *matematični model*.

Matematično modeliranje pomeni postopek izpeljava matematičnega modela. Kot rezultat matematičnega modeliranja dobimo lahko različne vrste modelov, diferencialna enačba je ena od možnih oblik modela.

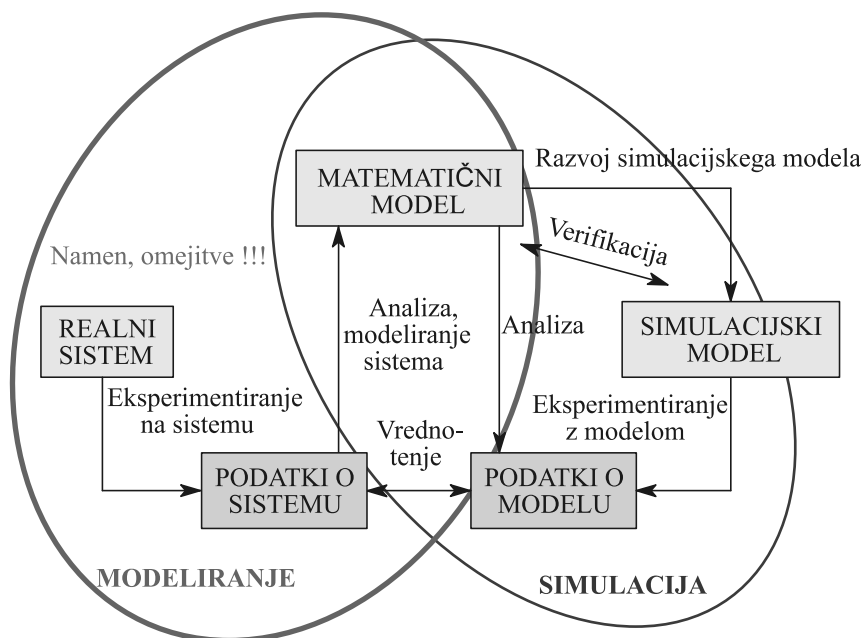
Rešitev diferencialne enačbe so funkcije, ki opisujejo potek odvisnih spremenljivk, in za katere enačba velja. Pri obravnavanih primerih 4.1 do 4.3 je rešitev časovni potek $y(t)$ pri danih koeficientih a in b , začetnem stanju y_0 in danem časovnem poteku $u(t)$.

V preprostih primerih (npr. pri linearnih sistemih) lahko takšno rešitev izračunamo analitično. V številnih drugih primerih lahko določimo le numerični približek s pomočjo računalnika, čemur pravimo *simulacija*.

4.2 Simulacija

V večini realnih primerov postanejo matematični modeli zapleteni in njihovo reševanje težavno. V praksi zato običajno matematičnih modelov ne poskušamo reševati analitično, temveč jih rešujemo numerično s simulacijo.

Modeliranje in simulacija sta neločljivo povezana postopka. Z modeliranjem konstruiramo modele in poskušamo zajeti za določen namen uporabe pomembne značilnosti sistema. Modeliranje tako obravnava relacije med sistemom in njegovimi modeli. Simulacija pa omogoča eksperimentiranje z modeli in izračun časovnih odzivov sistema, ki jih vrednotimo glede na realni sistem (slika 4.5).



Slika 4.5: Povezava modeliranja in simulacije

Pri obravnavi realnih sistemov je simulacija nadvse pomembna, saj odpira številne možnosti. Predvsem daje možnost eksperimentiranja, ne da bi se morali pri tem ukvarjati z realnim objektom. To pripomore k boljšemu razumevanju delovanja, omogoča napovedovanje obnašanja in preizkušanje različnih možnosti pri načrtovanju sistemov. Simulacija je nadvse uporabna tudi pri učenju in vadbi upravljanja s sistemom.

Računalniška izvedba simulacije je tek specialnega programa, katerega rezultat je časovni odziv modela, ki opisuje obnašanje modeliranega procesa. Čeprav je možno takšen program napisati v poljubnem programskem jeziku, je vsakokratno vnovično programiranje pri vsakem novem modelu preveč zamudno in raje uporabljamo primerna orodja. V ta namen so bila razvita številna simulacijska programska orodja. To so večinoma grafično usmerjeni specializirani programi za modeliranje in simulacijo, ki omogočajo enostaven vnos strukture modela z uporabo že pripravljenih gradnikov, po potrebi pa tudi dodajanje specifične programske kode.

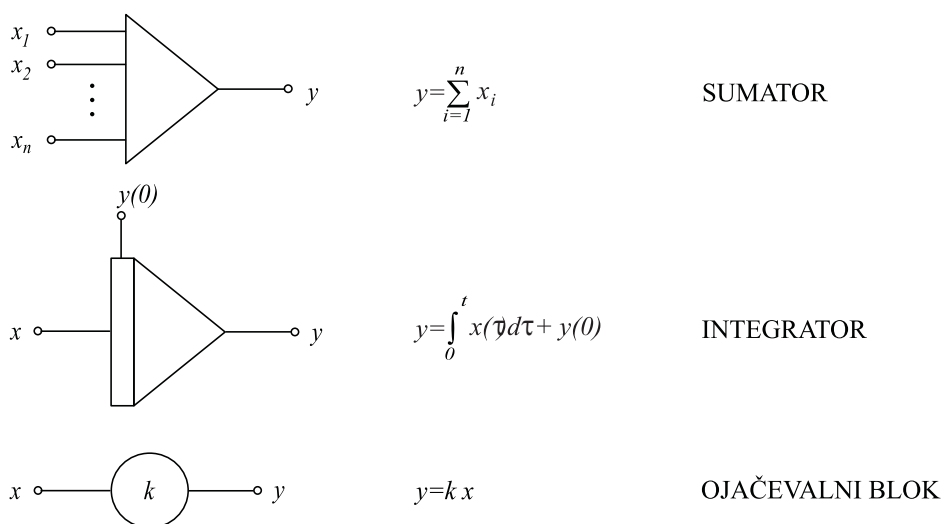
4.2.1 Simulacijska shema

Za potrebe grafične predstavitve modelov, ki je bila sprva osnova simulacije z analognimi računalniki, dandanes pa se uporablja tudi pri grafičnih simulacij-

skih programskih orodjih, se je razvila posebna grafična predstavitev, imenovana simulacijska shema.

Simulacijska shema je osnova zvezne simulacije, pri kateri se signali v večjem delu opazovanega časa zvezno spreminjajo. Spremenljivke stanj in njihovi odvodi so zvezni preko celotnega simulacijskega teka.

Gradniki so bloki, ki predstavljajo določene funkcije v simulacijski shemi. Grafična predstavitev blokov se lahko razlikuje med posameznimi simulacijskimi programskimi orodji, na tem mestu bomo zato uvedli univerzalne bloke simulacijskih shem, ki so neodvisni od uporabljenega simulacijskega orodja.



Slika 4.6: Osnovni gradniki simulacijske sheme

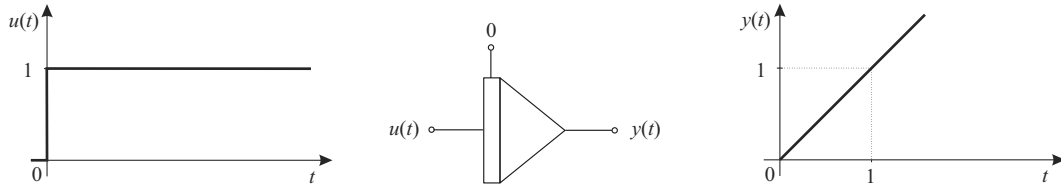
Uporabili bomo le osnovne simulacijske bloke, ki jih prikazuje slika 4.6. Od blokov na sliki je v simulacijski shemi najpomembnejši integrator, saj omogoča grafično predstavitev diferencialnih enačb, kot bomo videli v nadaljevanju. Delovanje integratorja ponazorimo s primeri odzivov na nekatere oblike vhodnih signalov.

Primer 4.4 Odziv integratorja na stopničast vhodni signal

Slika 4.7 prikazuje integrator ter vhodni in izhodni signal pri stopničastem vzburjanju.

Kot vhodni signal je uporabljena enotina stopnica, ki jo zapišemo kot

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

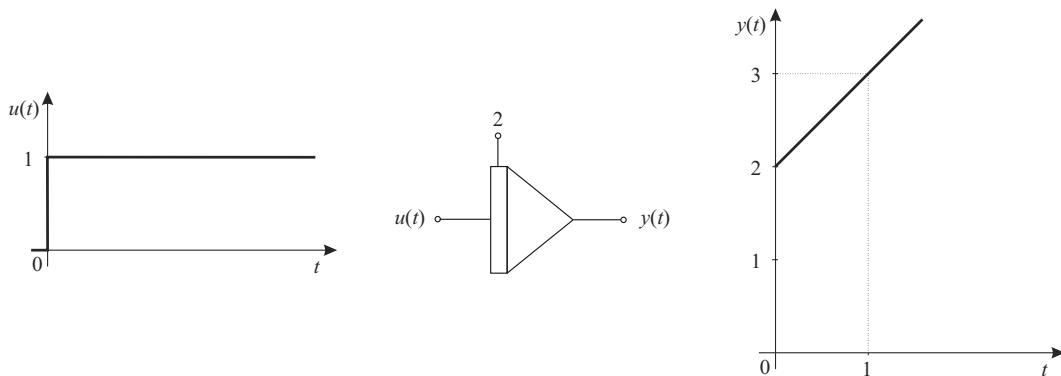


Slika 4.7: Odziv integratorja na stopničast vhodni signal

Če je $y(0) = 0$, dobimo

$$y(t) = \int_0^t 1 \cdot d\tau + 0 = \tau \Big|_0^t = t, \quad t \geq 0 \quad (4.11)$$

Tudi slika 4.8 prikazuje integrator ter vhodni in izhodni signal pri stopničastem vzbujanju, a tokrat pri drugačnem začetnem stanju.



Slika 4.8: Odziv integratorja na stopničast vhodni signal, drugačno začetno stanje

Če je $y(0) = 2$, dobimo

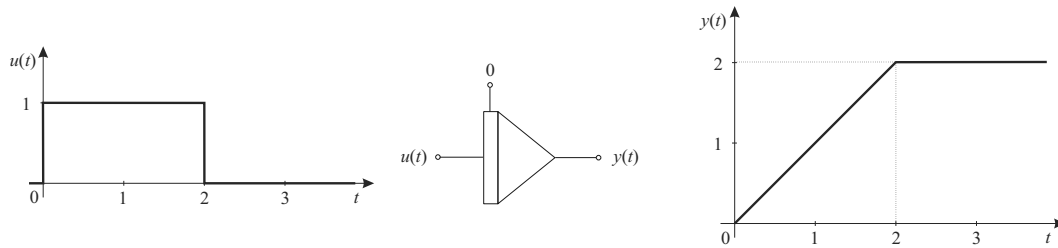
$$y(t) = \int_0^t 1 \cdot d\tau + 2 = \tau \Big|_0^t + 2 = t + 2, \quad t \geq 0 \quad (4.12)$$

□

Vidimo, da je vrednosti izhoda integratorja odvisna od vrednosti vhoda, pa tudi od vrednosti začetnega stanja, v kateri se odraža preteklo dogajanje.

Primer 4.5 Odziv integratorja na pulzni vhodni signal

Slika 4.9 prikazuje integrator ter vhodni in izhodni signal pri pulznem vzbujanju.



Slika 4.9: Odziv integratorja na pulzni vhodni signal

Uporabljeni pulzni vhodni signal zapišemo kot

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases} \quad (4.13)$$

Če je $y(0) = 0$, dobimo

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t u(\tau) d\tau + y(0) = \begin{cases} \int_0^t 1 \cdot d\tau, & 0 \leq t < 2 \\ \int_0^2 1 \cdot d\tau + \int_2^t 0 \cdot d\tau, & t \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & t \geq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.14)$$

□

Vidimo, da lahko integrator daje od nič različen signal na izhodu tudi v trenutkih, ko je vhodni signal enak nič. To je posledica časovnega poteka vhodnega signala, preden je ta postal enak nič. Lahko tudi rečemo, da integrator pomni preteklo dogajanje.

Oglejmo si še vlogo integratorja v simulacijski shemi. Če vhod integratorja označimo z $x(t)$ in izhod z $y(t)$, velja

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau + y(0) \quad (4.15)$$

Če enačbo odvajamo, dobimo

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad (4.16)$$

Vhod integratorja je torej vselej enak odvodu signala, ki se nahaja na njegovem izhodu. Če s pomočjo seštevalnika (sumatorja) in ojačevalnega bloka povežemo

izhod in vhod integratorja, lahko na ta način predstavimo diferencialno enačbo v obliki simulacijske sheme.

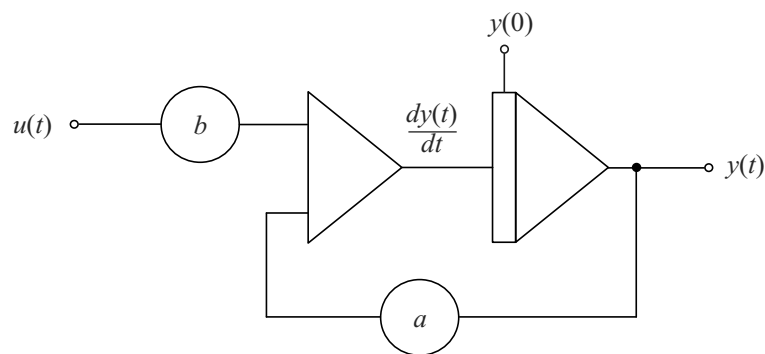
To si oglejmo na primeru diferencialne enačbe iz uvodnih primerov tega poglavja. Zapišimo enačbo ponovno:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t), \quad y(0) = y_0 \quad (4.17)$$

Glede na zvezo med vhomom in izhodom integratorja moramo zagotoviti

$$x(t) = ay(t) + bu(t) \quad (4.18)$$

Na vhod integratorja moramo pripeljati izhod seštevalnika, na vhoda le-tega pa pripeljemo z a pomnožen izhodni signal integratorja ter z b pomnožen vhodni signal $u(t)$. Ustrezna shema je prikazana na sliki 4.10.



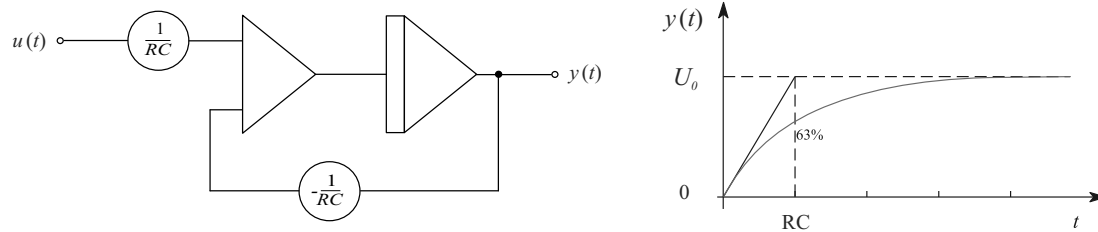
Slika 4.10: Simulacijska shema za reševanje diferencialne enačbe (4.17)

Predstavljena shema je splošna, za konkretno simulacijo, npr. simulacijo RC-vezja, moramo le določiti ustrezni konstanti a in b . Ustrezno simulacijsko shemo prikazuje slika 4.11, na kateri je poleg sheme prikazan tudi potek izhodnega signala, če je začetno stanje $y(0) = 0$ in na vhod pripeljemo stopničasto vzbujanje amplitude U_0 :

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

4.2.2 Simulacija diferencialne enačbe

Na podlagi prikazanih primerov lahko zapišemo naslednji postopek za pretvorbo diferencialne enačbe v simulacijsko shemo:



Slika 4.11: Simulacija RC-vezja

1. korak: preuredimo enačbo tako, da ostane na levi strani najvišji odvod, vse ostalo prenesemo na desno stran.
2. korak: narišemo zaporedno vezavo n integratorjev, če je n red najvišjega odvoda v enačbi.
3. korak: z upoštevanjem izhodov vmesnih integratorjev kot odvodov nižjega reda sestavimo izraz na desni strani enačbe in izhod tega izraza priključimo na prvi integrator.

Opisan postopek imenujemo tudi indirektna metoda za simulacijsko reševanje diferencialne enačbe, ker odvode predstavimo posredno, kot vhode integratorjev. Metoda je uporabna, če je možno iz diferencialne enačbe izraziti najvišji odvod, ter če v enačbi ne nastopajo odvodi vhodnega signala.

Oglejmo si uporabo postopka na primeru.

Primer 4.6 Simulacija diferencialne enačbe 2. reda

Podana je enačba 2. reda v obliki:

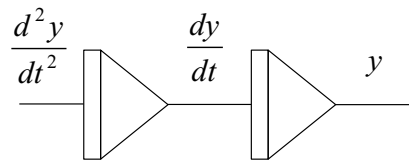
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (4.20)$$

Do ustrezne simulacijske sheme pridemo po naslednjih korakih:

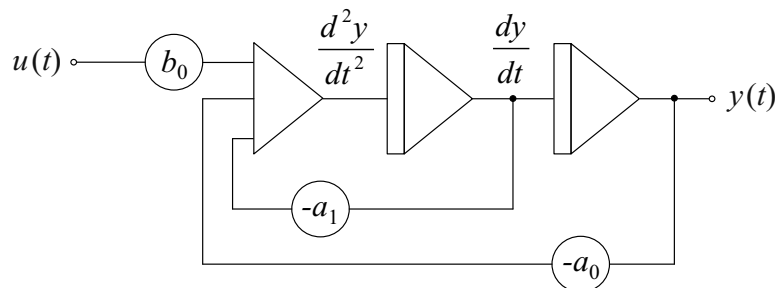
1. korak - preuredimo enačbo

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -a_1 \frac{dy(t)}{dt} - a_0 y(t) + b_0 u(t) \quad (4.21)$$

2. korak - narišemo dva zaporedno vezana integratorja (slika 4.12)
3. korak - sestavimo izraz $-a_1 \frac{dy(t)}{dt} - a_0 y(t) + b_0 u(t)$ na vhodu prvega integratorja, dobljeno shemo prikazuje slika 4.13.



Slika 4.12: 2. korak risanja simulacijske sheme



Slika 4.13: 3. korak risanja simulacijske sheme

□

Možne so tudi drugačne predstavitve diferencialne enačbe s simulacijsko shemo, ki jih uporabimo, kadar opisane indirektno metode ne moremo uporabiti. Vselej pa lahko diferencialno enačbo predstavimo s simulacijsko shemo in na ta način preidemo na numerično reševanje.

Z uporabo osnovnih simulacijskih blokov tako lahko zgradimo enostavne simulacijske sheme, s katerimi predstavimo sisteme, ki so modelirani v obliki diferencialnih enačb. Simulacijske sheme lahko uporabimo kot osnovo za simulacijo z namenskimi programskimi orodji, npr. Matlab/Simulink, ki poskrbijo za pravilen izračun signalov v shemi. Pomembno vlogo imajo pri tem numerične integracijske metode, posebni računski algoritmi, ki jih tu podrobneje ne obravnavamo.

4.3 Lastnosti dinamičnih sistemov

Mnoge lastnosti dinamičnih sistemov lahko določimo iz zapisa enačbe sistema, ne da bi poznali njeno rešitev.

Na tem mestu bomo obravnavali

- Linearnost: medsebojna povezanost spremenljivk; zakon o natovarjanju ali superpoziciji

- Časovno nespremenljivost - spremenljivost: odvisnost parametrov od časa
- Zveznost: odvijanje procesa v obliki neprekinjenih tokov
- Stabilnost: omejenost izhodnih signalov pri omejenih vhodnih signalih

Linearnost

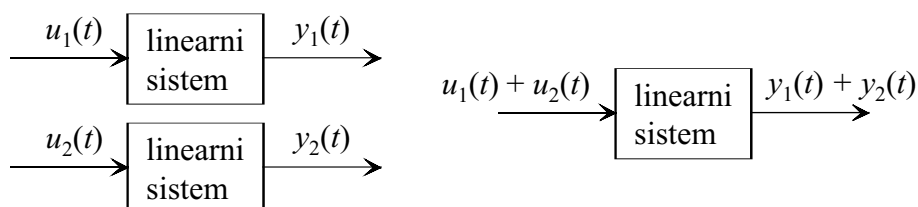
O linearnosti govorimo, če so zveze med vhodnimi in izhodnimi spremenljivkami ter njihovimi odvodi podane z linearnimi matematičnimi izrazi, npr.:

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1 u(t) + a_2 \\ \frac{dy(t)}{dt} &= a_1 y(t) + a_2 u(t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

pri čemer so a_i konstante, $u(t)$ in $y(t)$ pa časovno odvisni spremenljivki.

