1. Imamo diskretni signal, ki ga predstavlja rotirajoči fazor $\tilde{x}[n] = 5e^{j\pi}e^{j\pi n/4}$ **Skicirajte fazor in potek projekcije signala na realno os za prvih 8 vzorcev.**

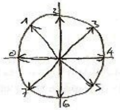
$\tilde{x}[n] = 5e^{j\pi}\cdot e^{j\pi n/4}$

$\tilde{x}[0] = 5e^{j\pi}\cdot e^{j\frac{\pi\cdot 0}{4}} = 5e^{j\pi}$

$\tilde{x}[1] = 5e^{j\pi}\cdot e^{j\frac{\pi\cdot 1}{4}} = 5e^{j\pi + j\frac{\pi}{4}} = 5e^{j\frac{5\pi}{4}}$

$\tilde{x}[2] = 5e^{j\pi}\cdot e^{j\frac{\pi\cdot 2}{4}} = 5e^{j\pi + j\frac{\pi}{2}} = 5e^{j\frac{3\pi}{2}}$

$\tilde{x}[3] = 5\cdot e^{j\pi}\cdot e^{j\frac{\pi 3}{4}} = 5e^{j\pi + j\frac{3\pi}{4}} = 5e^{j\frac{7\pi}{4}}$



3. Imamo filter s prenosno funkcijo $H(z) = \frac{1 - 0.2z^{-1} - 0.08z^{-2}}{1 + 0.5z^{-2}}$ $\to b$, $\to a$

Določite:

• diferenčno enačbo takšnega sistema

$b_0 = 1 \quad b_1 = 0.2 \quad b_2 = 0.08$

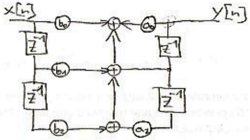
$a_0 = 1 \quad a_2 = 0.5 \quad a_1 = 0$

$\frac{x}{y} \times \frac{a}{b} \Rightarrow x\cdot b = y\cdot a$

$1y(0) + 0.5y(1) = x(0) - 0.2x(1) - 0.08x(2)$

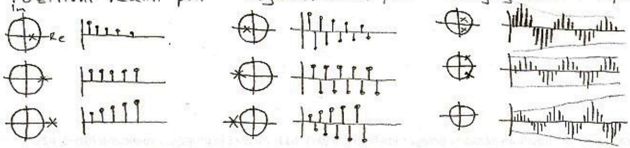
$y[n] = -\sum_{k=1}^{N_a-1} a_k\, y[n-k] + \sum_{l=1}^{N_b-1} b_l\cdot x[n-l]$

• realizacijo v obliki direktne strukture I.



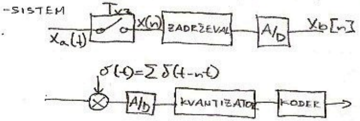
4. Na nekaj značilnih primerih prikažite vpliv lege korenov prenosne funkcije diskretnega sistema z neskončnim odzivom na časovno obnašanje sistema!

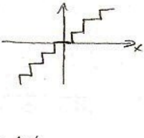
Pozitivni realni poli | Negativni realni poli | Konjugirano kompleksni



5. Kvantizacija signala. Skicirajte sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov. Skicirajte prenosno karakteristiko enoličnega kvantizatorja s konstantnim korakom. Podajte število kvantizacijskih nivojev, korak kvantizatorja Δ in tabelo binarnih simbolov za 3 bitni kvantizator. Kvantizator razpoznava pozitivne in negativne signale, Xmax = 4V.

-SISTEM





011	3
010	2
001	1
000	0
100	-1
101	-2
110	-3
111	-4

korak kvantizatorja: $\Delta = \frac{U_{max}}{2^{b-1}} = \frac{4V}{4} = 1V$

1. Stabilnost kavzalnih, časovno neodvisnih sistemov. Podajte kriterij stabilnosti glede na odziv sistema na impulz enote h[n]. Kakšna je lega korenov (polov in ničel) stabilnih kavzalnih sistemov?

KRITERIJ STABILNOSTI: Kriterij stabilnosti nam predstavlja pogoj, pri katerem je sistem stabilen, samo če je izhodni niz omejen za vsak vhodni niz sistema.

$$|y(n)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(k)\cdot x(n-k)\right|$$

Ničle morajo biti znotraj enotinega kroga.

$$W_N = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{kn} = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

2. Zapišite algoritem diskretne Fourierove transformacije in izračunajte DFT konstantnega signala, $x = [1\ 1\ 1\ 1]^T$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{k \cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$$

$$x = [1, 1, 1, 1]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Izračunajte odziv linearnega časovno neodvisnega sistema z impulznim odzivom h[0] = 1, h[1] = 2, h[2] = -1} na vhodni signal x[0] = 1, x[1] = 2, x[2] = 3, x[3] = 1. Napišite koeficiente filtra b in a ustreznega filtra!