Sistem, ki ima lastnost linearnosti, je linearen sistem. Za linearne sisteme veljata dve delni lastnosti:

- **aditivnost** - odziv na vsoto vhodnih signalov $u_1(t)$ in $u_2(t)$ je vsota odzivov na posamezen vhodni signal $y_1(t)$ in $y_2(t)$ (slika 4.14),



Slika 4.14: Aditivnost

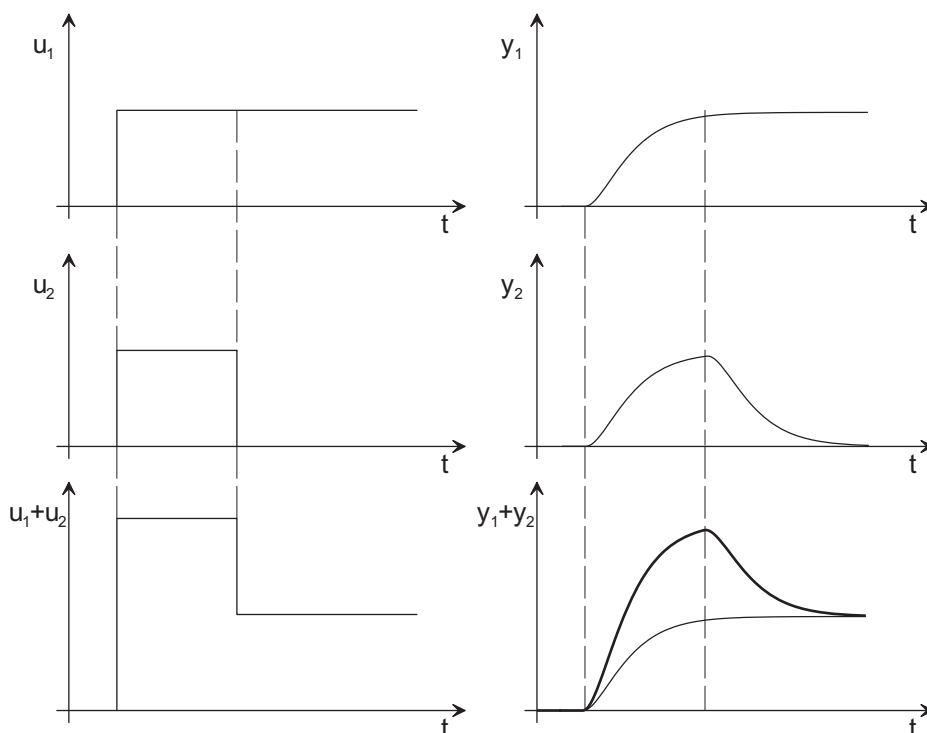
- **homogenost** - odziv na s konstanto pomnožen vhodni signal $u(t)$ je enak z isto konstanto pomnoženemu odzivu $y(t)$; produktu $au(t)$ torej pripada odziv $ay(t)$ (slika 4.15).



Slika 4.15: Homogenost

Obe lastnosti povezuje **zakon natovarjanja ali superpozicije**, ki velja le za linearne sisteme. Z besedami bi ga opisali na naslednji način: Če vhod u_1 povzroči izhod y_1 in vhod u_2 izhod y_2 , potem bo odziv na vhod $u_1 + u_2$ enak $y_1 + y_2$.

Princip superpozicije ponazorimo s primerom na sliki 4.16.



Slika 4.16: Prikaz zakona natovarjanja ali superpozicije

Pomembna posledica linearnosti je tudi dejstvo, da je poljubni sistem, ki je sestavljen izključno iz linearnih elementov in/ali podsistemov, tudi linearen. Zato lahko linearnost sistema preverimo tako, da se prepričamo o linearnosti njegovih sestavnih elementov.

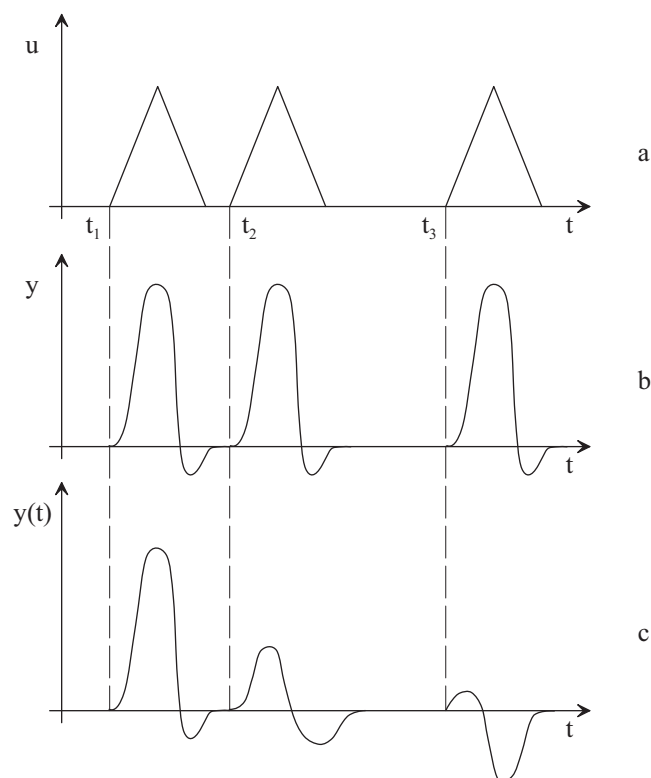
Seveda pa vsi sistemi niso linearni. Za nelinearne sisteme zakon natovarjanja ne velja, o čemer se lahko prepričamo že pri enostavni kvadratični zvezi spremenljivk: če je $y(t) = u(t)^2$, ne moremo preprosto seštevati delnih odzivov, saj $(u_1 + u_2)^2$ ni enako $u_1^2 + u_2^2$.

Časovna nespremenljivost in spremenljivost

Sistem je časovno nespremenljiv, če je oblika izhodov neodvisna od trenutka nastopa vhodov. V nasprotnem primeru je sistem časovno spremenljiv.

Časovno spremenljive sisteme opisujejo diferencialne enačbe s spremenljivimi parametri.

Razliko med časovno spremenljivim in nespremenljivim sistemom ponazorimo s sliko 4.17. Zgornji graf na sliki prikazuje potek vhodnega signala, srednji graf odziv časovno nespremenljivega sistema in spodnji graf odziv časovno spremenljivega sistema.



Slika 4.17: Prikaz: a) vhodnega signala b) izhoda časovno nespremenljivega procesa c) izhoda časovno spremenljivega procesa

Primer izrazito časovno spremenljivega procesa je let rakete, ki z izgorevanjem goriva zelo hitro izgublja težo. V tem primeru seveda časovne spremenljivosti parametra mase $m(t)$ ne smemo zanemariti. Drug primer je let letala, ki sicer tudi porablja gorivo, a ne tako hitro. Pač pa pri vzletu in pristanku hitro spreminja višino, pri čemer se spreminjajo aerodinamične razmere v zraku okrog letala. Zato se spreminja tudi odziv letala. Vidimo, da je lahko časovna spremenljivost posledica sprememb v sistemu, lahko pa je tudi posledica sprememb v interakciji sistema z okolico. Ne gre pa zamenjevati teh sprememb z motnjami, ki so dodatni vhodi v sistem.

Zveznost

Pri **zveznih (kontinuirnih) procesih**, masa in/ali energija prihajata skozi enote procesa v neprekinjenih tokovih (n.pr.: parni kotli, toplotni izmenjevalniki, pretočni kemični reaktorji itd.)

Za razliko od njih pri **šaržnih procesih** pride do prekinitev omenjenih tokov. Pri tovrstnih procesih v glavnem razlikujemo tri faze: polnjenje procesnih enot, odvijanje procesov in praznjenje procesnih enot (n.pr.: šaržni kemični reaktorji, rotacijske peči v industriji cementa, procesi toplotnih obdelav materialov, plavži itd.).

Kosovne pa imenujemo procese, pri katerih se objekti, ki jih obdelujemo, pojavljajo v določenih časovnih razmakih (n.pr.: v izdelčni industriji proizvodi iz kovin, lesa, plastike, stekla itd.).

Stabilnost

Stabilnost lahko definiramo na različne načine, na tem mestu obravnavamo stabilnost glede na vhodne in izhodne signale sistema. V tem smislu je sistem **stabilen**, če na poljubne omejene vhodne signale reagira z omejenimi izhodnimi signali.

Omejeni vhodni signali so: stopničasta funkcija, pravokotni impulz, sinusoida itd., neomejeni pa: linearna naraščajoča funkcija, eksponentno naraščajoča funkcija itd.

Mejno stabilen sistem se na nekatere omejene vhodne signale odzove z neomejenim odzivom, npr. integrator pri stopničastem vzburjanju. Če isti integrator vzburjamo s pulznim signalom, bo odziv omejen.

V nasprotju s tem pa **nestabilen** sistem na vsak omejen vhodni signal reagira z odzivom, ki kaže tendenco naraščanja prek vseh meja.

4.4 Laplaceova transformacija

V podpoglavju o matematičnem modeliranju smo obravnavali diferencialne enačbe in splošen matematični opis dinamičnega sistema z njimi. Glede na obravnavane lastnosti sistemov lahko zapišemo še, da lahko linearni, časovno nespre-

menljivi zvezni sistem z enim vhodom in enim izhodom opišemo z navadno linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti. Takšno enačbo imenujemo tudi vhodno-izhodni opis sistema.

V teoriji vodenja pa se več uporablja druga predstavitev linearnih dinamičnih sistemov, in sicer prenosna funkcija. Da bi lahko vpeljali pojem prenosne funkcije, pa moramo najprej obravnavati Laplaceovo transformacijo, na kateri ta predstavitev temelji.

Laplaceova transformacija časovni funkciji $f(t)$ priredi novo funkcijo $F(s)$, ki jo imenujemo Laplaceov transform:

$$\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(s) \quad (4.23)$$

Transformacija upošteva le pozitivni del časovne osi, pri tem pa mora biti časovna funkcija $f(t)$ definirana za vsak $t \geq 0$.

Z uporabo Laplaceove transformacije je možno preslikati časovno odvisne funkcije, kot so sinusoida, dušena sinusoida, eksponencialna funkcija, itd. v racionalne funkcije nove spremenljivke s . Racionalne funkcije lahko zapišemo v obliki kvocienta dveh polinomov.

Primer 4.7 Transformacija eksponentne funkcije

Laplaceov transform eksponentne funkcije

$$f(t) = e^{-at}, \quad t \geq 0 \quad (4.24)$$

je

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s + a} \quad (4.25)$$

□

Spremenljivka s je kompleksna spremenljivka:

$$s = \sigma + j\omega \quad (4.26)$$

kjer σ označuje njen realni del in ω njen imaginarni del.

Operacije kot npr. diferenciranje in integriranje po času se v t.i. Laplaceovem prostoru izražajo kot algebrajske operacije s spremenljivko s . Zato lahko z Laplaceovo transformacijo prevedemo diferencialne enačbe v algebrajske, ki jih lažje obravnavamo.

Zaradi teh značilnosti je Laplaceova transformacija primerno matematično orodje za reševanje diferencialnih enačb in je zato izjemno pomembna pri analizi in načrtovanju dinamičnih sistemov.

4.4.1 Lastnosti Laplaceove transformacije

V teoretično ozadje Laplaceove transformacije se na tem mestu ne bomo spuščali, obravnavali pa bomo nekatere zanimive lastnosti Laplaceove transformacije:

1. Množenje s konstanto

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s) \quad (4.27)$$

če $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.

2. Vsota in razlika

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s) \quad (4.28)$$

če $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ in $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$.

Lastnosti 1 in 2 pomenita, da je Laplaceova transformacija linearna preslikava.

3. Odvajanje

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0^+) \quad (4.29)$$

če privzamemo $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ in $f(0^+)$ pomeni vrednost $f(t)$ pri $t = 0$, če se točki 0 bližamo z desne: $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ (npr. pri enotini stopnici je $f(0^+) = 1$). Za večkratne odvode velja

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f^{(1)}(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \quad (4.30)$$

4. Integracija

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (4.31)$$

če privzamemo $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. Za večkratne integrale velja

$$\mathcal{L} \left[\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} f(\tau) d\tau dt_1 \dots dt_{n-1} \right] = \frac{F(s)}{s^n} \quad (4.32)$$

Operaciji odvajanja in integriranja se pri Laplaceovi transformaciji preslikata v množenje oz. deljenje s spremenljivko s .

5. Začetna vrednost

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (4.33)$$

6. Končna vrednost

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (4.34)$$

Lastnost velja, če limita obstaja.

Kot smo videli, se operaciji odvajanja in integriranja preslikata v množenje oz. deljenje s spremenljivko s . Zato lahko z Laplaceovo transformacijo prevedemo diferencialne enačbe v algebrajske enačbe.

Primer 4.8 Transformacija diferencialne enačbe

Podana je diferencialna enačba

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + bu(t), \quad y(0) = 0 \quad (4.35)$$

Po transformaciji

$$\mathcal{L} \left[\frac{dy(t)}{dt} \right] = \mathcal{L} [ay(t) + bu(t)] \quad (4.36)$$

$$sY(s) = aY(s) + bU(s) \quad (4.37)$$

lahko iz enačbe izrazimo $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{b}{s-a} \cdot U(s) \quad (4.38)$$

ali izrazimo razmerje $\frac{Y(s)}{U(s)}$:

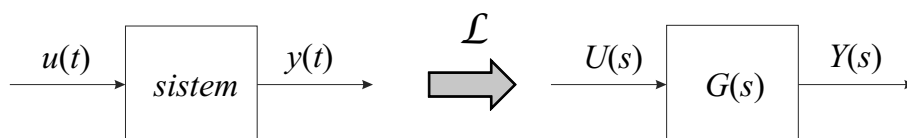
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s-a} \quad (4.39)$$

Če poznamo $U(s)$, lahko izračunamo $Y(s)$. □

4.4.2 Prenosna funkcija

Če predstavlja diferencialna enačba model dinamičnega sistema z vhodom u in izhodom y , potem imenujemo kvocient $\frac{Y(s)}{U(s)}$ prenosna funkcija.

Vzemimo linearni, časovno nespremenljivi sistem z vhodom $u(t)$ in izhodom $y(t)$, kot prikazuje slika 4.18.



Slika 4.18: Prenosna funkcija

Definicija: Prenosna funkcija linearnega, časovno nespremenljivega sistema je definirana kot razmerje Laplaceovega transformata izhodnega signala in Laplaceovega transformata vhodnega signala ob predpostavki, da so začetna stanja sistema enaka nič. \square

Kot prikazuje slika 4.18, lahko linearni, časovno nespremenljivi sistem tako predstavimo tudi s prenosno funkcijo, transformiranim vhodom $U(s)$ in transformiranim izhodom $Y(s)$.

Prenosna funkcija in diferencialna enačba sta dve različni obliki zapisa matematičnega modela dinamičnega sistema.

Sistem, ki ga opiše linearna diferencialna enačba

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = \\ b_mu^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1u^{(1)}(t) + b_0u(t) \end{aligned} \quad (4.40)$$

tako lahko opišemo tudi z enačbo

$$\begin{aligned} s^nY(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \dots + a_1sY(s) + a_0Y(s) = \\ b_ms^mU(s) + b_{m-1}s^{m-1}U(s) + \dots + b_1sU(s) + b_0U(s) \end{aligned} \quad (4.41)$$

iz katere sledi prenosna funkcija

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (4.42)$$

Pri tem smo v enačbi (4.40) z $y^{(n)}$ označili n -ti odvod, podobno pa smo označili tudi druge odvode. Najvišji red odvoda n predstavlja red sistema. Če je sistem realen, je $n \geq m$.

Prenosna funkcija je lastnost sistema in je neodvisna od vhoda ali začetnih stanj.

Primer 4.9 RC-vezje

V podpoglavju o modeliranju smo obravnavali RC-vezje, kjer smo kot vhod $u(t)$ definirali napajalno napetost $U(t)$, kot izhod $y(t)$ pa napetost na kondenzatorju $U_C(t)$. Vezje opisuje diferencialna enačba

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}y(t) + \frac{1}{RC}u(t) \quad (4.43)$$

Enačbo preoblikujemo in transformirajmo z Laplaceovo transformacijo

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad / \mathcal{L} \quad (4.44)$$

Ob predpostavki, da je napetost na kondenzatorju ob času 0 enaka 0, dobimo po transformaciji

$$RCsY(s) + Y(s) = U(s) \quad (4.45)$$

od koder lahko izrazimo prenosno funkcijo RC-vezja:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{RC \cdot s + 1} \quad (4.46)$$

Če poznamo transform časovnega poteka napajalne napetosti $U(s)$, lahko izračunamo $Y(s)$. □

V nadaljevanju si oglejmo nekatere značilne sisteme in njihove prenosne funkcije

1. Integrator

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau + y(0) \quad (4.47)$$

Pri določanju prenosne funkcije predpostavimo, da je $y(0) = 0$.

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t u(\tau) d\tau\right] \quad (4.48)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot U(s) \quad (4.49)$$

Prenosna funkcija integratorja je

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \quad (4.50)$$

2. Diferenciator

$$y(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (4.51)$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{du(t)}{dt}\right] \quad (4.52)$$

$$Y(s) = sU(s) - u(0^+) \quad (4.53)$$

Pri določanju prenosne funkcije predpostavimo začetni pogoj $u(0^+) = 0$ in dobimo

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = s \quad (4.54)$$

3. Sistem 1. reda

Sistem 1. reda opišemo s splošno enačbo in nad njo izvedemo Laplaceovo transformacijo

$$\frac{Tdy(t)}{dt} + y(t) = K_s u(t) \quad / \mathcal{L} \quad (4.55)$$

Po transformaciji in ob predpostavki $y(0^+) = 0$ dobimo

$$TsY(s) + Y(s) = K_s U(s) \quad (4.56)$$

in prenosno funkcijo 1. reda

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_s}{Ts + 1} \quad (4.57)$$

Konstanto K_s v prenosni funkciji (4.57) imenujemo *statično ojačenje*, konstanto T pa *časovna konstanta* sistema.

4. Sistem 2. reda

Sistem 2. reda opišemo s splošno enačbo in nad njo izvedemo Laplaceovo transformacijo

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \quad / \mathcal{L} \quad (4.58)$$

Po transformaciji ter ob predpostavki $y(0^+) = 0$ in $y'(0^+) = 0$ dobimo

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)Y(s) = \omega_n^2 U(s) \quad (4.59)$$

in prenosno funkcijo 2. reda

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.60)$$

Konstanto ω_n v prenosni funkciji (4.60) imenujemo *lastna frekvenca nedušnega sistema*, konstanto ζ pa *dušilni koeficient sistema*.

4.4.3 Značilni signali in njihovi transformi

Pri računanju odzivov so poleg prenosnih funkcij pomembni tudi transformi vhodnih in izhodnih signalov. Zato si oglejmo še Laplaceove transforme nekaterih značilnih signalov.

1. Enotin impulz $\delta(t)$

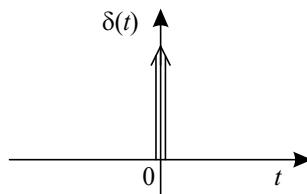
Enotin impulz je signal, katerega vrednost je 0 za vse od nič različne čase, pri $t = 0$ pa je njegova vrednost neskončna

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

Obenem pa velja, da je ploščina pod krivuljo signala enaka 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (4.62)$$

Signal $\delta(t)$ imenujemo tudi δ -impulz. Običajno ga grafično prikažemo tako, kot prikazuje slika 4.19.



Slika 4.19: δ -impulz

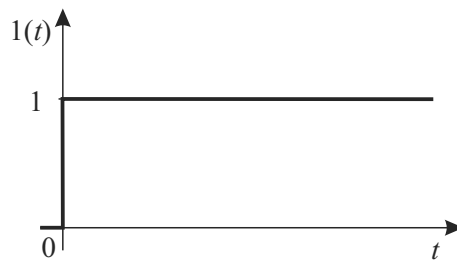
Laplaceov transform δ -impulza je enak 1:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (4.63)$$

2. Enotina stopnica $1(t)$

Stopničast signal smo spoznali že pri obravnavi gradnikov simulacijske sheme v poglavju 4.2.1. Kadar gre za enotino stopnico z amplitudo 1 to včasih poudarimo z oznako $1(t)$ (slika 4.20):

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.64)$$



Slika 4.20: Enotina stopnica

Laplaceov transform enotine stopnice $1(t)$ je:

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \quad (4.65)$$

Transform bi lahko izračunali z upoštevanjem lastnosti Laplaceove transformacije, saj vemo, da se integriranje signala preslika v deljenje s spremenljivko s . Stopnico lahko namreč predstavimo tudi kot integral δ -impulza:

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (4.66)$$

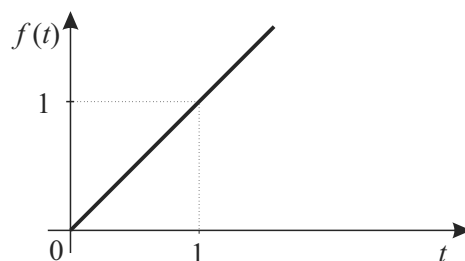
Tu se pojavi vprašanje, ali lahko postavimo spodnjo mejo integrala na 0, saj smo v definiciji δ -impulza zapisali $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$. V veljavi je interpretacija, da dobimo enak rezultat tudi, če integriramo od 0 dalje. Pripadajoči transform enotine stopnice je zato

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{\mathcal{L}[\delta(t)]}{s} = \frac{1}{s} \quad (4.67)$$

3. Enotina rampa

Signal enotine rampe od časa 0 naprej linearno narašča z naklonom 1 (slika 4.21):

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.68)$$



Slika 4.21: Enotina rampa

Laplaceov transform enotine rampe (4.68) je:

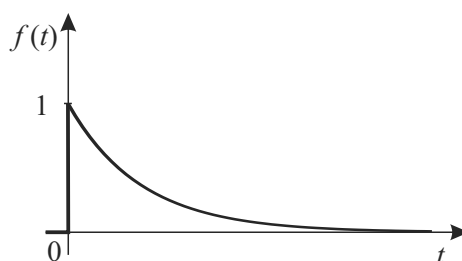
$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2} \quad (4.69)$$

Tudi ta transform lahko izračunamo s pomočjo lastnosti integriranja, enotino rampo namreč lahko predstavimo kot integral enotine stopnice oz. dvojni integral δ -impulza.

4. Eksponentna funkcija

Slika 4.22 prikazuje signal, ki za nenegativne čase sledi eksponentni funkciji z negativnim eksponentom:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-at}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.70)$$



Slika 4.22: Eksponentno padajoča funkcija

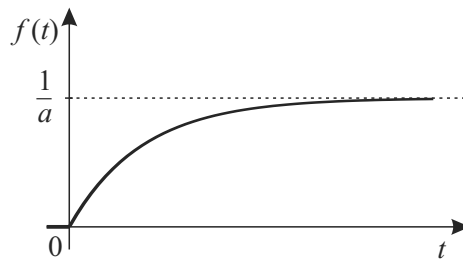
Laplaceov transform eksponentne funkcije (4.70) je:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+a} \quad (4.71)$$

5. Obrnjena eksponentna funkcija

Slika 4.23 prikazuje signal, ki za pozitivne čase narašča in se eksponentno približuje končni vrednosti:

$$f(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}), \quad t \geq 0 \quad (4.72)$$



Slika 4.23: Eksponentno padajoča funkcija

Laplaceov transform obrnjene eksponentne funkcije (4.72) je:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s(s+a)} \quad (4.73)$$

Zadnja dva transformata sta spet povezana z lastnostjo odvajanja oz. integriranja. Določeni integral eksponentne funkcije je namreč

$$\int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t = -\frac{1}{a} e^{-at} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) \quad (4.74)$$

V skladu s tem dobimo transform (4.73), če transform (4.71) delimo s spremenljivko s .

6. Sinusna funkcija

Slika 4.24 prikazuje signal, ki za pozitivne čase periodično niha v skladu s sinusno funkcijo:

$$f(t) = \sin(\omega t), \quad t \geq 0 \quad (4.75)$$

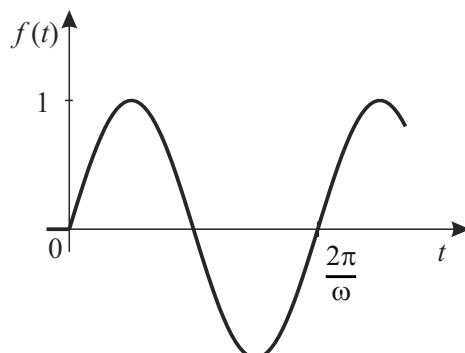
Laplaceov transform sinusne funkcije (4.75) je:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (4.76)$$

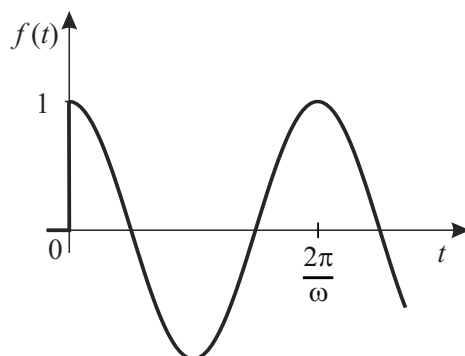
7. Kosinusna funkcija

Slika 4.25 prikazuje signal, ki za pozitivne čase periodično niha v skladu s kosinusno funkcijo:

$$f(t) = \cos(\omega t), \quad t \geq 0 \quad (4.77)$$



Slika 4.24: Sinusna funkcija



Slika 4.25: Kosinusna funkcija

Laplaceov transform kosinusne funkcije (4.77) je:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (4.78)$$

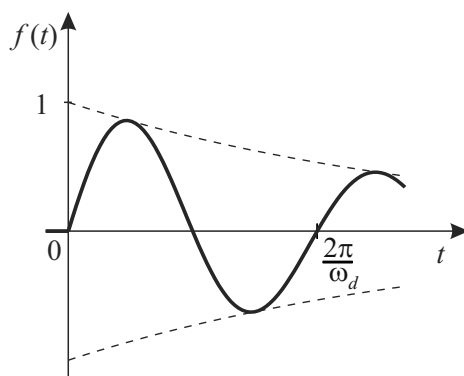
Glede na transform (4.76) je transform (4.78) pomnožen s faktorjem $\frac{s}{\omega}$, kar se ujema z lastnostjo odvajanja. Izraz $\cos(\omega t)$ namreč lahko dobimo tudi kot $\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \sin(\omega t)$, pripadajoči transform pa je zaradi odvajanja pomnožen še z Laplaceovo spremenljivko s .

8. Dušena sinusna funkcija

Pri linearnih sistemih je pogost tudi odziv v obliki dušenega nihanja, zato si oglejmo še transform dušenega sinusnega signala na sliki 4.26.

Signal opišemo s časovno funkcijo

$$f(t) = \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t), \quad t \geq 0 \quad (4.79)$$



Slika 4.26: Dušena sinusna funkcija

Pri tem je $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ frekvenca nihanja dušenega signala, medtem ko je ω_n lastna frekvenca nedušenega nihanja. ζ je koeficient dušenja.

Pripadajoči Laplaceov transform je

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.80)$$

Opisani in še nekateri drugi transformi so zbrani v tabelah, ki jih uporabljamo pri računanju z Laplaceovo transformacijo. Primer take tabele je tabela 4.1.

4.4.4 Računanje odziva sistema

Pri računanju odziva sistema tabelo Laplaceovih transformov uporabimo dvakrat. Najprej s pomočjo tabele določimo transform vhodnega signala. Ko izračunamo transform izhodnega signala, pa ponovno uporabimo tabelo, da določimo ustrezen časovni signal. Če signala ne moremo neposredno prebrati iz tabele, potem pripadajoč Laplaceov transform preoblikujemo do te mere, da lahko razberemo signal iz tabele. Pogosto gre pri tem za linearni izraz, v katerem v posameznih členih nastopajo enostavni transformi iz tabele.

Primer 4.10 Odziv sistema 1. reda na enotino stopnico

Sistem 1. reda s prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{4}{2s + 1} \quad (4.81)$$

vzbujamo z enotino stopnico. Želimo izračunati časovni odziv $y(t)$.

Tabela 4.1: Laplace-ova transformacija nekaterih funkcij
 $\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(s)$

	$f(t), \quad t \geq 0$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1.	$\delta(t)$ (<i>enotin impulz</i>)	1
2.	$\delta(t - T)$ (<i>zakasnjen enotin impulz</i>)	e^{-Ts}
3.	$1(t)$ (<i>enotina stopnica</i>)	$\frac{1}{s}$
4.	$1(t - T)$ (<i>zakasnjena enotina stopnica</i>)	$\frac{1}{s}e^{-Ts}$
5.	t (<i>enotina rampa</i>)	$\frac{1}{s^2}$
6.	e^{-at} (<i>eksponencialna funkcija</i>)	$\frac{1}{s+a}$
7.	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
8.	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
9.	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
10.	$\frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t) \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$

Iz tabele Laplaceovih transformov razberemo transform vhodnega signala

$$u(t) = 1(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s} \quad (4.82)$$

Transform izhodnega signala dobimo po množenju s prenosno funkcijo sistema

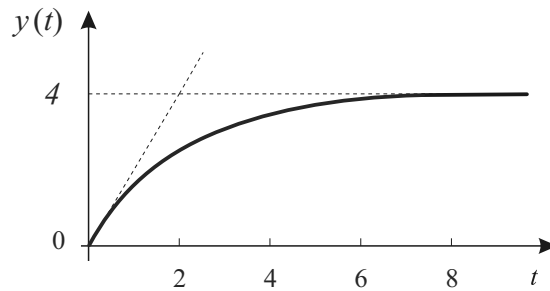
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{4}{2s+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{4}{s(2s+1)} \quad (4.83)$$

Iz tabele transformov razberemo

$$\mathcal{L} \left[\frac{1}{a}(1 - e^{-at}) \right] = \frac{1}{s(s+a)} \quad (4.84)$$

Če izraz za $Y(s)$ preuredimo tako, da upoštevamo množenje s konstanto 4, v imenovalcu pa izpostavimo 2, lahko določimo $y(t)$ (slika 4.27):

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{4}{s(2s+1)} = \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{s(s+0.5)} \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{0.5}(1 - e^{-0.5t}) = 4(1 - e^{-0.5t}) \end{aligned} \quad (4.85)$$



Slika 4.27: Izračunani odziv sistema (4.81) na enotino stopnico

□

Primer 4.11 Odziv sistema na enotino stopnico

Sistem s prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 6} \quad (4.86)$$

vzbujamo z enotino stopnico. Želimo izračunati časovni odziv $y(t)$.

Iz tabele Laplaceovih transformov razberemo transform vhodnega signala

$$u(t) = 1(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s} \quad (4.87)$$

Transform izhodnega signala dobimo po množenju s prenosno funkcijo sistema

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 6} \cdot \frac{1}{s} = \frac{3}{s(s^2 + 5s + 6)} = \frac{3}{s(s+2)(s+3)} \quad (4.88)$$

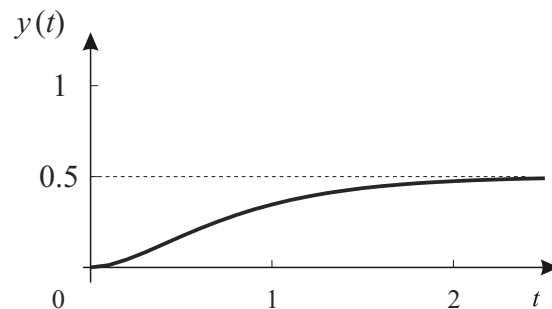
Iz tabele transformov ne moremo razbrati ustreznega transformata, zato preoblikujemo izraz za $Y(s)$ v vsoto parcialnih ulomkov

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} \quad (4.89)$$

Prvi člen ustreza s konstanto $\frac{1}{2}$ pomnoženemu transformu enotine stopnice, druga dva transformu eksponentne funkcije, pri čemer je prvi pomnožen s konstanto $-\frac{3}{2}$. Izhod $y(t)$ sestavimo iz pripadajočih signalov:

$$y(t) = \frac{1}{2}1(t) - \frac{3}{2}e^{-2t} + e^{-3t} = \frac{1}{2}(1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}), \quad t \geq 0 \quad (4.90)$$

Odziv prikazuje slika 4.28.



Slika 4.28: Izračunani odziv sistema (4.86) na enotino stopnico

□

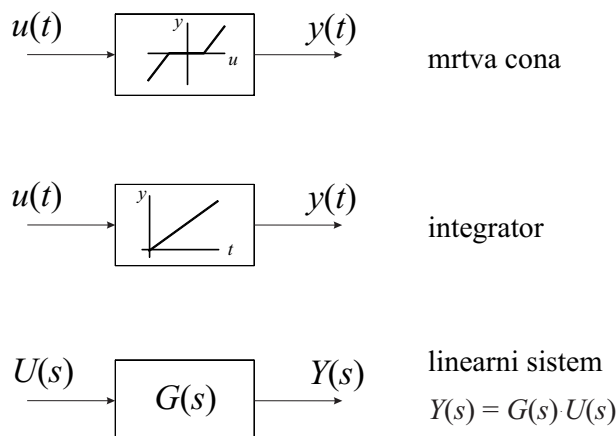
4.5 Blokovni diagrami

Z blokovnimi diagrami ponazorimo obnašanje sistema, ki je sestavljen iz več komponent oz. manjših sistemov. Z njimi grafično prikažemo strukturo sistema.

Osnovni gradniki blokovnega diagrama so bloki, ki ponazarjajo delovanje posameznih komponent sistema. Poleg tega pa v diagramih uporabljamo še nekatere druge elemente. V prvi vrsti so to usmerjene povezave, ki ponazarjajo povezave med bloki. Povezave se lahko tudi cepijo in združujejo, za kar uporabljamo razcepišča in sumacijske točke.

Blok vsebuje simbol, ki ponazarja zvezo med njegovim vhodom in njegovim izhodom. To zvezo lahko predstavimo tako, da v blok narišemo karakteristiko bloka, npr. obliko nelinearnosti, obliko časovnega odziva na stopnico. Pri linearnih sistemih je simbol bloka največkrat kar prenosna funkcija. Izhod takšnega bloka dobimo, če vhod bloka pomnožimo s simbolom bloka.

Nekaj blokov in pripadajočih simbolov prikazuje slika 4.29. Zgornji blok na sliki predstavlja mrtvo cono, to je del sistema, ki se ne odziva na vzbujanje z majhnimi signali. Šele ko signal po absolutni vrednosti preseže nek prag, se pojavi od nič različen signal na izhodu. Delovanje bloka predstavimo s statično karakteristiko, iz katere je razvidna nelinearna odvisnost izhoda od vhoda bloka.



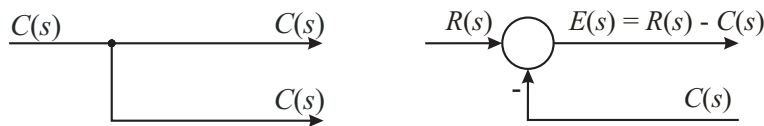
Slika 4.29: Bloki in pripadajoči simboli

Srednji blok predstavlja integrator, katerega delovanja že poznamo iz razdelka 4.2.1. Delovanje bloka je ponazorjeno z odzivom na stopničasto vzbujanje. Tu ne gre za neposreden prikaz odvisnosti izhoda od vhoda, temveč prikaz odvisnosti izhoda bloka od časa pri vzbujanju z enotino stopnico.

Spodnji blok predstavlja splošen linearni sistem. Delovanje takega bloka pona-

zorimo s prenosno funkcijo. Če vhod in izhod namesto s signali ponazorimo z Laplaceovimi transformi teh signalov, potem lahko izračunamo izhod bloka tako, da pomnožimo vhod bloka s simbolom bloka. Na ta način bi seveda lahko predstavili tudi integrator, katerega prenosna funkcija je $G(s) = \frac{1}{s}$.

Razcepišče v blokvnem diagramu uporabimo takrat, ko signal vpliva na več blokov v diagramu. Ponazorimo ga tako, kot prikazuje levi del slike 4.30.



Slika 4.30: Razcepišče in sumacijska točka

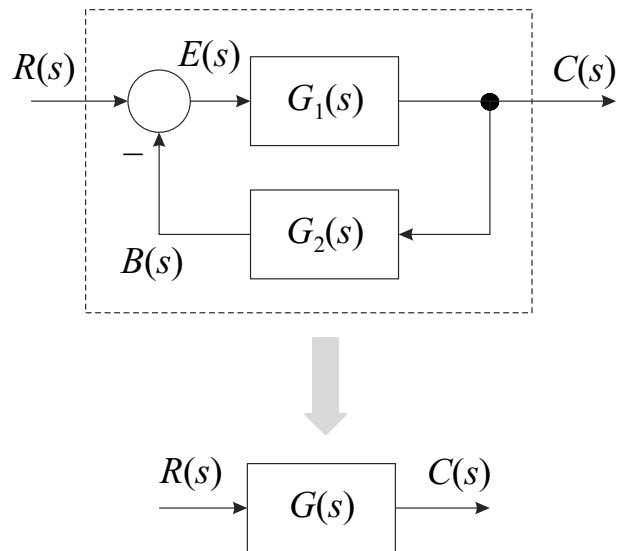
Sumacijska točka omogoča seštevanje ali odštevanje dveh ali več signalov. Operacijo nakažemo z znakom $+$ ali $-$ poleg signala (po dogovoru znaka $+$ ni nujno risati, saj v primeru, ko ni znaka, privzamemo seštevanje). Sumacijsko točko ponazorimo tako, kot prikazuje desni del slike 4.30. Pomembno je še opozoriti, da signalov v blokvnem shemi nikoli ne spajamo na način, ki je uveljavljen pri risanju električnih vezij. Signala se lahko združita le preko določene operacije (npr. seštevanja), ki pa mora biti vedno ponazorjena z ustreznim simbolom v shemi.

4.5.1 Preoblikovanje in poenostavljanje blokvnih diagramov

Pri predstavitevah linearnih sistemov z blokvnimi diagrami nas pogosto zanima, kakšna je prenosna funkcija od enega do drugega signala v shemi. Če poznamo to prenosno funkcijo, lahko del diagrama med obravnavanima signaloma ponazorimo z enim blokom, ki predstavlja pripadajoči podsistem, kot prikazuje slika 4.31. Na ta način diagram poenostavimo, če nas podrobna struktura obravnavanega podsistema ne zanima.

Za primer na sliki 4.31 lahko izračunamo prenosno funkcijo $G(s)$ na naslednji način. Najprej zapišemo osnovne zveze, ki jih razberemo iz sheme:

$$\begin{aligned} C(s) &= G_1(s)E(s) \\ B(s) &= G_2(s)C(s) \\ E(s) &= R(s) - B(s) \end{aligned} \tag{4.91}$$



Slika 4.31: Poenostavljanje blokovnega diagrama

Nato te enačbe uporabimo za izpeljavo zveze med $C(s)$ in $R(s)$:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= R(s) - G_2(s)C(s) \\
 C(s) &= G_1(s)(R(s) - G_2(s)C(s)) = \\
 &= G_1(s)R(s) - G_1(s)G_2(s)C(s) \quad (4.92) \\
 (1 + G_1(s)G_2(s))C(s) &= G_1(s)R(s)
 \end{aligned}$$

Sledi

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \quad (4.93)$$

Podobno bi lahko postopali tudi v drugih primerih, a diagrame poenostavljamo hitreje in z manj računanja, če uporabljamo nekatera pravila preoblikovanja blokovnih diagramov – govorimo tudi o pravilih algebre blokovnih shem. Osnovna pravila so zbrana v tabeli 4.2.

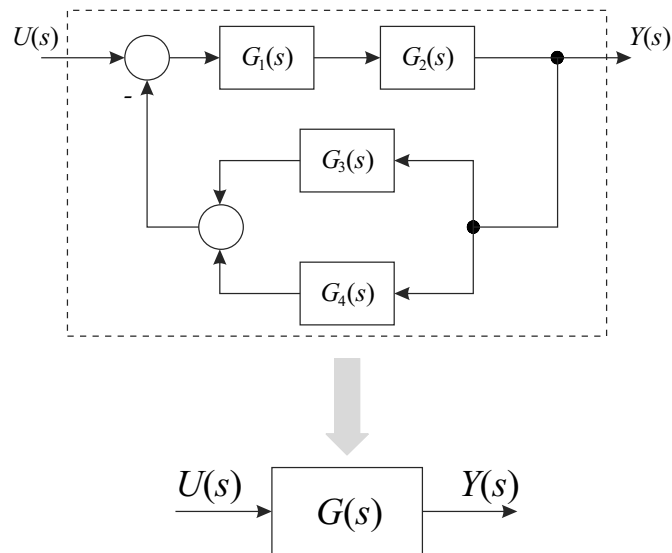
Primer 4.12 Poenostavljanje blokovnega diagrama

Uporabo pravil si oglejmo na preprostem primeru, ki ga prikazuje slika 4.32. Pripadajočo prenosno funkcijo dobimo v dveh korakih:

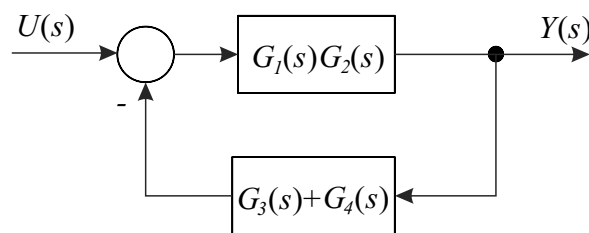
- 1. korak:** Najprej uporabimo pravila za redukcijo zaporedne in vzporedne zveze. Delno poenostavljen diagram prikazuje slika 4.33.

Tabela 4.2: Pravila algebre blokovnih shem

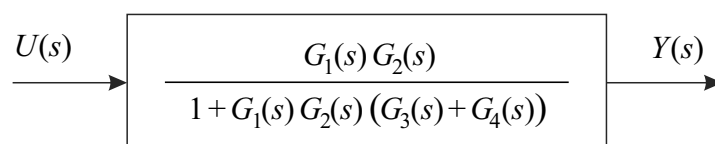
1. Zamenjava vrstnega reda		
2. Zamenjava sumacijskih točk (S)		
3. Redukcija zaporedne vezave		
4. Redukcija vzporedne vezave		
5. Redukcija zanke		
6. Premik S pred blok		
7. Premik S za blok		
8. Premik razcepišča (R) pred blok		
9. Premik R za blok		
10. Odstranitev bloka iz povratne zanke		



Slika 4.32: Poenostavljanje blokovnega diagrama



Slika 4.33: 1. korak poenostavljanja blokovnega diagrama



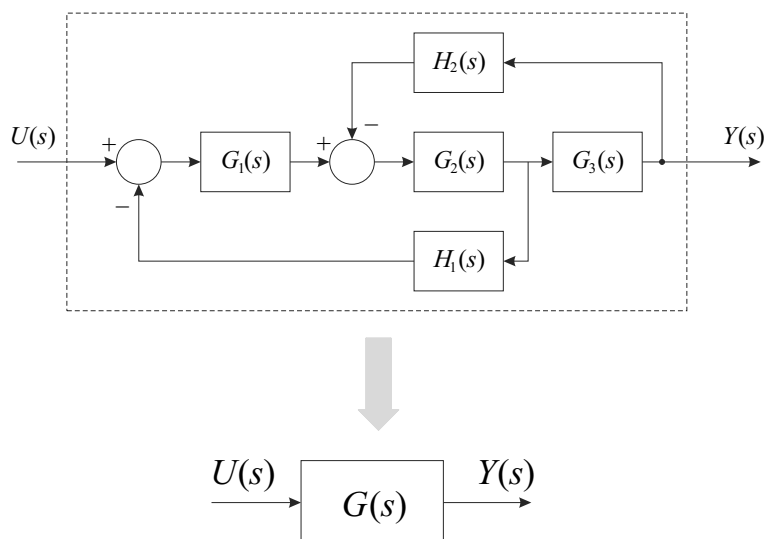
Slika 4.34: 2. korak poenostavljanja blokovnega diagrama

2. korak: Nato uporabimo še pravilo za redukcijo povratne zanke in dobimo končni rezultat, ki ga prikazuje slika 4.34.

□

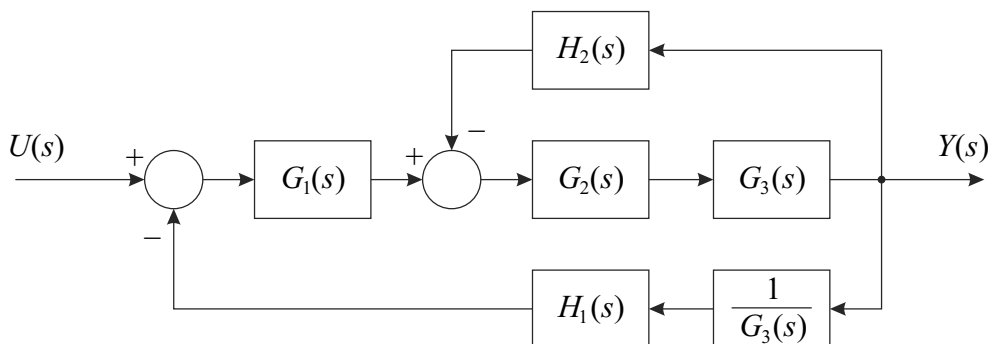
Primer 4.13 Poenostavljanje blokovnega diagrama

Uporabo pravil za preoblikovanje diagramov si oglejmo še na primeru, ki ga prikazuje slika 4.35. Tudi tu poenostavljamo diagram po korakih.