$h[0]=1 \quad x[0]=1$

$h[1]=2 \quad x[1]=2$

$h[2]=-1 \quad x[2]=3$

$x[3]=1$

x(n) \ h(n)	1	2	-1			
1	1	2	-1			
2		2	4	-2		
3			3	6	-3	
1				1	2	-1
	1	4	6	5	-1	-1

odziv filtra: $y[n] = x[n] + 4x(n-1) + 6x(n-2) + 5x(n-3) - x(n-4) - x(n-5)$

4. Skicirajte 4 periode analognega sinusnega signala ter na isti sliki označite vzorce diskretnega signala x(k)=sin(1.75π k), k=0,1,...,4. Na primeru pojasnite teorem o vzorčenju! Podajte frekvenco signala in frekvenco vzorčenja! Ali primer ustreza 2. Nyquistovemu kriteriju?

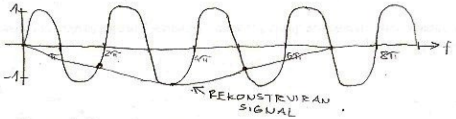
$k(0)=0$

$k(1)=\sin(1.75\pi)$

$k(2)=\sin(3.5\pi)$

$k(3)=\sin(5.25\pi)$

$k(4)=\sin(7\pi)$



Pogoj: $F_{sig} > 2 \cdot f_{vz}$ } Nyquist

$f_{sig} = 2\pi$

$f_{vz} = 1.75\pi$

V našem primeru bi moralo biti $< 0.875\pi$, zato ne ustreza.

1. Imamo filtra s končnim impulznim odzivom, prvega s koeficienti b10=1, b11=2 b12=1 in drugega s koeficienti b20=1, b21=-2 b22=1. Določite odziv zaporedne vezave obeh filtrov na enotin impulz!

$b_{10}=1$

$b_{11}=2$

$b_{12}=1$

$b_{20}=1$

$b_{21}=-2$

$b_{22}=1$

$1 \to X_1(n) \to \boxed{H_1} \to \boxed{H_2} \to Y_1(t)$

$b_{10}\ b_{11}\ b_{12} \qquad b_{20}\ b_{21}\ b_{22}$

	1	-2	1		
1	1	-2	1		
2		2	-4	2	
1			1	-2	1
y(t)	1	0	-2	0	1

2. Podajte izraz za izračun diskretne Fourierove transformacije. Izračunajte DFT signala x=[-1 0 1 0]. Narišite amplitudni in fazni potek izračunanega spektra!

IZRAZ: $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \cdot W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi k n}{N}}$

$x = [-1\ 0\ 1\ 0]$

$X[0] = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$ (n=0, n=1, n=2, n=3)

$X[1] = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-j) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot j = -2$

$X[2] = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) = 0$

$X[3] = -1 \cdot 1 + 0 \cdot j + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-j) = -2$

n=0	n=1	n=2	n=3
1	1	1	1
1	-j	-1	j
1	-1	1	-1
1	+j	-1	-j

AMP. POTEK

FAZNI POTEK

3. Določite in narišite lego polov in ničel ter na sliki označite področje konvergence funkcije $x(n) = (-\frac{1}{2})^n \mu(n)$

$$x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \mu(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})z^{-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2z}} =$$

POL $\Rightarrow |z| > |\frac{1}{2}|$

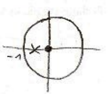
$$x(n) = a^n \cdot \mu(n) = \frac{1 \rightarrow \text{ničle}}{1-a\cdot z^{-1} \rightarrow \text{poli}} \qquad = \frac{2z}{2z+1}$$

POL: $|z| > |a|$

ničle: $2z = 0$

poli: $2z+1 = 0$

$z = -\frac{1}{2}$



5. Hitri Fourierov transform;

a. podajte algoritem za decimacijo po frekvenci

b. skicirajte potek za N=4!

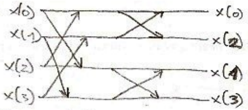
c. Pojasnite, zakaj z algoritmom FFT računamo hitreje kot neposredno po izrazu, ki definira DFT.

a) $$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn}$$

$g(n) = x(n) + x(n+\frac{N}{2})$ SODE

$h(n) = x(n) + x(n+\frac{N}{2})$ LIHE

b)



c) S FFT hitreje računamo, ko X(k) razdelimo na manjše nize, zato lahko hitreje pridemo do rešitve.

1. Imamo sistem s prenosno funkcijo $H(z) = \frac{[z-j][z+j]}{[z-0.9j][z+0.9j]}$

a. Določite koeficiente *a* in *b* pričujočega sistema.

b. Narišite strukturo sistema v obliki Direktne strukture I

c. Frekvenca vzorčenja znaša 200Hz. Ocenite amplitudni odziv sistema. Kako imenujemo takšen sistem in kolikšna je njegova značilna frekvenca?

a) $$H(z) = \frac{[z-j][z+j]}{[z-0.9j][z+0.9j]} =$$

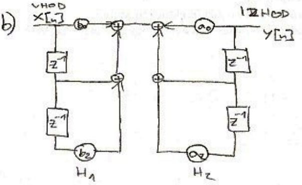
$$= \frac{z^2+1}{z^2+0.81} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{1+z^{-2} \rightarrow b}{1+0.81z^{-2} \rightarrow a}$$

$b_0 = 1 \quad b_1 = 0 \quad b_2 = 1$

$a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0.81$

poli: $-0.9j$, $0.9j$ ničle: $+j$, $-j$

b)



2. Vzorčenje in rekonstrukcija signalov.

a. Podajte matematično funkcijo, s katero ponazorimo postopek vzorčenja.

b. Pojasnite vpliv vzorčenja na spekter signala (skica).

c. Podajte kriterij za izbiro vzorčne frekvence.