Slika 4.35: Poenostavljanje blokovnega diagrama

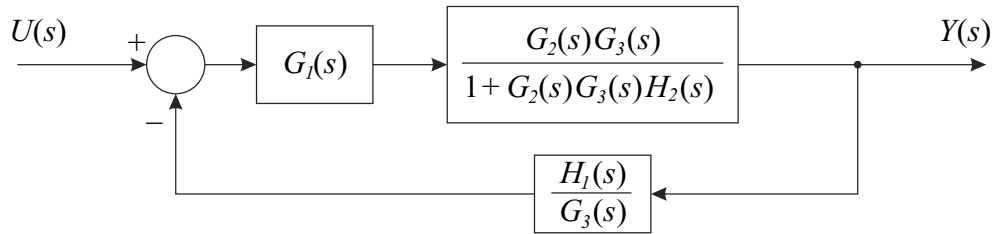
- 1. korak:** Najprej uporabimo pravilo za premik razcepišča za blok, kar prikazuje slika 4.36.



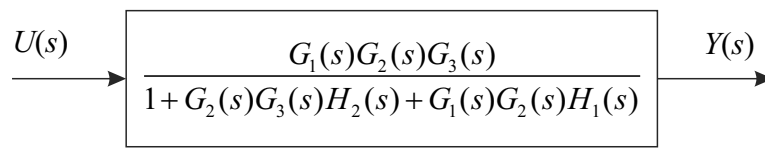
Slika 4.36: 1. korak poenostavljanja blokovnega diagrama

- 2. korak:** Nato uporabimo pravilo za redukcijo zaporedne vezave v glavni veji in spodnji povratni zanki ter nato še redukcijo zgornje zanke. Delno poenostavljen diagram prikazuje slika 4.37
- 3. korak:** Še enkrat uporabimo pravilo za redukcijo zaporedne vezave v glavni veji, nato pa še pravilo za redukcijo preostale povratne zanke in dobimo končni rezultat, ki ga prikazuje slika 4.38.

□



Slika 4.37: 2. korak poenostavljanja blokovnega diagrama



Slika 4.38: 3. korak poenostavljanja blokovnega diagrama

4.5.2 Modeliranje z blokvnimi diagrami

Namesto izpeljave matematičnega modela z diferencialnimi enačbami lahko k modeliranju pristopimo tudi bolj intuitivno. Model sistema zgradimo v obliki blokovne sheme, shemo pa po potrebi poenostavimo do želene oblike. Pri tem izhajamo iz fizikalnih zakonov in pripadajočih enačb. Med spremenljivkami, ki nastopajo v enačbah, izberemo vhode in izhode sistema – kaj so vplivne veličine in kaj želimo opazovati. Nato osnovne enačbe preoblikujemo, pri čemer pričnemo z enačbami, ki opisujejo shranjevalnike mase ali energije – le-te preuredimo tako, da dobimo na desni strani integriranje, na levi pa veličine z lastnostjo »vztrajnosti« (npr. tok skozi tuljavo, napetost na kondenzatorju). V primeru toka skozi tuljavo preoblikujemo enačbo na naslednji način:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad i_L(t) = \int_0^t u_L(\tau) d\tau \quad (4.94)$$

Shranjevalnike predstavimo z integratorji, ostale enačbe pa prilagodimo, da jih lahko izrazimo z osnovnimi bloki in narišemo blokovno shemo.

Primer 4.14 Primer modeliranja RC-vezja

Vezje smo obravnavali že v razdelku o matematičnem modeliranju (slika 4.2).

Ponovimo osnovne enačbe, ki opisujejo razmere v vezju:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_R(t) + u_C(t) \\ u_R(t) &= Ri(t) \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} \\ q(t) &= Cu_C(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \end{aligned} \quad (4.95)$$

Kot vhod izberemo $u(t)$, ki se preslika v Laplaceov transform $U(s)$, kot izhod pa $u_C(t)$, ki se preslika v transform $U_C(s)$

Shranjevalnik je v tem primeru kondenzator, zato pripadajočo enačbo preuredimo:

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (4.96)$$

Izrazimo še tok s pomočjo padca napetosti na upor

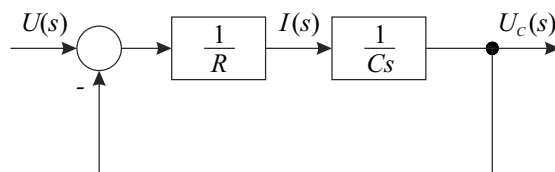
$$i(t) = \frac{u(t) - u_C(t)}{R} \quad (4.97)$$

in transformiramo enačbi. Po Laplaceovi transformaciji dobimo

$$U_C(s) = \frac{1}{Cs} \cdot I(s) \quad (4.98)$$

$$I(s) = \frac{U(s) - U_C(s)}{R} \quad (4.99)$$

Na podlagi enačb narišemo shemo na sliki 4.39. ki jo lahko preoblikujemo tudi v

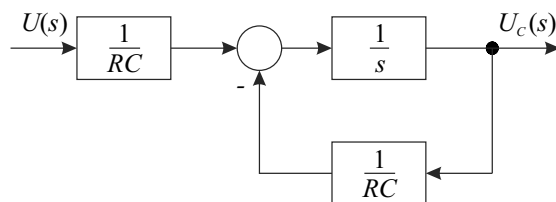


Slika 4.39: Blokovna shema RC-vezja

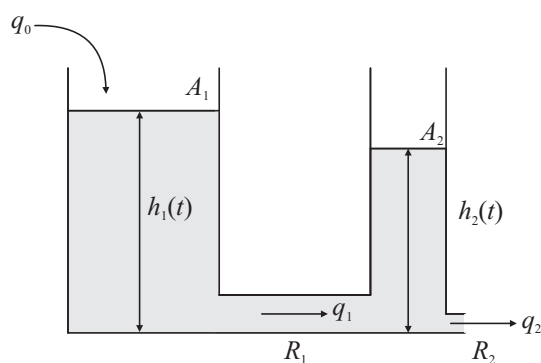
shemo na sliki 4.40. Slednja je ekvivalentna simulacijski shemi na sliki 4.11. \square

Primer 4.15 Primer modeliranja hidravličnega sistema

Slika 4.41 prikazuje sistem z dvema posodama, pri katerem nas zanima zveza med q_2 in q_0 (slika 4.42).



Slika 4.40: Preoblikovana blokovna shema RC-vezja



Slika 4.41: Hidravlični sistem z dvema posodama

Pri zapisu enačb izhajamo iz ravnotežje volumna v posodi

$$q_{vh}(t) - q_{izh}(t) = \frac{dV(t)}{dt} = A \frac{dh(t)}{dt} \quad (4.100)$$

Pri tem sta $q_{vh}(t)$ in $q_{izh}(t)$ vhodni in izhodni pretok tekočine, A je prečni presek opazovane posode, $h(t)$ pa je nivo tekočine v posodi.

Zapišimo ravnotežni enačbi za obe posodi in izrazimo nivoja $h_1(t)$ in $h_2(t)$

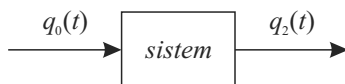
$$h_1(t) = \frac{1}{A_1} \int_0^t (q_0(\tau) - q_1(\tau)) d\tau \quad (4.101)$$

$$h_2(t) = \frac{1}{A_2} \int_0^t (q_1(\tau) - q_2(\tau)) d\tau \quad (4.102)$$

Upoštevamo še hidravlično upornost in zapišemo zvezo med pretokom in nivojem za obe posodi

$$q_1(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_1} \quad (4.103)$$

$$q_2(t) = \frac{h_2(t)}{R_2} \quad (4.104)$$



Slika 4.42: Iščemo zvezo med izhodnim in vhodnim pretokom

Na enačbah izvedemo Laplaceovo transformacijo in dobimo

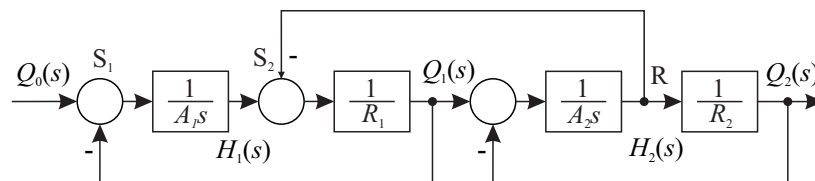
$$H_1(s) = \frac{1}{A_1 s} \cdot (Q_0(s) - Q_1(s)) \quad (4.105)$$

$$H_2(s) = \frac{1}{A_2 s} \cdot (Q_1(s) - Q_2(s)) \quad (4.106)$$

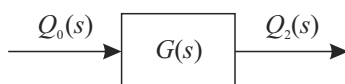
$$Q_1(s) = \frac{H_1(s) - H_2(s)}{R_1} \quad (4.107)$$

$$Q_2(s) = \frac{H_2(s)}{R_2} \quad (4.108)$$

Na podlagi teh enačb lahko narišemo blokovni diagram (slika 4.43)



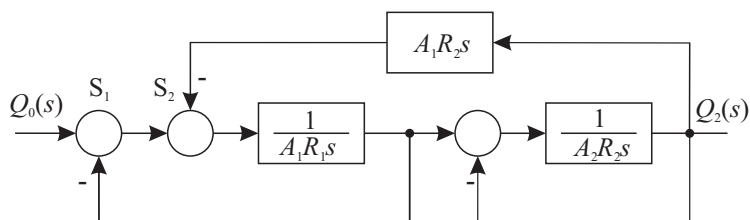
Slika 4.43: Blokovni diagram hidravličnega sistema



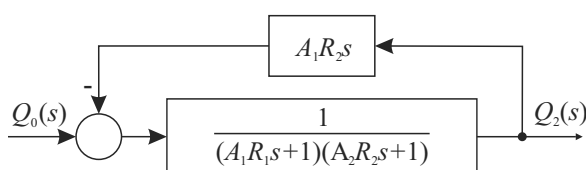
Slika 4.44: Želena oblika blokovnega diagrama

Diagram želimo poenostaviti do oblike, kot jo prikazuje slika 4.44, zato uporabimo pravila za preoblikovanje blokovnih diagramov:

1. korak: Najprej premaknemo drugo sumacijsko točko (S_2) pred blok in drugo razcepilno točko (R) za blok. Ob tem tudi reduciramo vse zaporedne vezave blokov. Delno poenostavljen diagram prikazuje slika 4.45.
2. korak: Uporabimo pravilo zamenjave sumacijskih točk S_1 in S_2 ter nato dvakrat uporabimo pravilo za redukcijo povratne zanke. Dobimo rezultat, ki ga prikazuje slika 4.46.



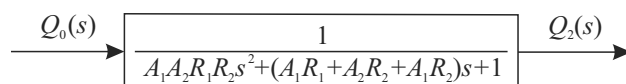
Slika 4.45: 1. korak poenostavljanja blokovnega diagrama



Slika 4.46: 2. korak poenostavljanja blokovnega diagrama

3. korak: Uporabimo še pravilo za redukcijo preostale povratne zanke in dobimo končni rezultat na sliki 4.47. Pri tem prenosno funkcijo sistema izračunamo kot

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{1}{(A_1 R_1 s + 1)(A_2 R_2 s + 1)} = \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{A_1 R_2 s}{(A_1 R_1 s + 1)(A_2 R_2 s + 1)}} = \\
 &= \frac{1}{(A_1 R_1 s + 1)(A_2 R_2 s + 1) + A_1 R_2 s} = \\
 &= \frac{1}{A_1 A_2 R_1 R_2 s^2 + (A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2)s + 1} \quad (4.109)
 \end{aligned}$$



Slika 4.47: 3. korak poenostavljanja blokovnega diagrama

Kot rezultat smo dobili prenosno funkcijo 2. reda, kar je pričakovano, saj imamo v sistemu dva zaporedno vezana shranjevalnika. \square

4.6 Uvod v analizo sistemov v časovnem prostoru

Pri analizi regulacijskih sistemov nas največkrat zanima, kakšni so časovni poteki določenih signalov. Analiziramo prehodni pojav in ustaljeno stanje pri spremembah želene vrednosti ali pri nastopu motenj. Pri tem analiziramo odzive na značilne vhodne signale, npr. odziv na stopnico, odziv na impulz ali odziv na sinusno vzbujanje. Zanima nas tako lastni odziv sistema, to je odziv na začetno stanje, kot tudi vsiljeni odziv oz. odziv na vhodni signal.

Pri analizi s pomočjo prenosnih funkcij je pomembno predvsem poznavanje značilnih oblik prenosnih funkcij in pripadajočih lastnosti sistemov. Mnogokrat lahko na lastnosti odziva sklepamo že iz oblike prenosne funkcije. Pomembne lastnosti so tip sistema, red sistema, ojačenje, poli, ničle ipd. Te lastnosti bomo spoznali v nadaljevanju.

4.6.1 Odziv na stopničasto vzbujanje

Nekatere značilnosti odziva na stopničasto vzbujanje bomo ilustrirali s primerom odziva sistema z dvema posodama, ki smo ga modelirali v prejšnjem razdelku.

Primer 4.16 Odziv sistema z dvema posodama na enotino stopnico

Model sistema smo s pomočjo blokovne sheme izpeljali v prejšnjem razdelku. Ob predpostavki, da je vhod sistema dotok q_0 v prvo posodo in izhod sistema iztok q_2 iz druge posode, je prenosna funkcija sistema

$$G(s) = \frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{A_1 A_2 R_1 R_2 s^2 + (A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_1 R_2)s + 1} \quad (4.110)$$

Predpostavimo takšne parametre, da je

$$G(s) = \frac{1}{0.5s^2 + 1.5s + 1} \quad (4.111)$$

Primerni parametri so npr. $A_1 = 1$, $R_1 = \frac{3}{4}$, $A_2 = 8$, $R_2 = \frac{1}{12}$. Predpostavimo še, da se vhodni pretok ob pričetku opazovanja spremeni z 0 na $1m^3/s$. Vhod je torej enotina stopnica, zato

$$Q_0(s) = \frac{1}{s} \quad (4.112)$$

Odziv sistema (časovni potek izhodnega pretoka) izračunamo v skladu z razdelkom 4.4.4 kot

$$Q_2(s) = G(s)Q_0(s) = \frac{1}{s(0.5s^2 + 1.5s + 1)} \quad (4.113)$$

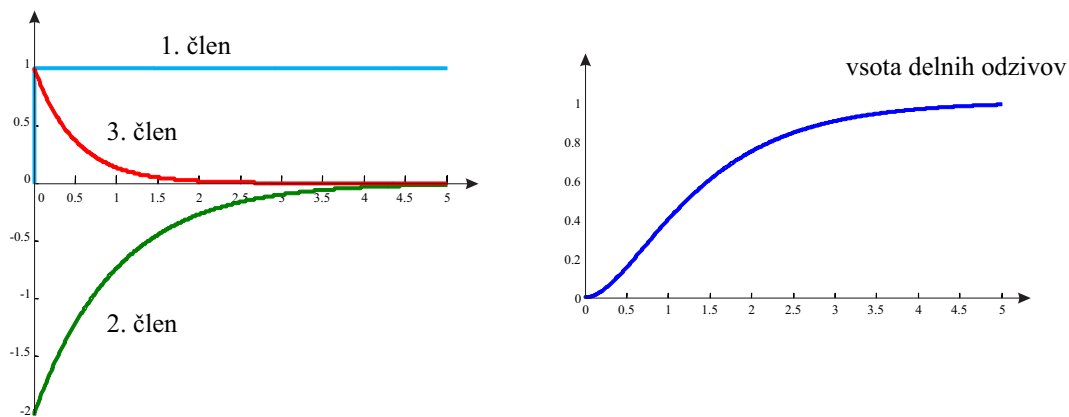
Časovnega odziva ne moremo direktno razbrati iz tabele Laplaceovih transformov, zato izraz preoblikujemo v vsoto členov

$$\begin{aligned} Q_2(s) &= \frac{1}{s(0.5s^2 + 1.5s + 1)} = \frac{2}{s(s^2 + 3s + 2)} = \\ &= \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \end{aligned} \quad (4.114)$$

S pomočjo tabele 4.1 določimo členom pripadajoče časovne funkcije in zapišemo časovni odziv

$$q_2(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}, \quad t \geq 0 \quad (4.115)$$

Odziv prikazuje slika 4.48, kjer so na levi prikazani posamezni členi, na desni pa celoten odziv, ki je vsota vseh treh členov.



Slika 4.48: Odziv sistema z dvema posodama na stopničasto vzbujanje

□

Iz primera lahko izluščimo nekatere zakonitosti, ki veljajo za vse linearne sisteme. Odziv sistema lahko razdelimo na dve komponenti

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t) \quad (4.116)$$

$y_t(t)$ je prehodni pojav od začetnega stanja do ustaljenega stanja. Ta del odziva s časom izzveni. $y_{ss}(t)$ je ustaljeno stanje, to je del odziva, ki ostane, ko prehodni pojav izzveni. Velja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_{ss}(t) \quad (4.117)$$

Pri tem ni nujno, da se izhodni signal v ustaljenem stanju s časom ne spreminja. Ali bo izhodni signal v ustaljenem stanju konstanten ali ne, je odvisno tako od vrste sistema kot tudi od vrste vhodnega signala.

V obravnavanem primeru je

$$y_t(t) = q_t(t) = -2e^{-t} + e^{-2t}, \quad t \geq 0 \quad (4.118)$$

in

$$y_{ss}(t) = q_{ss}(t) = 1, \quad t \geq 0 \quad (4.119)$$

Ustaljeno stanje in Laplaceova transformacija

V primerih, ko je izhod sistema v ustaljenem stanju konstanten, ga lahko izračunamo s pomočjo lastnosti končne vrednosti (4.34):

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (4.120)$$

Primer 4.17 Končna vrednost odziva sistema z dvema posodama na stopnico

$$q_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} q_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sQ_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s(0.5s^2 + 1.5s + 1)} = 1 \quad (4.121)$$

□

Kot bomo videli kasneje, lahko pri proporcionalnih sistemih na ta način določimo tudi statično ojačenje sistema.

4.6.2 Odziv na enotin impulz

Tudi značilnosti odziva na impulzno vzbujanje bomo ilustrirali s primerom odziva sistema z dvema posodama.

Primer 4.18 Odziv sistema z dvema posodama na enotin impulz

Prenosno funkcijo sistema že poznamo, predpostavimo enake parametre kot v primeru 4.16. Kot vhod privzamemo δ -impulz $q_0(t) = \delta(t)$, zato

$$Q_0(s) = 1 \quad (4.122)$$

Odziv sistema (časovni potek izhodnega pretoka) izračunamo kot

$$Q_2(s) = G(s)Q_0(s) = \frac{1}{0.5s^2 + 1.5s + 1} \quad (4.123)$$

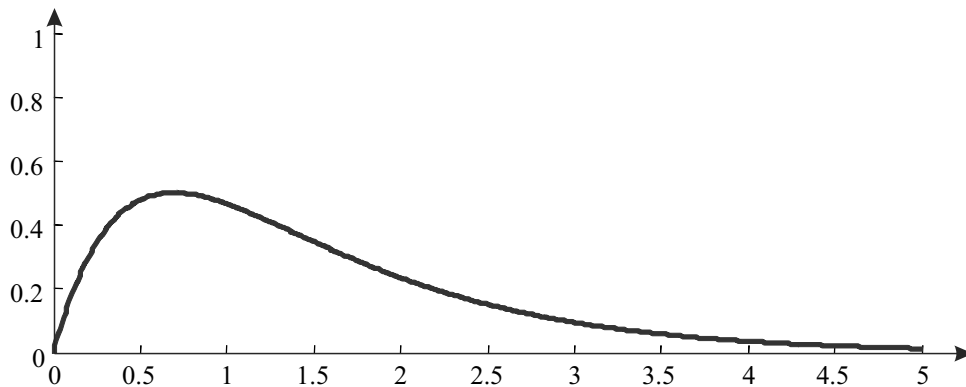
Tudi tokrat časovnega odziva ne moremo direktno razbrati iz tabele Laplaceovih transformov, zato izraz preoblikujemo v vsoto členov

$$\begin{aligned} Q_2(s) &= \frac{1}{0.5s^2 + 1.5s + 1} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} = \\ &= \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \end{aligned} \quad (4.124)$$

S pomočjo tabele 4.1 zapišemo časovni odziv

$$q_2(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}, \quad t \geq 0 \quad (4.125)$$

Odziv prikazuje slika 4.49.



Slika 4.49: Odziv sistema z dvema posodama na impulzno vzbujanje

□

Kot vidimo, je odziv na δ -impulz odvisen samo od prenosne funkcije sistema. Zato ga imenujemo tudi *naravni odziv* sistema. Členi tega odziva so odvisni od faktorjev, na katere je možno razstaviti imenovalce prenosne funkcije sistema. Če so ti faktorji linearni polinomi, potem k odzivu vsak od njih prispeva po en člen z eksponentno funkcijo. EkspONENT te funkcije je odvisen od vrednosti spremenljivke s , pri kateri je pripadajoči izraz enak nič. Te vrednosti so ničle imenovalca prenosne funkcije oziroma poli funkcije. Imajo poseben pomen, saj lahko iz njih razberemo značilnosti odziva. Tako npr. negativna vrednost pola pomeni, da bo pripadajoči člen v odzivu s časom upadal proti 0, in sicer tem hitreje, čim bolj negativna je vrednost pola.

4.6.3 Ničle in poli prenosne funkcije

V splošnem je prenosna funkcija linearne sistema kvocient dveh polinomov spremenljivke s . Polinoma lahko zapišemo v faktorizirani obliki

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (4.126)$$

Pri tem so z_i koreni polinoma v števcu - imenujemo jih *ničle* prenosne funkcije, p_i pa koreni polinoma v imenovalcu - imenujemo jih *poli* prenosne funkcije. Če je možno polinom razstaviti na linearne polinome, so pripadajoči koreni realna števila. Vsak faktor v obliki kvadratnega polinoma, ki ga ni možno razstaviti, pa prispeva dva konjugirano kompleksna korena. Ničle in poli so tako v splošnem kompleksna števila, njihovo lego predstavimo v kompleksni ravnini s .

Poli na realni osi

Oglejmo si najprej pole, ki imajo samo realni del, ležijo torej na realni osi kompleksne ravnine. Po razstavitvi prenosne funkcije na vsoto ulomkov prispeva vsak tak polinom člen

$$\frac{A}{s - p_i}$$

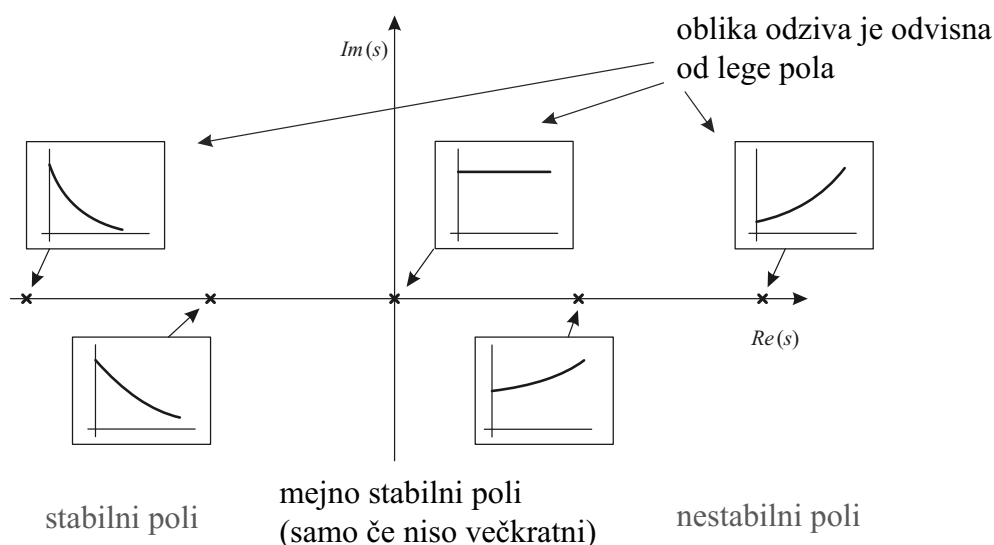
kjer je A ustrezna konstanta. Tak člen ustreza členu

$$Ae^{p_i t}$$

v naravnem odzivu sistema. Oblika odziva je odvisna od lege pola na realni osi, kar ilustrira slika 4.50.

Poli na levi strani kompleksne ravnine prispevajo člene, ki sestavljajo stabilen odziv, poli na desni strani pa člene nestabilnega odziva. Dovolj je že en nestabilen pol, pa bo celotni odziv nestabilen. Poli na imaginarni osi so mejno stabilni, če niso večkratni, torej, če v imenovalcu prenosne funkcije ni člena s^k , $k > 1$. V primeru večkratnih polov na imaginarni osi je rezultirajoči odziv nestabilen.

Nestabilnost večkratnih polov najlažje ilustriramo z verigo zaporedno vezanih integratorjev. Takšna veriga integratorjev ima prenosno funkcijo $G(s) = \frac{1}{s}$. Dovolj je, da prvi integrator v verigi vzbudimo s kratkim impulzom, da se bo na njegovem izhodu pojavil od nič različen signal. Zaradi delovanja preostalih integratorjev v verigi bo nato izhod zadnjega integratorja naraščal preko vseh meja.



Slika 4.50: Vpliv lege polov na realni osi

Konjugirano kompleksni poli

Oglejmo si še vpliv lege konjugirano kompleksnih polov na časovni odziv. Takšni poli vselej nastopajo v parih in pri razstavitvi prenosne funkcije na vsoto ulomkov tak par polov prispeva člen

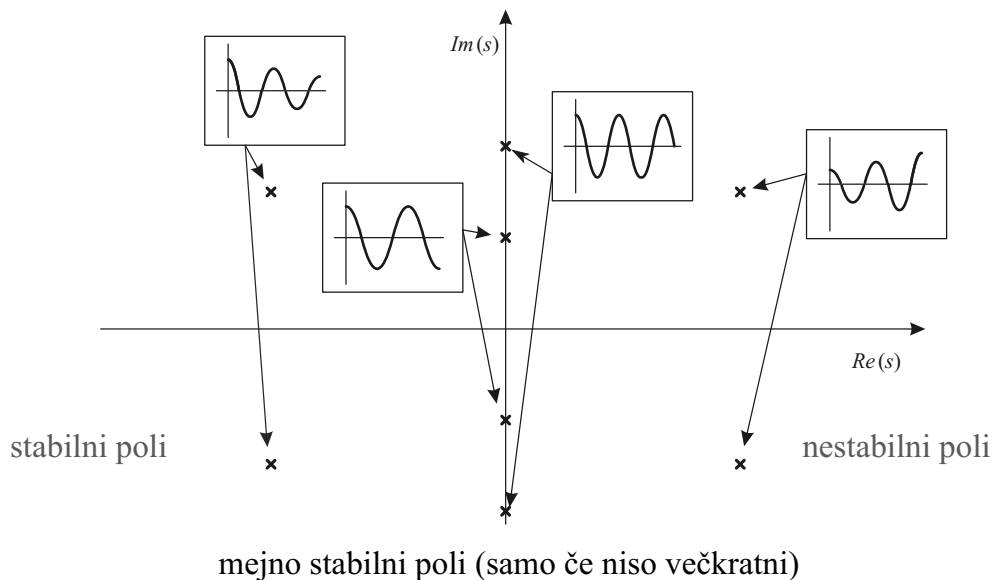
$$\frac{As + B}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

kjer sta A in B ustrezni konstanti. Členi te oblike ustrezajo dušeni, nedušeni ali amplitudno naraščajoči sinusni funkciji oziroma z eksponentno funkcijo uteženemu nihanju v naravnem odzivu sistema. Utež je odvisna od lege polov, kar ilustrira slika 4.51.

Če ležijo poli na levi strani kompleksne ravnine, je nihanje uteženo z eksponentno padajočo funkcijo, kar pomeni stabilen odziv. Če so poli na desni, se amplituda nihanja eksponentno povečuje, kar pomeni nestabilen odziv. Če je par polov ravno na imaginarni osi in se ne prekriva z drugim parom polov (ni večkratni), potem je amplituda nihanja konstantna, kar predstavlja mejno stabilen odziv. Frekvenca nihanja je večja pri večji oddaljenosti polov od realne osi, torej pri večji imaginarni vrednosti polov.

Ničle, poli in lastnosti sistema

Legi polov in ničel določa nekatere lastnosti sistema. To pomeni, da lahko iz poznavanja polov in ničel sklepamo na obnašanje sistema.



Slika 4.51: Vpliv lege konjugirano kompleksnih polov

Red sistema je najvišji odvod izhodne spremenljivke v diferencialni enačbi in hkrati tudi stopnja polinoma v imenovalcu prenosne funkcije. Red sistema določa tudi število polov in število časovnih konstant sistema.

Najvišji odvod vhodne spremenljivke v diferencialni enačbi določa stopnjo polinoma v števcu prenosne funkcije. Hkrati je to tudi število ničel sistema.

Če označimo red sistema z n in število ničel sistema z m , potem je $n - m$ relativni red sistema. Za realne sisteme velja, da je $n \geq m$. Takšnemu sistemu pravimo tudi, da je realizabilen. Relativni red realizabilnega sistema ne more biti negativen.

Stabilnost sistema. Pri snovanju sistemov vodenja je nadvse pomembno zagotavljanje stabilnosti sistema. Zato še enkrat ponovimo zvezo med poli in stabilnostjo sistema. Stabilnost oz. nestabilnost linearnih sistemov je odvisna od lege polov sistema in ni odvisna od lege ničel:

- stabilni poli ležijo v levi polravnini
- nestabilni poli ležijo v desni polravnini
- poli na imaginarni osi
 - so mejno stabilni, če so enojni
 - so nestabilni, če so večkratni – ustrezajo faktorju s^k oz. $(s^2 + \omega^2)^k$

Sistem je stabilen, če so vsi realni deli polov negativni, oz. če vsi poli ležijo na levi strani ravnine s . Sistem z enojnimi poli na imaginarni osi je mejno

stabilen. Če se eden ali več polov nahaja na desni strani ravnine s (ali večkratni pol na imaginarni osi), je sistem nestabilen.

Še enkrat poudarimo, da je dovolj, da ima sistem vsaj en pol na desni strani kompleksne ravnine ali večkratni pol na imaginarni osi, da je sistem nestabilen. Podobno tudi že en mejno stabilni pol povzroči, da je sistem mejno stabilen. Stabilen bo le sistem, ki ima vse pole na levi strani kompleksne ravnine.

Časovne konstante sistema. Časovne konstante τ_i so odvisne od realnega dela polov in določajo hitrost pripadajočega dela prehodnega pojava. Iz prenosne funkcije jih razberemo, če jo zapišemo v naslednji obliki

$$G(s) = \frac{K_s(c_1s + 1)(c_2s + 1) \dots (c_ms + 1)}{(\tau_1s + 1)(\tau_2s + 1) \dots (\tau_ns + 1)} \quad (4.127)$$

Iz primerjave z enačbo (4.126) razberemo

$$\tau_i = \frac{1}{-\operatorname{Re}(p_i)} \quad (4.128)$$

Časovna konstanta bo torej tem krajša, čim bolj bo pol oddaljen od koordinatnega izhodišča. Krajša časovna konstanta pomeni hitrejši prehodni pojav.

Statično ojačenje sistema Enosmerno ali statično ojačenje K_s določa statično lastnost sistema in ga lahko razberemo iz zapisa prenosne funkcije (4.127). Definirano na naslednji način:

$$K_s = \left[\frac{\Delta y}{\Delta u} \right]_{\text{v ustaljenem stanju}} \quad (4.129)$$

Pri tem sta mišljeni spremembi vhodnega in izhodnega signala pri prehodu iz enega v drugo ustaljeno stanje. Takšna definicija je seveda smiselna le za stabilne sisteme, katerih izhod se pri konstantnem vzburjanju ustali na konstantni vrednosti.

Če je sistem stabilen, lahko statično ojačenje določimo preko ustaljenega stanja pri odzivu na stopnico in začetnem stanju 0 (enačba (4.120)):

$$\begin{aligned} u(t) = 1(t) &\Rightarrow \Delta u = 1 - 0 = 1 \\ y(0) = 0 &\Rightarrow \Delta y = y_{ss} - 0 = y_{ss} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_s &= \left[\frac{\Delta y}{\Delta u} \right]_{\text{v ustaljenem stanju}} = y_{ss} \\
K_s &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (4.130)
\end{aligned}$$

4.6.4 Razvrstitev sistemov glede na njihovo naravo

Spoznali smo, da lega polov prenosne funkcije določa njihove prispevke k časovnemu odzivu sistema. Glede na obliko prenosne funkcije tako lahko sklepamo na obliko časovnih odzivov. Posebej zanimiva je oblika odziva na stopničasto vzbujanje. Pri tem ločimo več tipov:

- proporcionalni sistemi
- integrirni sistemi
- diferencirni sistemi
- sistemi z mrtvim časom

Vsak od naštetih tipov ima značilno obliko odziva na stopničasto vzbujanje

Proporcionalni sistemi

Proporcionalni sistemi so sistemi, pri katerih se odziv na stopnico ustali pri končni in od nič različni vrednosti, ki je proporcionalna vzbujanju $u(t)$.

Prenosna funkcija takšnega sistema ima obliko

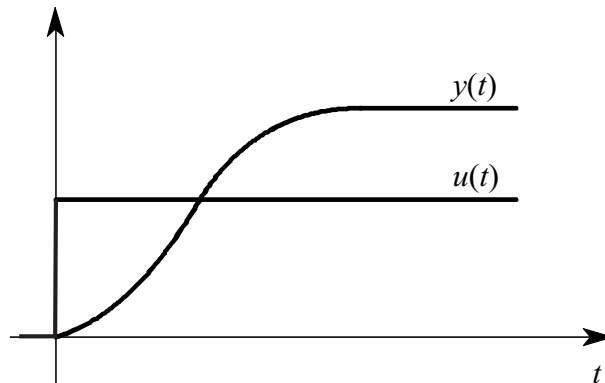
$$G_P(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (4.131)$$

Ojačenje proporcionalnega sistema je različno od nič:

$$b_0 \neq 0 \quad \text{in} \quad a_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad K_s \neq 0 \quad (4.132)$$

značilno obliko odziva pa prikazuje slika 4.52.

Mnogokrat proporcionalne sisteme modeliramo poenostavljeno kot sisteme 1. ali 2. reda, zato si ti dve vrsti sistemov oglejmo še nekoliko podrobneje.



Slika 4.52: Odziv proporcionalnega sistema na stopničasto vzbujanje

Proporcionalni sistem 1. reda Takšen model dobimo pri modeliranju številnih pojavov, kar smo pokazali v razdelku 4.1. Prav tako se kot sistem 1. reda vede regulacijski sistem z integrirnim procesom in negativno povratno zanko. Prenosna funkcija sistema 1. reda ima obliko (4.57):

$$G(s) = \frac{K_s}{T_s s + 1}$$

Pri stopničastem vzbujanju

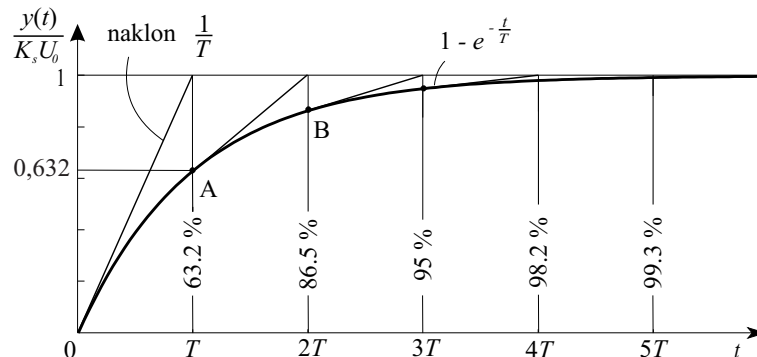
$$u(t) = U_0 \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_0, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4.133)$$

ima odziv sistema 1. reda obliko

$$y(t) = K_s U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), \quad t \geq 0 \quad (4.134)$$

Slika 4.53 prikazuje normirano obliko takšnega odziva, kjer je vrednost signala deljena s faktorjem $K_s U_0$. Odziv ima značilen potek, in sicer je naklon v koordinatnem izhodišču enak $\frac{1}{T}$, nato pa se postopno manjša, ko se odziv približuje končni vrednosti. Pri normiranem odzivu je končna vrednost 1. V času ene časovne konstante T doseže odziv 63.2% končne vrednosti, v času $3T$ doseže 95% končne vrednosti, za čase $t \geq 5T$ pa se odziv približa končni vrednosti na manj kot 1%.

Proporcionalni sistem 2. reda Tudi sistem 2. reda pogosto dobimo pri modeliranju realnih sistemov, npr. RLC-vezij, mehanskih sistemov, ki vsebujejo prožne dele (vzmeti), pa tudi sistemov z več posodami, kot smo videli pri primeru hidravličnega sistema. Takšen model dobimo tudi pri modeliranju servomehanizmov, kjer s pomočjo elektromotorja reguliramo želeni pomik ali zasuk.



Slika 4.53: Odziv proporcionalnega sistema 1. reda na stopničasto vzbujanje

Prenosna funkcija sistema 2. reda ima obliko (4.60):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

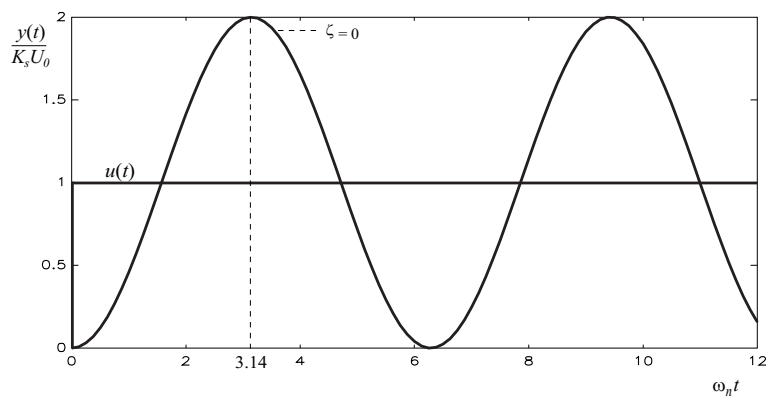
Pri stopničastem vzbujanju (4.133) ima odziv sistema 2. reda obliko

$$\begin{aligned} y(t) &= K_s U_0 \left(1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \right) = \\ &= K_s U_0 \left(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_d t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right), t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.135)$$

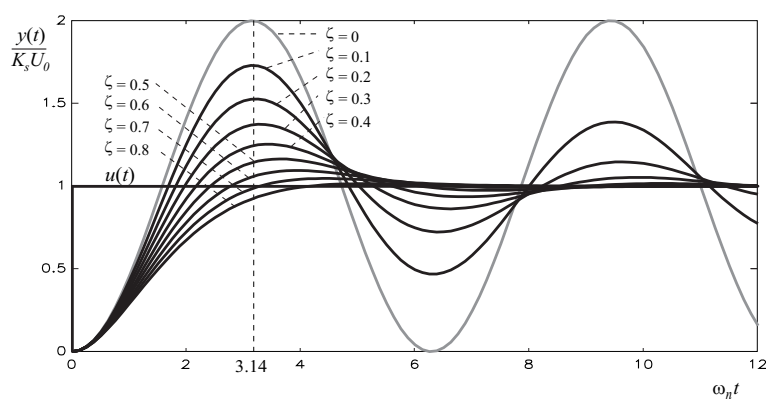
kjer je tako kot pri Laplaceovem transformu dušene sinusne funkcije $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ frekvenca dušenega nihanja. Oblika odziva je odvisna od parametrov ζ in ω_n , torej od dušilnega koeficienta sistema ter lastne frekvence nedušenega sistema.

Glede na parameter ζ lahko dinamično obnašanje sistema 2. reda razdelimo v štiri razrede. Prvo je *nedušeno nihanje*, ko je $\zeta = 0$. Pripadajoči odziv prikazuje slika 4.54.

Druga oblika odziva je dušeno nihanje pri podkritično dušenem sistemu, kjer je $0 < \zeta < 1$ (slika 4.55). Vidimo, da z naraščajočim ζ odziv vse manj oscilira. Za primerjavo je vrisano tudi nedušeno nihanje. Radvidno je, da je pri večjem dušenju večja tudi perioda nihanja oz. manjša frekvenca nihanja.



Slika 4.54: Odziv nedušenega sistema proporcionalnega 2. reda na stopničasto vzbujanje

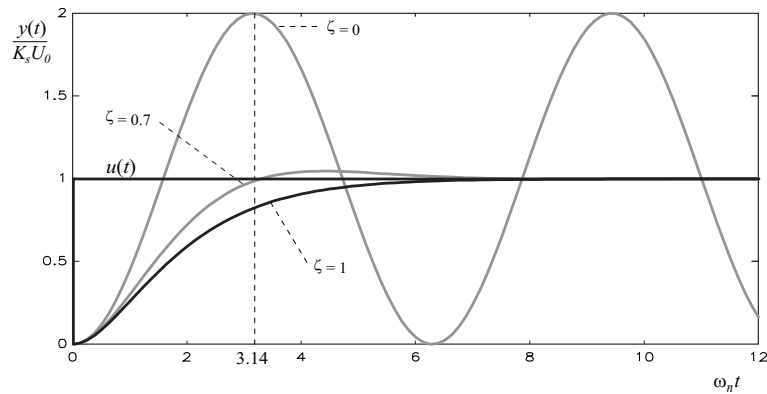


Slika 4.55: Odziv podkritično dušenega proporcionalnega sistema 2. reda na stopničasto vzbujanje

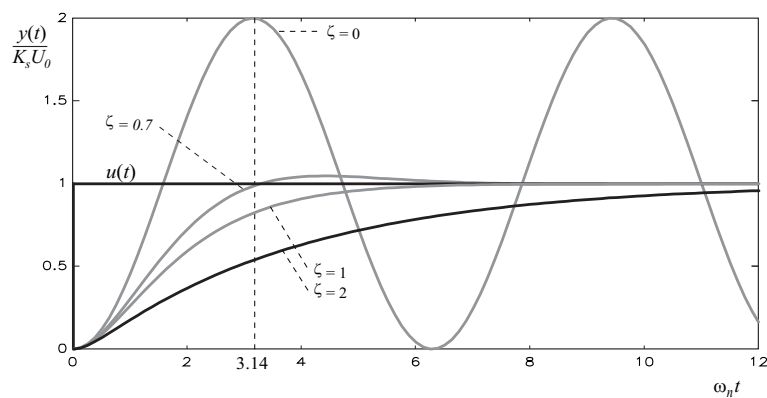
Tretja oblika odziva je odziv kritično dušenega sistema, pri katerem je $\zeta = 1$ (meja aperiodičnosti) (slika 4.56). Za primerjavo je vrisano nedušeno nihanje ter odziv pri dušilnem koeficientu $\zeta = 0.7$. Radvidno je, da pri kritično dušenem sistemu ni nihanja, obenem pa je odziv dokaj počasen. Po drugi strani odziv pri $\zeta = 0.7$ nekoliko zaniha, a je precej hitrejši. Zato v regulacijskih sistemih pogosto poskušamo doseči odziv, ki je enak ali podoben odzivu sistema 2. reda pri $\zeta = 0.7$.

Kot zadnjo obliko odziva si oglejmo še odziv nadkritično dušenega sistema, kjer je $\zeta > 1$ (aperiodični odziv). Odziv prikazuje slika 4.57. V primerjavi z drugimi je odziv zelo upočasnen.

Seveda proporcionalni sistemi niso omejeni zgolj na 1. ali 2. red. Pri sistemih višjih redov lahko dobimo različne odzive na stopnico, vsem pa je skupno to, da



Slika 4.56: Odziv kritično dušenega proporcionalnega sistema 2. reda na stopničasto vzbujanje



Slika 4.57: Odziv nadkritično dušenega proporcionalnega sistema 2. reda na stopničasto vzbujanje

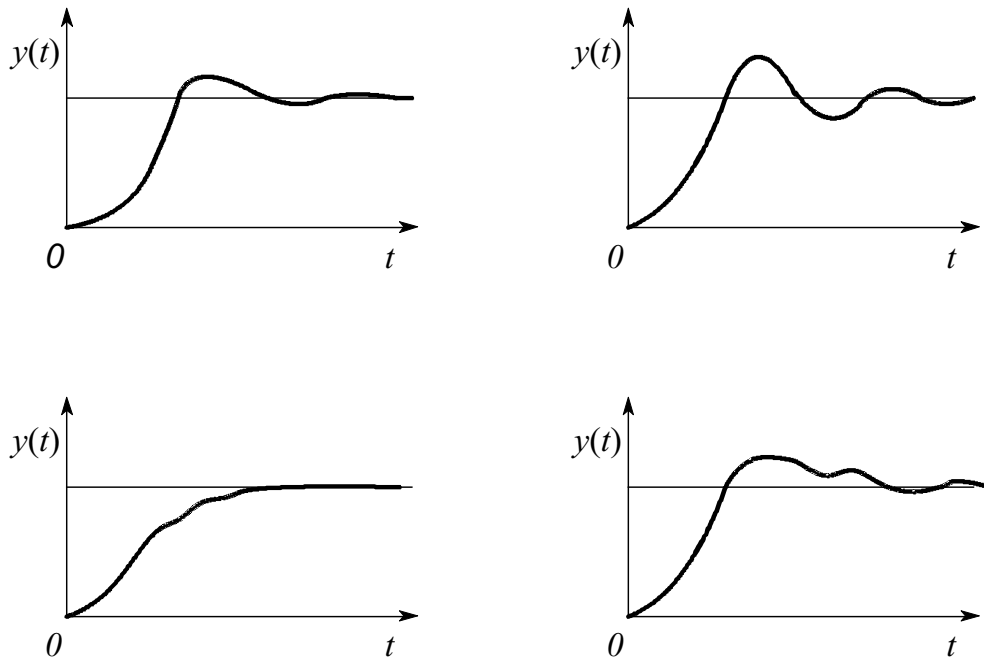
se odziv stabilnega sistema na stopničasto vzbujanje po nekem času ustali. Nekaj primerov odzivov je zbranih na sliki 4.58.

Integrirni sistemi

Integrirni sistemi imajo prenosno funkcijo oblike

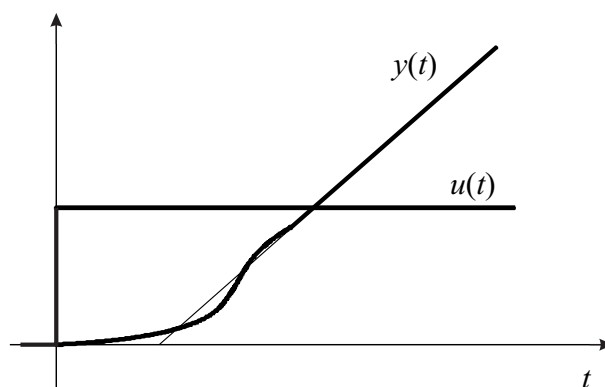
$$G_I(s) = \frac{1}{s^j} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^f + a_{f-1} s^{f-1} + \dots + a_0} \quad (4.136)$$

pri tem predpostavljamo, da je $b_0 \neq 0$ in $a_0 \neq 0$. Red sistema je $n = j + f$. Potenca j določa vrsto sistema. Sistemi vrste $j > 1$ so nestabilni, zato si oglejmo le odziv sistema 1. vrste na stopničasto vzbujanje. Po koncu prehodnega pojava pri



Slika 4.58: Primeri odzivov sistemov višjih redov na stopničasto vzbujanje

odzivu na stopnico izhod takšnega sistema narašča s strmino, ki je proporcionalna $u(t)$ (slika 4.59).



Slika 4.59: Odziv integrirnega sistema 1. vrste na stopničasto vzbujanje

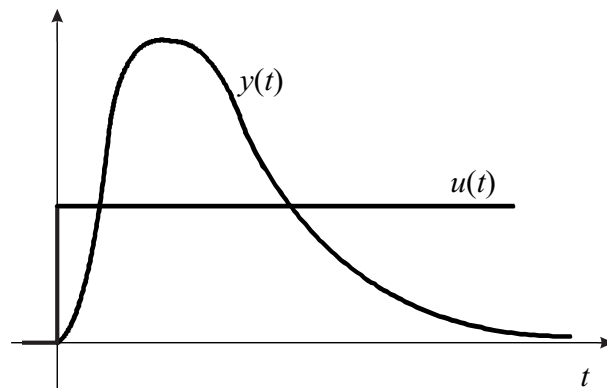
Diferencirni sistemi

Diferencirni sistemi vsebujejo faktor s^j v števcu prenosne funkcije:

$$G_D(s) = s^j \frac{b_g s^g + b_{g-1} s^{g-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (4.137)$$

pri čemer tudi tokrat predpostavljamo, da je $b_0 \neq 0$ in $a_0 \neq 0$.

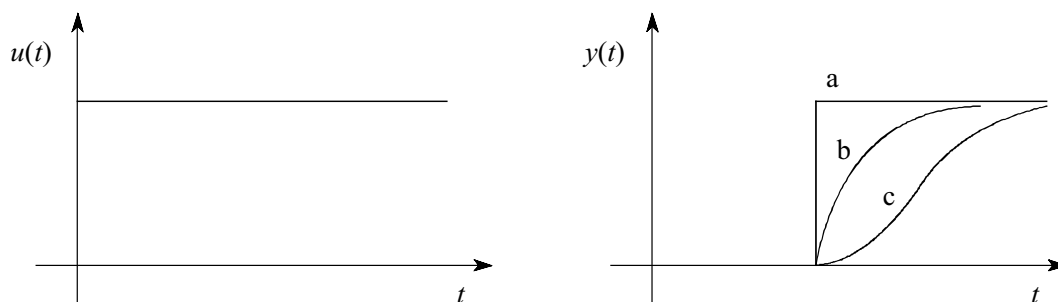
Po koncu prehodnega pojava pri odzivu na stopnico se izhod takšnega sistema ustali pri vrednosti 0 (slika 4.60). s v števcu namreč ustreza odvajanju vhodnega signala, odvod stopnice pa je 0 za $t > 0$.



Slika 4.60: Odziv diferencirnega sistema na stopničasto vzbujanje

Sistemi z mrtvim (transportnim) časom

So sistemi, pri katerih preteče določen čas, preden se pokaže vpliv vhodne veličine na izhodno. Tri primere tovrstnih odzivov prikazuje slika 4.61.



Slika 4.61: Odziv sistema z mrtvim časom na stopničasto vzbujanje

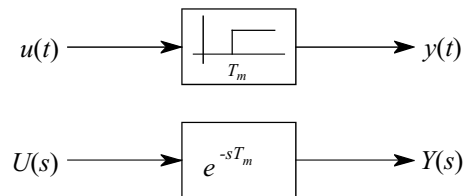
Pri tem gre lahko za čisto transportno zakasnitev (primer a), ali pa je poleg zakasnitve prisoten še nek prehodni pojav (primera b in c). V primeru a lahko opišemo sistem z enačbo

$$y(t) = u(t - T_m) \quad (4.138)$$

kjer je T_m mrtvi čas sistema. Tudi takšno enačbo lahko transformiramo z Laplaceovo transformacijo, če upoštevamo dodatne lastnosti, ki jih v podpoglavju 4.4 nismo obravnavali. Zapišimo le, da je prenosna funkcija sistema s čisto transportno zakasnitvijo enaka

$$G(s) = e^{-sT_m} \quad (4.139)$$

Takšen sistem v blokovni sistemi predstavimo na enega od načinov, ki ju prikazuje slika 4.62

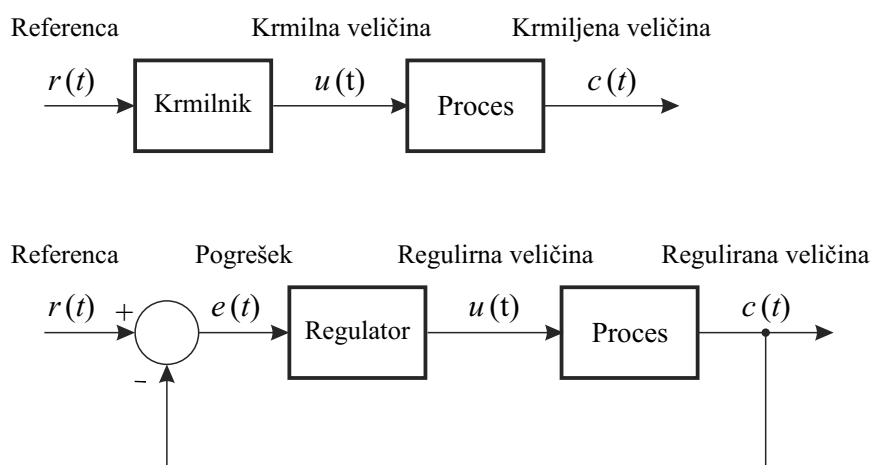


Slika 4.62: Predstavitev sistema z mrtvim časom

Poglavje 5

Regulacijski sistemi

V poglavju o sistemih za avtomatsko vodenje smo obravnavali principe vodenja, ki smo jih delili na odprtozančno in zaprtozančno vodenje. Oba principa prikazuje slika 5.1, kjer so označeni tudi signali in njihova ustaljena poimenovanja.



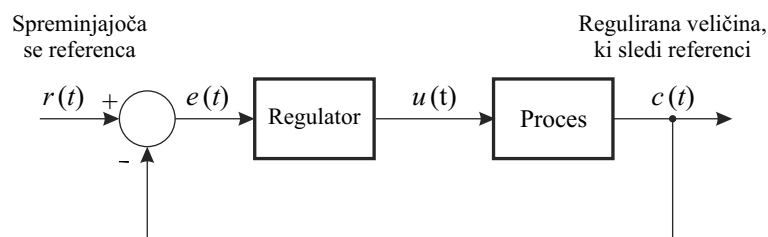
Slika 5.1: Odprto- in zaprtozančno vodenje

Vhod v sistem (proces) pri odprtozančnem vodenju, ki mu pravimo tudi krmiljenje, bomo imenovali *krmilna veličina*, izhod sistema bomo imenovali *krmiljena veličina*. Pri zaprtozančnem vodenju, ki ga imenujemo tudi regulacija, bo vhod v sistem *regulirna veličina*, izhod sistema pa bo v tem primeru *regulirana veličina*. V obeh primerih bo vhod v sistem vodenja *referenca* ali želena vrednost. Pri zaprtozančnem vodenju je pomemben še *pogrešek*, ki je razlika med želeno in dejansko vrednostjo na izhodu sistema.

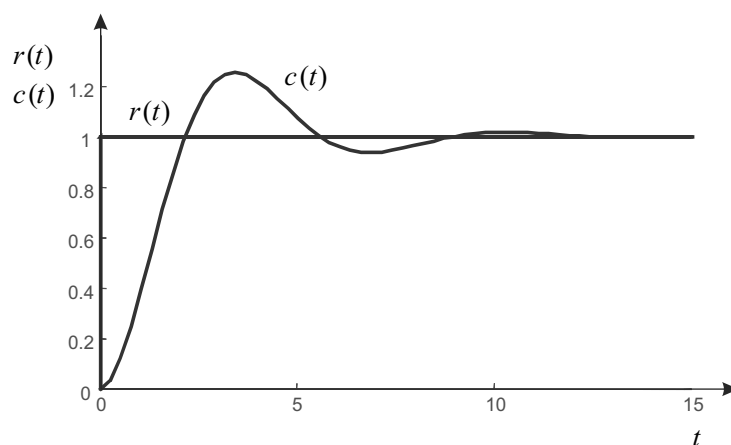
5.1 Sledilno in regulacijsko delovanje

Pri zaprtozančnem vodenju obravnavamo regulacijsko in sledilno delovanje.

Pri sledilnem delovanju je v ospredju zahteva, da regulirana veličina sledi referenčni veličini. Sledenje naj bo hitro in s čim manjšim pogreškom. To vrsto delovanja ilustrira slika 5.2.



Značilen odziv:

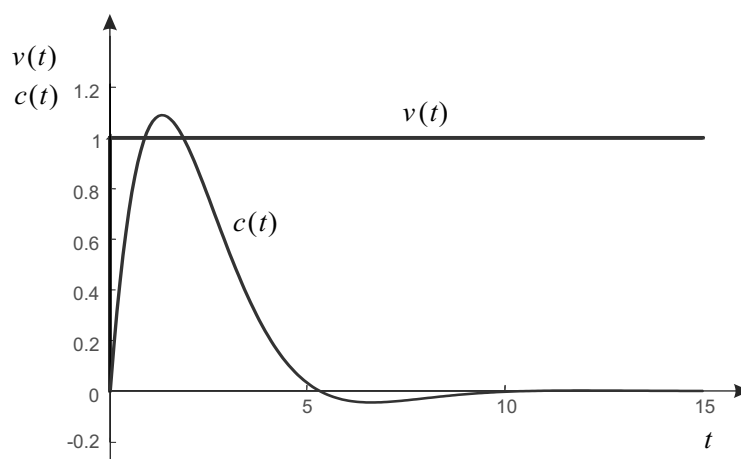
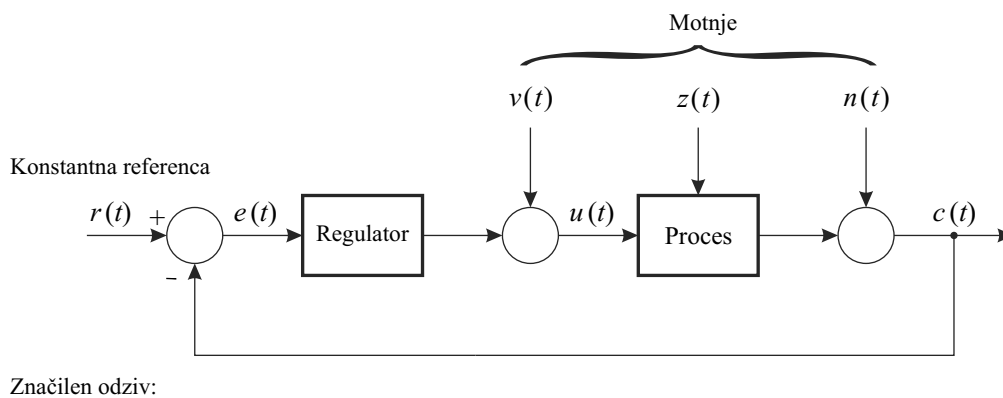


Slika 5.2: Sledilno delovanje

Na sliki je prikazan tudi za to vrsto delovanja značilen odziv. Ob spremembi reference izhod sistema po krajšem prehodnem pojavu doseže novo želeno vrednost.

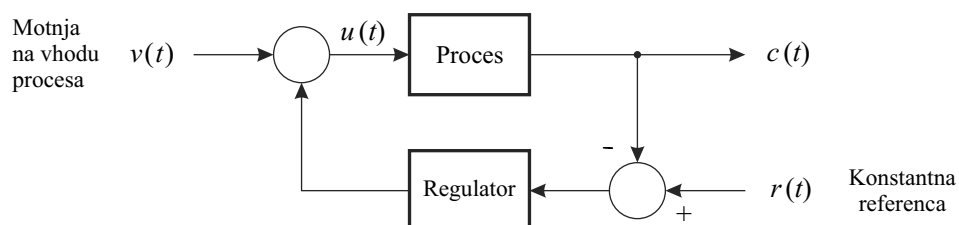
Pri regulacijskem delovanju želimo, da motnje čim manj vplivajo na regulirano veličino. Delovanje ilustrira slika 5.3. Motnje lahko vstopajo v regulacijsko zanko pri regulirni veličini $u(t)$, pri regulirani veličini $c(t)$, ali pa nekje vmes. Na sliki je prikazan značilni odziv pri regulacijskem delovanju, ko je prišlo do stopničaste motnje $v(t)$ pri regulirni veličini oziroma na vhodu procesa. Regulator je zaznal povečanje pogreška in ustrezno prilagodil regulirno veličino, da je regulirana veličina padla nazaj na vrednost, ki jo je imela pred nastopom motnje.

Kadar nas pri regulacijskem delovanju zanimajo predvsem motnje na vhodu pro-



Slika 5.3: Regulacijsko delovanje

cesa, lahko sistem vodenja predstavimo tudi z blokvnim diagramom na sliki 5.4. V primeru motnje na vходу procesa je ta diagram enakovreden diagramu na sliki 5.3, a je tu bolj poudarjeno, da nas pri regulacijskem delovanju kot vhod v zaprtozančni sistem zanima motnja in ne referenca.



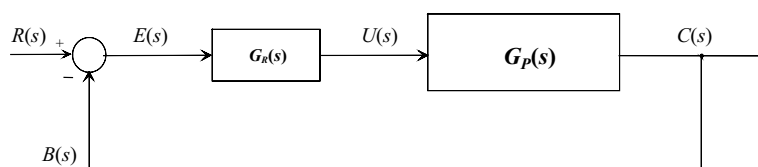
Slika 5.4: Druga predstavitev regulacijskega delovanja

5.2 Blokovni diagram zaprtozančnega sistema

V prejšnjem podpoglavju smo že predstavili delovanje zaprtozančnega sistema vodenja z blokovnim diagramom. Na tem mestu blokovni diagram regulacijskega sistema obravnavamo nekoliko podrobneje skupaj s pripadajočimi prenosnimi funkcijami.

5.2.1 Zaprtozančni sistem z enotino povratno zanko

Najprej bomo obravnavali sistem z enotino povratno zanko, torej regulacijski sistem, kjer referenco neposredno primerjamo z regulirano veličino, brez vmesnih pretvorb (slika 5.5). Pri tem bomo definirali značilne prenosne funkcije.



Slika 5.5: Blokovni diagram zaprtozančnega sistema z enotino povratno zanko

Prenosna funkcija direktne veje je prenosna funkcija od pogreška do regulirne veličine

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = G_R(s)G_P(s) \quad (5.1)$$

Prenosna funkcija povratne zanke je prenosna funkcija od regulirne veličine do sumacijske točke

$$H(s) = \frac{B(s)}{C(s)} = 1 \quad (5.2)$$

Odprtozančna prenosna funkcija je prenosna funkcija od pogreška do vstopa povratne zanke v sumacijsko točko

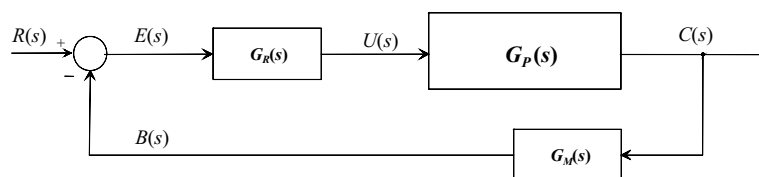
$$G_{od}(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G_R(s)G_P(s) = G(s) \quad (5.3)$$

Zaprtozančna prenosna funkcija je prenosna funkcija od reference do regulirne veličine

$$G_{zz}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_R(s)G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (5.4)$$

5.2.2 Zaprtozančni sistem s splošno povratno zanko

V primeru, ko vsebuje povratna zanka še od 1 različno prenosno funkcijo, so razmere nekoliko drugačne (slika 5.6). Prenosna funkcija $G_M(s)$ v povratni zanki lahko predstavlja merilni pretvornik ali nek drug vpliv na regulirno veličino na prenosni poti do sumacijske točke, kjer se izvede primerjava z referenco. Značilne prenosne funkcije, ki vključujejo tudi povratno zanko, so v tem primeru nekoliko drugačne:



Slika 5.6: Blokovni diagram zaprtozančnega sistema s splošno povratno zanko

Prenosna funkcija direktne veje

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = G_R(s)G_P(s) \quad (5.5)$$

Prenosna funkcija povratne zanke

$$H(s) = \frac{B(s)}{C(s)} = G_M(s) \quad (5.6)$$

Odprtozančna prenosna funkcija

$$G_{od}(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G_R(s)G_P(s)G_M(s) = G(s)H(s) \quad (5.7)$$

Zaprtozančna prenosna funkcija

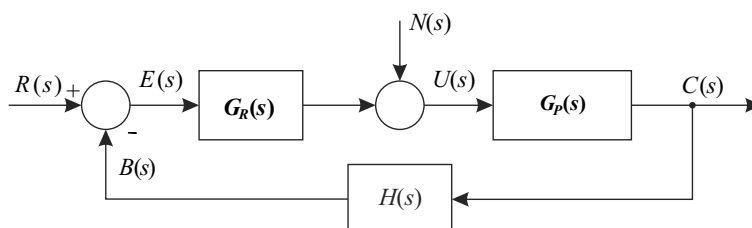
$$G_{zz}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_R(s)G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)G_M(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5.8)$$

Če primerjamo obe različici, vidimo, da je razlika v imenovalcu zaprtozančne prenosne funkcije, kjer sedaj nastopa produkt prenosnih funkcij direktne veje in povratne zanke.

5.2.3 Vpliv povratne zanke pri sledilnem in regulacijskem delovanju

Povežimo sedaj oba obravnavana načina delovanja, sledilno in regulacijsko, s prenosnimi funkcijami zaprtozančnega sistema.

Obravnavamo sistem na sliki 5.7.



Slika 5.7: Vpliv povratne zanke

Na regulirno veličino $C(s)$ delujeta tako referenca $R(s)$ kot motnja $N(s)$. Ker velja princip superpozicije, lahko referenco in motnjo obravnavamo ločeno, njun vpliv na $C(s)$ pa seštejemo:

$$C(s) = C_R(s) + C_N(s) \quad (5.9)$$

pri tem je v $C_R(s)$ zajet vpliv reference, v $C_N(s)$ pa vpliv motnje.

Sledilno delovanje opišemo z vplivom reference $R(s)$ na regulirano veličino $C(s)$. Pripadajoča prenosna funkcija od reference $R(s)$ do $C_R(s)$ je

$$G_{zz1}(s) = \frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_R(s)G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5.10)$$

Pri sledilnem delovanju je cilj vodenja čim boljše sledenje referenčnemu signalu. Če izrazimo $C_R(s)$

$$C_R(s) = \frac{G_R(s)G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)H(s)} R(s) \quad (5.11)$$

lahko vidimo, da bi dobili idealno sledenje, če bi veljalo $G_{zz1} = 1$. Cilj načrtovanja vodenja je torej dobiti zaprtozančno prenosno funkcijo G_{zz1} , ki bo čim bližje vrednosti 1.

Pri regulacijskem delovanju je v ospredju vpliv motenj na regulirano veličino $C(s)$, zato izrazimo še prenosno funkcijo od motnje $N(s)$ do $C_N(s)$

$$G_{zz2}(s) = \frac{C_N(s)}{N(s)} = \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)H(s)} = \frac{G_P(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5.12)$$

Pri regulacijskem delovanju je cilj delovanja čim učinkovitejše zmanjševanje motilnih vplivov. Če izrazimo $C_N(s)$

$$C_N(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)H(s)}N(s) \quad (5.13)$$

lahko vidimo, da bi dobili idealno dušenje motenj, če bi veljalo $G_{zz2} = 0$. Cilj načrtovanja vodenja je torej dobiti zaprtozančno prenosno funkcijo G_{zz2} , ki bo čim bliže vrednosti 0.

Odziv $C(s)$ je sestavljen iz obeh prispevkov

$$C(s) = C_R(s) + C_N(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)H(s)} [G_R(s)R(s) + N(s)] \quad (5.14)$$

Poskušajmo sedaj iz enačbe (5.14) razbrati, kakšne zveze med nastopajočimi prenosnimi funkcijami bi izpolnile cilje sledilnega in regulacijskega delovanja. Pri tem se moramo zavedati, da so prenosne funkcije v enačbi funkcije kompleksne spremenljivke s . Natančna obravnava je zato zapletena, lahko pa pridemo do določenih ugotovitev, če operiramo z absolutnimi vrednostmi funkcij in kvalitativno ovrednotimo vpliv reference in vpliv motenj.

Če je $|G_R(s)G_P(s)H(s)| \gg 1$, potem v imenovalcu izraza (5.14) prevladuje ta člen in je enica zanemarljiva. Če je tudi $|G_R(s)H(s)| \gg 1$, postane absolutna vrednost $G_{zz2}(s)$ zelo majhna in povratna zanka duši učinek motnje.

Ob predpostavki $|G_R(s)G_P(s)H(s)| \gg 1$ je absolutna vrednost $G_{zz1}(s)$ približno $\frac{1}{|H(s)|}$, kar pomeni dvoje:

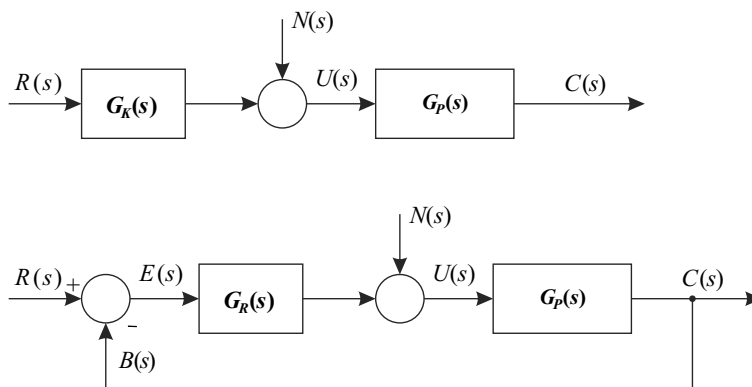
- zaprtozančna prenosna funkcija je le malo odvisna od $G_R(s)$ in $G_P(s)$,
- če je $H(s) = 1$, torej če imamo enotino povratno zanko, dobimo sledenje referenci.

5.3 Učinki povratne zanke

Povzemimo učinke povratne zanke, tako da primerjamo odprtozančno in zaprtozančno vodenje (predpostavimo enotino povratno zanko). Blokovna shema obeh primerjanih sistemov vodenja je na sliki 5.8.

V primeru odprtozančnega vodenja je krmilna veličina $C(s)$ izražena kot

$$C(s) = G_P(s) [G_K(s)R(s) + N(s)] \quad (5.15)$$



Slika 5.8: Primerjava odprto in zaprtozančnega vodenja

Pri zaprtozančnem vodenju pa je odvisnost regulirne veličine od reference in motnje podana z izrazom (5.14) ob upoštevanju enotine povratne zanke

$$C(s) = C_R(s) + C_N(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} [G_R(s)R(s) + N(s)] \quad (5.16)$$

Glede na enačbi (5.15) in (5.16) ter glede na izvajanja v prejšnjem podpoglavju lahko izpostavimo naslednje učinke povratne zanke:

- 1. učinek povratne zanke:** Opazujemo vpliv sprememb parametrov sistema, torej sprememb parametrov krmilnika ali regulatorja ter vpliv sprememb procesa.

Pri odprtozančnem vodenju spremembe v $G_K(s)$ ali $G_P(s)$ neposredno vplivajo na $C(s)$. Pri zaprtozančnem vodenju so spremembe v $G_R(s)$ ali $G_P(s)$ deljene s faktorjem $1 + G_R(s)G_P(s)$. Če je $|G_R(s)G_P(s)| \gg 1$, potem je vpliv teh sprememb na $C(s)$ zanemarljivo majhen.

Razmišljanje lahko sklenemo z naslednjo ugotovitvijo:

Povratna zanka zmanjša občutljivost na spremembe parametrov sistema

Med drugim to pomeni, da je dovolj da le približno poznamo model procesa, pa še vedno lahko naredimo zelo dobro in natančno regulacijo.

- 2. učinek povratne zanke:** Opazujemo vpliv motenj.

Motnja na vходу procesa pri odprtozančnem vodenju vpliva na $C(s)$ preko produkta $G_P(s)N(s)$. Vpliv motnje je torej odvisen zgolj od procesa. Pri

zaprtozančnem vodenju je vpliv motnje na $C(s)$ v primerjavi z odprtozančnim vodenjem zmanjšan za faktor $1 + G_R(s)G_P(s)$. Lahko ugotovimo naslednje:

Povratna zanka praviloma zmanjša občutljivost na motnje

Ta ugotovitev velja le, če produkt $G_R(s)G_P(s)$ ni blizu -1. V tem primeru bi namreč dobili majhno vrednost faktorja $1 + G_R(s)G_P(s)$, ki bi celo ojačeval vpliv motnje.

3. učinek povratne zanke: Opazujemo dinamiko celotnega sistema glede na dinamiko procesa.

Odziv $C(s)$ na vzbujanje $R(s)$ pri odprtozančnem vodenju vsebuje dinamiko sistema $G_P(s)$. To pomeni, da odziv krmiljenega sistema ne more biti hitrejši od odziva sistema brez krmiljenja.

Če imamo zaprtozančno vodenje, potem odziv $C(s)$ na vzbujanje $R(s)$ določa prenosna funkcija, v kateri je funkcija $G_P(s)$ deljena s faktorjem $1 + G_R(s)G_P(s)$. Dinamika zaprtozančnega sistema je lahko drugačna od dinamike sistema brez vodenja. S povratno zanko lahko dosežemo, da se regulirani sistem odziva hitreje kot sistem brez vodenja.

Razmišljanje lahko sklenemo z naslednjo ugotovitvijo:

Povratna zanka spremeni dinamično obnašanje sistema

Poleg hitrosti lahko povratna zanka spremeni tudi značaj sistema, npr. iz integrirnega dobimo proporcionalni sistem, kar smo pokazali pri obravnavi simulacijskih shem.

4. učinek povratne zanke: Opazujemo stabilnost sistema.

Kot smo ugotovili že pri prejšnji točki, vsebuje odziv $C(s)$ na vzbujanje $R(s)$ pri odprtozančnem vodenju dinamiko sistema $G_P(s)$. Morebitni nestabilni poli sistema $G_P(s)$ povzročijo nestabilnost krmiljenega sistema. To pomeni, da če je sistem nestabilen, ga s krmiljenjem ne moremo stabilizirati.

Odziv $C(s)$ na $R(s)$ pri zaprtozančnem vodenju določa prenosna funkcija, v kateri je funkcija $G_P(s)$ deljena s faktorjem $1 + G_R(s)G_P(s)$. Poli zaprtozančnega sistema so določeni z ničlami izraza $1 + G_R(s)G_P(s)$. Če ležijo ničle tega izraza v levi strani kompleksne ravnine, je zaprtozančni sistem stabilen.

Zaprtozančno vodenje premakne pole sistema. S primernim regulatorjem lahko iz nestabilnega dobimo stabilen sistem.

Kot zadnji učinek povratne zanke tako opredelimo naslednje:

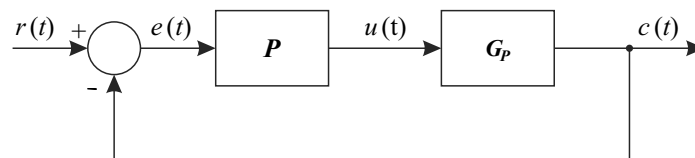
Povratna zanka lahko stabilizira sistem

Ugotovili smo, da prinaša vpeljava povratne zanke v sistem vodenja številne prednosti. Seveda pa ni nepomembno, kakšen regulator uporabimo. V zaprtozančnih prenosnih funkcijah, ki smo jih izpeljali v prejšnjih podpoglavjih, namreč povsod nastopa tudi prenosna funkcija $G_R(s)$. Od izbire regulatorja je odvisno, v kolikšni meri bodo prednosti povratne zanke prišle do izraza, predvsem pa je od tega odvisna oblika prehodnega pojava pri spremembah reference ali pri nastopu motenj.

Uveljavile so se nekatere standardne oblike prenosnih funkcij regulatorjev, od katerih bomo v nadaljevanju obravnavali dve najpreprostejši. Najpreprostejši je proporcionalni regulator.

5.4 Proporcionalni regulator

Regulacijski sistem s proporcionalnim regulatorjem prikazuje slika 5.9. Takšen regulator vsebuje le proporcionalno ojačenje pogreška na vhodu regulatorja, imenujemo ga tudi P-regulator.



Slika 5.9: Proporcionalni regulator

Regulirna veličina je proporcionalna pogrešku oz. razliki med želeno vrednostjo in regulirano veličino

$$u(t) = K_P e(t) \quad (5.17)$$

Če enačbo transformiramo z Laplaceovo transformacijo, lahko določimo prenosno funkcijo regulatorja

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = P(s) = K_P \quad (5.18)$$

Če želimo tak regulator uporabiti za vodenje, moramo določiti parameter K_P , ki predstavlja proporcionalno ojačenje regulatorja. Od izbire tega parametra so odvisne lastnosti zaprtozančnega sistema.

Oglejmo si primer zaprtozančne prenosne funkcije sistema vodenja s P-regulatorjem, in sicer za primer procesa 1. reda $G_P(s) = \frac{K_s}{Ts+1}$. Pri tem obravnavamo oba načina vodenja, sledilno in regulacijsko delovanje.

Pri sledilnem delovanju nas zanima prenosna funkcija od reference do regulirane veličine

$$\begin{aligned} G_{zz1}(s) &= \frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_R(s)G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} = \frac{K_P \frac{K_s}{Ts+1}}{1 + K_P \frac{K_s}{Ts+1}} = \\ &= \frac{K_P K_s}{Ts + 1 + K_P K_s} = \frac{\frac{K_P K_s}{1 + K_P K_s}}{\frac{T}{1 + K_P K_s} s + 1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Zaprtozančni sistem je še vedno proces 1. reda, ki pa ima drugačno ojačenje in drugačno časovno konstanto. Zaprtozančno ojačenje je

$$K_{zz} = \frac{K_P K_s}{1 + K_P K_s} = 1 - \frac{1}{1 + K_P K_s} \quad (5.20)$$

Vidimo, da je pri $K_s > 0$ in $K_P > 0$ zaprtozančno ojačenje vedno manjše od 1. To pomeni, da bo npr. pri odzivu na stopničasto spremembo reference skupna sprememba regulirane veličine do ustaljenega stanja manjša, kot je bila sprememba reference. To pomeni, da ima regulacijski sistem pogrešek v ustaljenem stanju. Zaprtozančna časovna konstanta je

$$T_{zz} = \frac{T}{1 + K_P K_s} \quad (5.21)$$

Razvidno je, da je pri $K_s > 0$ in $K_P > 0$ zaprtozančna časovna konstanta krajša od časovne konstante nereguliranega sistema.

Izpeljimo še prenosno funkcija od motnje do regulirane veličine, ki je pomembna pri regulacijskem delovanju

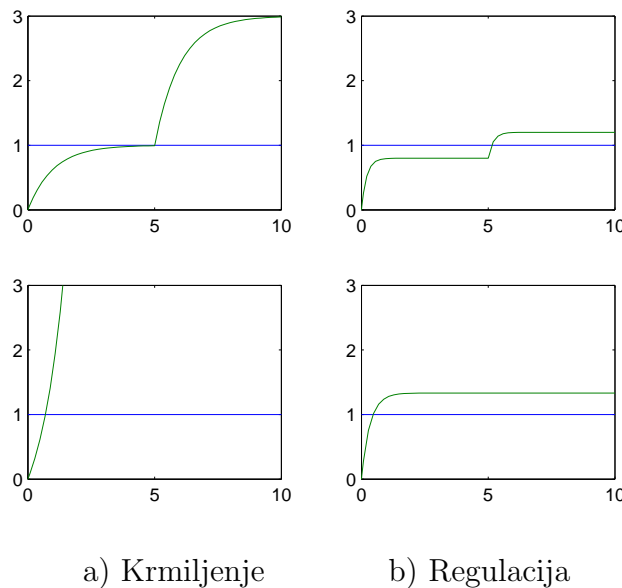
$$\begin{aligned} G_{zz2}(s) &= \frac{C_N(s)}{N(s)} = \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} = \frac{\frac{K_s}{Ts+1}}{1 + K_P \frac{K_s}{Ts+1}} = \\ &= \frac{K_s}{Ts + 1 + K_P K_s} = \frac{\frac{K_s}{1 + K_P K_s}}{\frac{T}{1 + K_P K_s} s + 1} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Zaprtozančno ojačenje od motnje do regulirane veličine je

$$K_{zz} = \frac{K_s}{1 + K_P K_s} = K_s \left(\frac{1}{1 + K_P K_s} \right) \quad (5.23)$$

Vidimo, da je pri $K_s > 0$ in $K_P > 0$ zaprtozančno ojačenje vedno manjše od ojačenja samega procesa, kar pomeni zmanjšanje vpliva motnje glede na odprtozančni sistem. Obenem pa je to ojačenje vselej večje od 0. To pomeni, da bo npr. pri odzivu na stopničasto motnjo skupna sprememba regulirane veličine različna od 0. To pomeni, da regulator ne uspe popolnoma izničiti motnje in regulacijski sistem ima pogrešek v ustaljenem stanju. Zaprtozančna časovna konstanta je enaka kot pri sledilnem delovanju.

Učinke povratne zanke za obravnavani primer ilustrira slika 5.10. Zgornji del slike prikazuje odziva krmiljenja in regulacije procesa $G_P(s) = \frac{2}{s+1}$. Kot krmilnik uporabimo $G_K(s) = 0.5$, kot regulator pa proporcionalni regulator z ojačenjem 2 ($G_R(s) = 2$). V obeh primerih nastopi stopničasta sprememba reference z amplitudo 1 ob času $t = 0$, dodatno pa še stopničasta motnja enake amplitude na vходу procesa ob času $t = 5$.



Slika 5.10: Učinki povratne zanke: P-regulator in proces 1. reda

Iz slike je razvidno, da uspe krmiljeni sistem v primeru brez motenj doseči zeleno vrednost, saj je bilo ojačenje krmilnika izbrano tako, da je skupno ojačenje ravno 1. Pač pa ob nastopu motnje le-te krmilnik ne more izničiti, saj o motnji nima nobene informacije. Krmiljena veličina se zato močno oddalji od želene vrednosti. V nasprotju s tem zaprtozančni sistem s P-regulatorjem ne uspe povsem izničiti pogreška v ustaljenem stanju pri spremembi reference. Regulirana veličina je sicer blizu želene, ni pa ji povsem enaka. A po nastopu motnje regulirana veličina ostane blizu želene vrednosti, saj regulator s pomočjo povratne zanke zmanjša

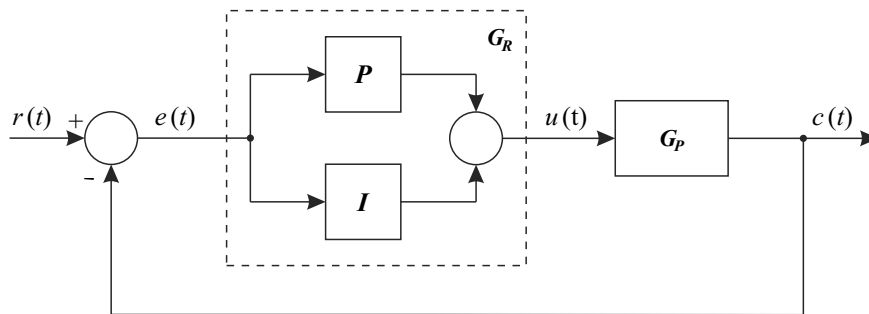
vpliv motnje. Opazno je tudi, da je odziv zaprtozančnega sistema hitrejši od odprtozančnega.

Spodnji del prikazuje odziva krmiljenja in regulacije procesa $G_P(s) = \frac{2}{s-1}$ pri enakih nastavitvah krmilnika in regulatorja kot v zgornjem primeru. Pol procesa leži na pozitivni realni osi ravnine s , zato je proces nestabilen. Očitno je nestabilen tudi krmiljeni sistem. Pač pa je sistem s P-regulatorjem tudi v tem primeru stabilen in regulirna veličina se kljub pogrešku v ustaljenem stanju ustali blizu zelene vrednosti.

5.5 Proporcionalno-integrirni regulator

Pri obravnavi P-regulatorja smo pokazali, da lahko s P-regulatorjem izboljšamo delovanje sistema vodenja v primerjavi z odprtozančnim krmiljenjem. Takšen regulacijski sistem pa ima tudi nekatere slabosti, predvsem pogrešek v ustaljenem stanju.

Pri številnih procesih lahko omenjene slabosti odpravimo in še dodatno izboljšamo vodenje, če v regulator dodamo integrirni člen. Na ta način dobimo proporcionalno-integrirni regulator, katerega blokovno shemo prikazuje slika 5.11. Takšen regulator imenujemo tudi PI-regulator.



Slika 5.11: Proporcionalno-integrirni regulator

Regulirna veličina na izhodu PI-regulatorja je proporcionalna pogrešku in integralu pogreška

$$u(t) = K_P e(t) + \frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (5.24)$$

Če enačbo transformiramo z Laplaceovo transformacijo, lahko določimo prenosno funkcijo regulatorja

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = P(s) + I(s) = K_P + \frac{K_P}{T_I s} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (5.25)$$

Če želimo tak regulator uporabiti za vodenje, moramo določiti dva parametra: K_P in T_I . Parameter K_P je *proporcionalno ojačenje* regulatorja, T_I pa je *integrirna časovna konstanta* regulatorja. Včasih namesto slednje navajamo tudi ojačenje integrirnega dela $K_I = \frac{K_P}{T_I}$.

Podobno kot pri P-regulatorju si oglejmo primer zaprtozančne prenosne funkcije sistema vodenja s PI-regulatorjem, in sicer za primer procesa 1. reda $G_P(s) = \frac{K_s}{T_s+1}$. Pri tem obravnavamo oba načina vodenja, sledilno in regulacijsko delovanje. Pri sledilnem delovanju nas zanima prenosna funkcija od reference do regulirane veličine

$$\begin{aligned} G_{zz1}(s) &= \frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_R(s)G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} = \frac{K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \frac{K_s}{T_s+1}}{1 + K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \frac{K_s}{T_s+1}} = \\ &= \frac{\frac{K_P K_s}{T_I T} (T_I s + 1)}{s^2 + \frac{1+K_P K_s}{T} s + \frac{K_P K_s}{T_I T}} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Zaprtozančni sistem je sistem 2. reda. Ponovimo, da nastavljamo parametra K_P in T_I , medtem ko sta K_s in T parametra procesa, ki ga reguliramo, in ju ne moremo spreminjati. Od nastavitve parametrov K_P in T_I je odvisno, ali bo sistem podkritično ali nadkritično dušen – ali bo prehodni pojav nihajoč ali ne.

Če primerjamo enačbo (5.26) s (5.19), vidimo, da je bila pri P-regulatorju zaprtozančna funkcija 1. reda, tu je 2. reda. Še bolj pomembno pa je, da je bilo zaprtozančno ojačenje pri sistemu s P-regulatorjem enako $K_{zz} = \frac{K_P K_s}{1+K_P K_s} < 1$, kar je pomenilo pogrešek v ustaljenem stanju. V sistemu s PI-regulatorjem je ojačenje zaprtozančnega sistema glede na referenco enako 1, to pa pomeni, da bo sprememba regulirane veličine po koncu prehodnega pojava enaka spremembi reference. Z drugimi besedami, dobimo sledenje referenci brez pogreška v ustaljenem stanju.

Pri regulacijskem delovanju nas zanima prenosna funkcija od motnje do regulirane veličine

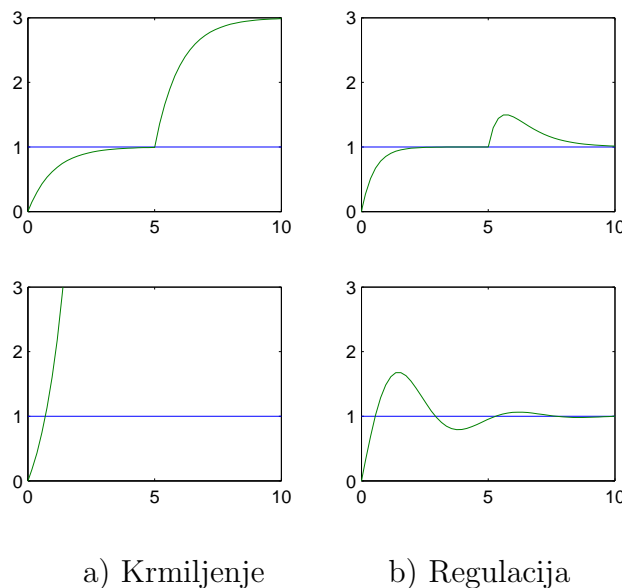
$$\begin{aligned} G_{zz2}(s) &= \frac{C_N(s)}{N(s)} = \frac{G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} = \frac{\frac{K_s}{T_s+1}}{1 + K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \frac{K_s}{T_s+1}} = \\ &= \frac{\frac{K_s}{T} s}{s^2 + \frac{1+K_P K_s}{T} s + \frac{K_P K_s}{T_I T}} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Tudi v tem primeru je zaprtozančni sistem sistem 2. reda. Primerjava enačb

(5.27) in (5.22) pokaže, da je bila pri P-regulatorju zaprtozančna funkcija 1. reda. A bolj pomembno je, da je bilo zaprtozančno ojačenje pri sistemu s P-regulatorjem enako $K_{zz} = \frac{K_s}{1+K_P K_s} > 0$, kar je pomenilo pogrešek v ustaljenem stanju, saj regulator ni uspel povsem izničiti motnje. V sistemu s PI-regulatorjem je ojačenje zaprtozančnega sistema glede na motnjo enako 0, to pa pomeni, da po koncu prehodnega pojava ne bo več nikakršnega vpliva motnje na regulirano veličin. Z drugimi besedami, regulator popolnoma izniči vpliv motnje brez pogreška v ustaljenem stanju.

Naštete ugotovitve veljajo seveda za vodenje procesa 1. reda. Izkaže pa se, da jih lahko posplošimo na velik nabor procesov, ki jih najdemo v praksi. Zato je PI-regulator eden najpogosteje uporabljenih regulatorjev.

Učinke povratne zanke za primer, ko proporcionalni proces 1. reda vodimo s PI-regulatorjem, ilustrira slika 5.12. Zgornji del slike prikazuje odziva krmiljenja in regulacije enakega procesa kot na sliki 5.10, torej procesa $G_P(s) = \frac{2}{s+1}$. Uporabimo tudi enak krmilnik $G_K(s) = 0.5$, kot regulator pa uporabimo PI-regulator z proporcionalnim ojačenjem 1 in integrirno časovno konstanto 1 ($G_R(s) = 1 + \frac{1}{s}$). Ob času $t = 0$ nastopi stopničasta sprememba reference z amplitudo 1, dodatno pa še stopničasta motnja enake amplitude na vhodu procesa ob času $t = 5$.



Slika 5.12: Učinki povratne zanke: PI-regulator in proces 1. reda

Spodnji del prikazuje odziva krmiljenja in regulacije procesa $G_P(s) = \frac{2}{s-1}$ pri enakih nastavitvah krmilnika in regulatorja kot v zgornjem delu slike. Levi del slike, ki prikazuje delovanje krmilnega sistema, je enak kot na sliki 5.10. V levem

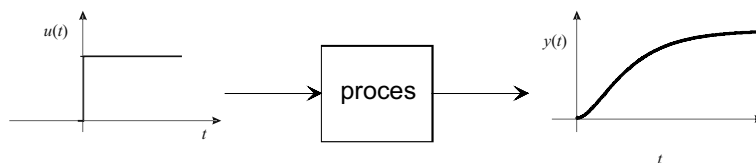
delu slike pa opazimo drugačen potek regulirane veličine. Glavna razlika je v tem, da ni več pogrešk av ustaljenem stanju, ki ga PI-regulator uspešno odpravi tako pri spremembi reference kot pri motnji. Opazimo lahko še nihajoč odziv pri regulaciji nestabilnega procesa. Nastavitve regulatorja v tem primeru niso optimalne, vseeno pa regulator uspe stabilizirati nestabilen sistem.

5.6 Nastavljanje regulatorjev

Nastavitev regulatorja vpliva na dinamične lastnosti in s tem na kvaliteto regulacijskega sistema. Tudi če vzamemo standardno strukturo regulatorja, npr. PI-regulator, ga je potrebno uglašiti na dani proces. Primerna nastavitvev regulatorja je namreč odvisna od dinamičnih lastnosti procesa oz. odprtozančnega sistema.

Pogosto modela procesa ne poznamo, ob tem pa smo pri učinkih povratne zanke omenili, da natančno poznavanje modela procesa niti ni nujno potrebno. Dovolj je, da dinamične lastnosti procesa ocenimo.

Ena od možnosti je, da ocenimo dinamične lastnosti procesa z eksperimentom, npr. z merjenjem odprtozančnega odziva na stopničasto vzbujanje (slika 5.13).

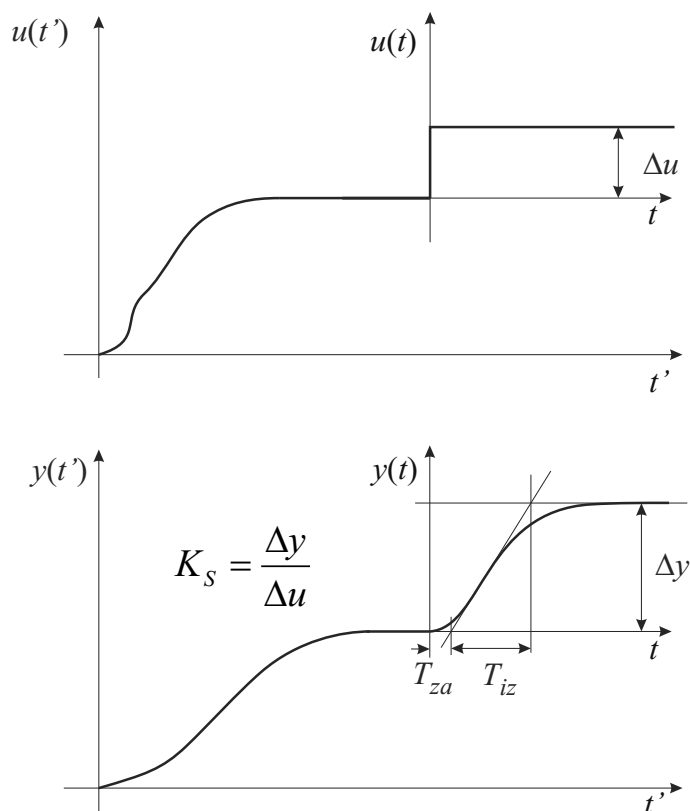


Slika 5.13: Eksperimentalno ocenjevanje dinamičnih lastnosti procesa

Pri tem moramo upoštevati, da procesi, s katerimi imamo opravka v praksi, v splošnem niso linearni procesi. Med drugim to pomeni, da se odzivi na enak vhodni signal pri različnih obratovalnih pogojih lahko razlikujejo. Večino procesov lahko dokaj dobro opišemo z linearnim približkom, ki pa običajno velja le za določeno obratovalno stanje. Zato odziv na stopnico merimo tako, da v proces v izbranem obratovalnem stanju vzbujamo z majhno stopničasto spremembo, nato pa obravnavamo le odstopanja od začetnega stanja.

Potek takšnega merjenja odziva na stopnico ilustrira slika 5.14:

- proces pripeljemo v okolico obratovalnega stanja,
- ko se razmere ustalijo, naredimo stopničasto spremembo vhodnega signala,
- izmerimo prehodni pojav in iz njega odčitamo značilne parametre.



Slika 5.14: Merjenje odziva na stopnico

Opozorimo še enkrat, da merimo odziv samega procesa, ne pa odziv zaprtostančnega sistema. Če uglašujemo regulacijski sistem, v katerem je povratna zanka že izvedena, moramo regulacijo začasno onemogočiti in zagotoviti stopničasto vzbujanje na vходу procesa.

Značilni parametri odziva na stopnico so K_s , to je statično ojačenje, T_{za} , ki ga imenujemo *čas zakasnitve* in T_{iz} , ki ga imenujemo *čas izravnave*.

Nadaljevanje postopka nastavljanja je odvisno od ocenjenih dinamičnih lastnosti procesa. Če je npr. čas zakasnitve tako majhen, da ga ne moremo oceniti, potem lahko proces v večini primerov približno opišemo kot proces 1. reda. Čas izravnave je v tem primeru enak časovni konstanti procesa.

Za enostavne procese, kot je proces 1. reda, lahko primerne vrednosti parametrov P ali PI-regulatorja izpeljemo analitično. Osredotočimo se na PI-regulator in

sledilno delovanje ter zaprtozančno prenosno funkcijo zapišimo nekoliko drugače

$$G_{zz}(s) = \frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_R(s)G_P(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)} = \frac{K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \frac{K_s}{T_s + 1}}{1 + K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \frac{K_s}{T_s + 1}} = \quad (5.28)$$

$$= \frac{\frac{K_P K_s (T_I s + 1)}{T_I s (T_s + 1)}}{1 + \frac{K_P K_s (T_I s + 1)}{T_I s (T_s + 1)}}$$

Zaprtozančna prenosna funkcija se poenostavi, če nastavimo $T_I = T$. Potem se namreč polinoma $T_I s + 1$ in $T_s + 1$ krajšata in dobimo

$$G_{zz}(s) = \frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_P K_s}{T_s}}{1 + \frac{K_P K_s}{T_s}} = \frac{K_P K_s}{T_s + K_P K_s} = \frac{1}{\frac{T}{K_P K_s} s + 1} \quad (5.29)$$

Pri nastavitvi $T_I = T$ dobimo zaprtozančni sistem 1. reda z ojačenjem 1. S parametrom K_P lahko vplivamo na časovno konstanto zaprtozančnega sistema. Teoretično lahko dobimo poljubno hiter odziv, potrebno pa se je zavedati, da hitrejši odziv pomeni večje vrednosti regulirnega signala v prehodnem pojavu. Ker je vhod v proces v praksi vselej omejen, zato izbiramo vrednosti K_P , ki dajejo podobno ali nekoliko večjo hitrost odziva, kot je hitrost procesa. To pomeni, da produkt $K_P K_s$ ne sme biti prevelik, pogosto izberemo 2 ali 3, kar da dvakrat ali trikrat krajšo zaprtozančno časovno konstanto od odprtozančne.

Podobno izpeljavo bi lahko naredili tudi za sistem s P-regulatorjem. Če izhajamo iz želenega zaprtozančnega ojačenja in zelene zaprtozančne časovne konstante, lahko zberemo nastavitvena pravila za sistem 1. reda v tabeli 5.1.

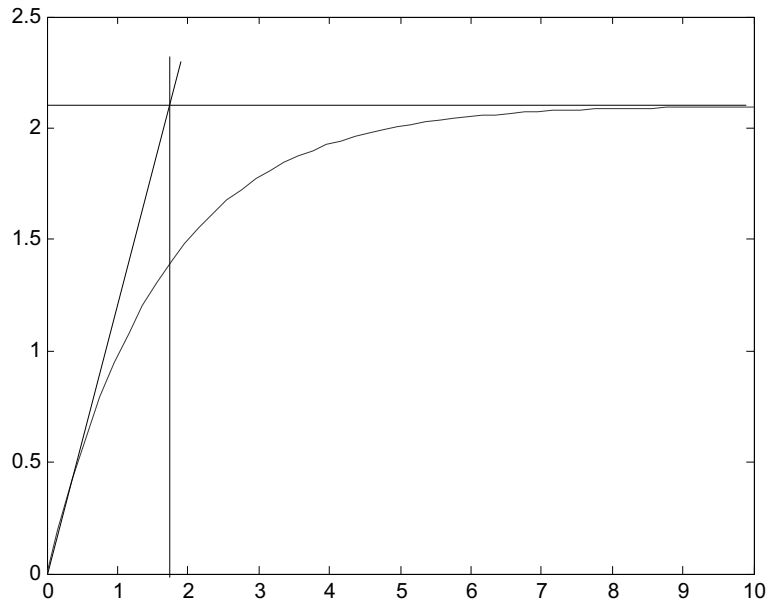
Tabela 5.1: Nastavitvena pravila za sistem 1. reda

regulator	K_P	T_I
P	$\frac{T_s - T_{zel}}{K_s T_{zel}}$ ali $\frac{K_{zel}}{K_s (1 - K_{zel})}$	/
PI	$\frac{T_s}{T_{zel} K_s}$	T_s

V tabeli sta K_s in T_s ocenjena parametra procesa ($T_s = T_{iz} = T$, $T_{za} = 0$), K_{zel} je želeno ojačenje zaprtozančnega sistema in T_{zel} je zelena časovna konstanta zaprtozančnega sistema. Pri sistemu s PI-regulatorjem je zaprtozančno ojačenje enako 1, zato lahko izbiramo zgolj želeno zaprtozančno časovno konstanto.

Primer 5.1 Nastavitev regulatorja za proces 1. reda

Slika 5.15 prikazuje izmerjeni odziv na stopnico za neznani proces.



Slika 5.15: Izmerjeni odziv na enotino stopnico

Proces je bil vzbujan z enotino stopnico, kar pomeni $\Delta u = 1$. Časa zakasnice ne moremo oceniti, zato privzamemo proces 1. reda. Ocenimo, da se odziv ustali pri vrednosti 2.1, kar glede na podano vzbujanje pomeni ocenjeno ojačenje $K_s = 2.1$. S pomočjo tangente ocenimo čas izravnave oz. $T_s = 1.7$. Izberemo $T_{zel} = 0.5$ in s pomočjo tabele 5.1 izračunamo parametra PI-regulatorja:

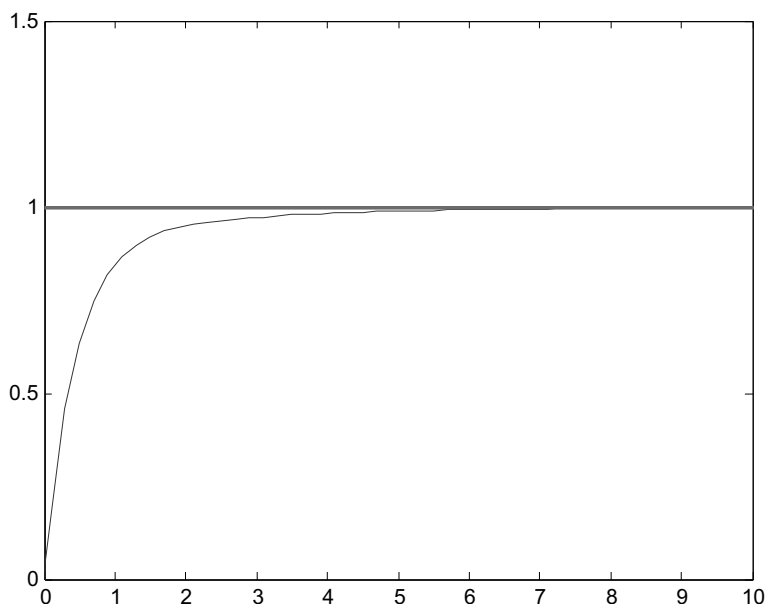
$$K_P = \frac{T_s}{T_{zel} K_s} = \frac{1.7}{0.5 \cdot 2.1} \doteq 1.62$$

$$T_I = T_s = 2.1$$

Simulacijo zaprtozančnega odziva pri referenčnem signalu v obliki enotine stopnice prikazuje slika 5.16.

□

Za procese višjega reda so pravila za nastavljanje P in PI-regulatorjev zbrana v tabelah. Nastavitev je odvisna od zahtev pri regulaciji, ki vključujejo način delovanja (sledilno ali regulacijsko) ter zahteve glede oblike prehodnega pojava. Zahtevamo npr. lahko odziv brez nihanja ali pa dopustimo nihajoč odziv a omejimo velikost prenihaja, to pomeni, koliko sme regulirana veličina preseči spremembo reference v prehodnem pojavu. Primer takšnih nastavitvenih pravil prikazuje tabela 5.2.



Slika 5.16: Odziv zaprtzoančnega sistema s PI-regulatorjem

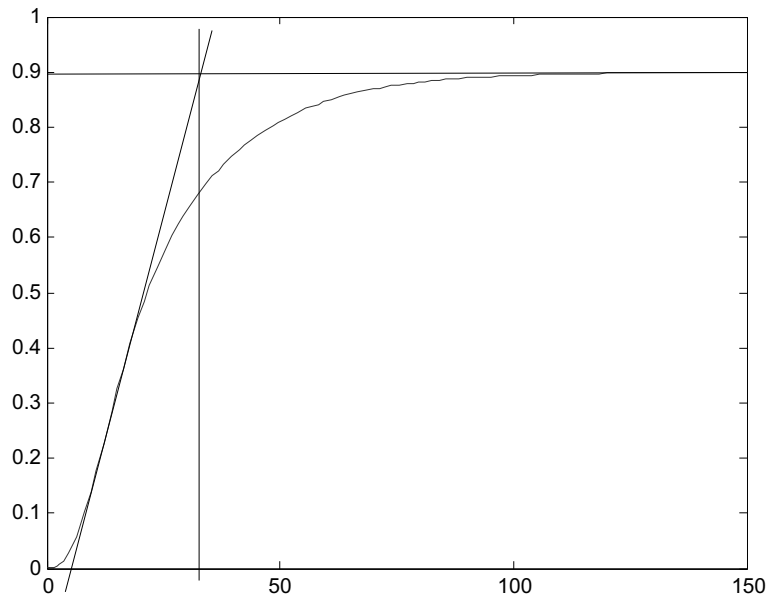
Tabela 5.2: Nastavitvena pravila za sisteme višjega reda

regulator		aperiodični odziv z najkrajšim T_{um}		najkrajši T_{um} z 20% prenihajem	
		motnja	referenca	motnja	referenca
P	K_P	$\frac{0.3 T_{iz}}{K_s T_{za}}$	$\frac{0.3 T_{iz}}{K_s T_{za}}$	$\frac{0.7 T_{iz}}{K_s T_{za}}$	$\frac{0.7 T_{iz}}{K_s T_{za}}$
	T_I	$4 T_{za}$	$1.2 T_{iz}$	$2.3 T_{za}$	T_{iz}

Primer 5.2 Nastavitev regulatorja za proces višjega reda

Slika 5.17 prikazuje izmerjeni odziv na stopnico za neznan proces. Tudi v tem primeru je bil proces je bil vzbujan z enotno stopnico, torej velja $\Delta u = 1$. Ocenimo, da se odziv ustali pri vrednosti 0.9, kar glede na podano vzbujanje pomeni ocenjeno ojačenje $K_s = 0.9$. S pomočjo tangente ocenimo čas zakasnitve in čas izravnave: $T_{za} = 6$, $T_{iz} = 30$.

V tabeli 5.2 izberemo pravilo za 20% prenihaj in izračunamo parametra PI-



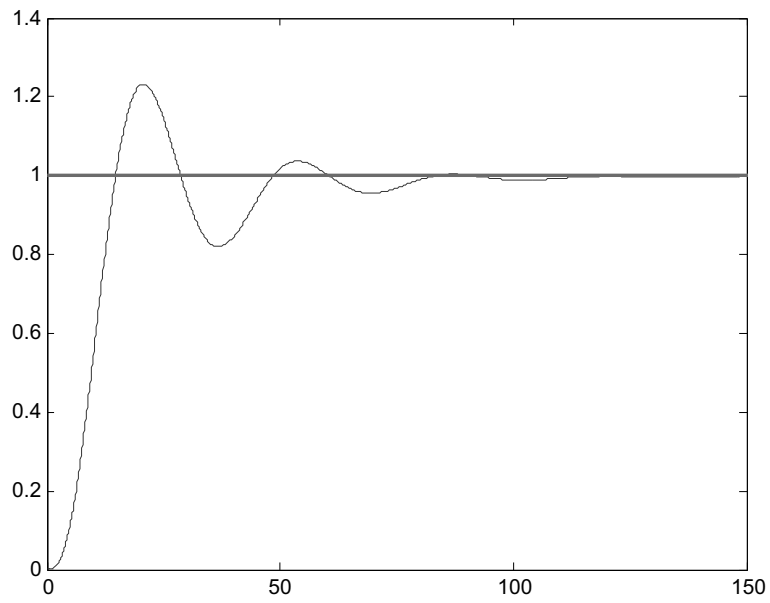
Slika 5.17: Izmerjeni odziv na enotino stopnico

regulatorja:

$$K_P = \frac{0.6T_{iz}}{K_s T_{za}} = \frac{0.6 \cdot 30}{0.9 \cdot 6} \doteq 3.33$$

$$T_I = T_{iz} = 30$$

Simulacijo zaprtozančnega odziva pri referenčnem signalu v obliki enotine stopnice prikazuje slika 5.18. Vidimo, da regulirna veličina zaniha in pri prvem nihaju preseže referenco za nekaj več kot 20%. Čeprav smo izbrali pravilo za 20% prenihaj, seveda ne moremo pričakovati točnega rezultata. Parametre procesa smo namreč ocenili le približno, po drugi strani pa so pravila sestavljena za nek tipični proporcionalni proces, ki ni nujno povsem enak obravnavanemu procesu. Ne glede na to nudijo nastavitvena pravila primerno izhodišče za nastavitvev regulatorja, pogosto pa potem poskusimo odziv še nekoliko izboljšati z majhnimi popravki parametrov. □



Slika 5.18: Odziv zaprtoložnega sistema s PI-regulatorjem