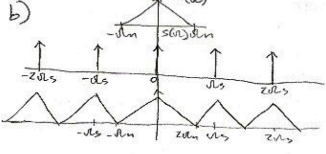
d. Kakšen je matematični postopek za rekonstrukcijo vzorčenih signalov (podajte rešitev v frekvenčnem ter v časovnem prostoru)?

a) $$x_{vz}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT] \cdot \delta(t-nT)$$

c) $f_{sig} > 2 f_{vz}$

$$f_{vz} < \frac{f_{sig}}{2}$$

b)



SE NE SMETA PREKRIVAT

d) nizkopasovni idealni filter s funkcijo

$$X_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi(t-nT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-nT)}{T}}$$

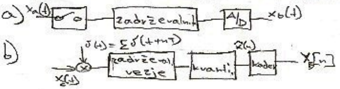
3. Imamo sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov s 3 bitnim kvantizatorjem. Kvantizator razpoznava samo pozitivne in negativne signale z maksimalno vrednostjo Umax=4 V.

a. Skicirajte sistem za analogno/digitalno pretvorbo signalov.

b. Skicirajte prenosno karakteristiko enoličnega kvantizatorja s konstantnim korakom, ki ustreza navedeni specifikaciji.

c. Podajte število kvantizacijskih nivojev, korak kvantizatorja Δ in tabelo binarnih simbolov.

a)



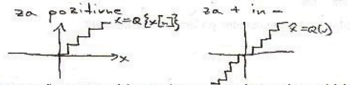
c) korak Δ

$$\Delta=\frac{U_{max}}{2^{b-1}}=\frac{4V}{2^{3-1}}=1V$$

število kv. nivojev

$$N=2^b=2^3=8$$

000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7



011	3
010	2
001	1
000	0
111	−1
110	−2
101	−3
100	−4

5. Določite odziv linearnega časovno neodvisnega sistema z impulznim odzivom h(n) = {1,2,1,-1} na vhodni signal x(n) = {1,2,3,1}.

x(n) \ h(n)	1	2	1	−1			
1	1	2	1	−1			
2		2	4	2	−2		
3			3	6	3	−3	
1				1	2	1	−1
	1	4	8	8	3	−2	−1

$$y(n)=x(n)+4x(n-1)+8x(n-2)+8x(n-3)+$$
$$+3x(n-4)-2x(n-5)-x(n-6)$$

1. Imamo sistem s prenosno funkcijo $H(e^{j\omega})=\frac{[1-e^{-j(\omega-\omega_0)}][1-e^{-j(\omega+\omega_0)}]}{[1-0.9e^{-j(\omega-\omega_0)}][1-0.9e^{-j(\omega+\omega_0)}]}$

Normirana mejna frekvenca sistema je enaka $\omega_0=\pi/4$

a. Podajte prenosno funkcijo v prostoru Z.

b. Določite koeficiente *a* in *b*.

c. Narišite strukturo sistema v obliki Direktne strukture I

d. Ocenite amplitudni odziv sistema. Kako imenujemo takšen sistem?

a) $H(e^{j\omega})\Rightarrow z$ transf.

$$H(z)=\frac{(1-z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})\cdot(1-0.9\cdot z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})}{(1-0.9\cdot z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})(1-0.9\cdot z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}})}=$$

$$=\frac{1-z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}-z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}+z^{-2}}{1-0.9\cdot z^{-1}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}-0.9\cdot z^{-1}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}+0.81z^{-2}}=$$

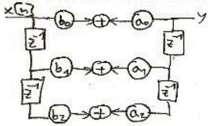
$$=\frac{1-z^{-1}(e^{j\frac{\pi}{4}}-e^{-j\frac{\pi}{4}})+z^{-2}}{1-0.9z^{-1}(e^{-j\frac{\pi}{4}}-e^{j\frac{\pi}{4}})+0.81\cdot z^{-2}}=\frac{1-z^{-1}\cdot\cos\frac{\pi}{4}+z^{-2}\ \boxed{\Rightarrow b}}{1-0.9\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot z^{-1}+0.81z^{-2}\ \boxed{\Rightarrow a}}$$

b) koeficienti:

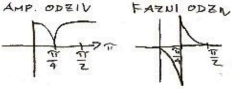
$b_0=1\quad b_1=\cos\frac{\pi}{4}\quad b_2=1$

$a_0=1\quad a_1=-0.9\cdot\cos\frac{\pi}{4}\quad a_2=0.81$

c)



d)



ničle = 1
poli < 0 } filter z zarezo

4. Napišite vse, kar veste o povezavi prostora Z in Fourierove transformacije!

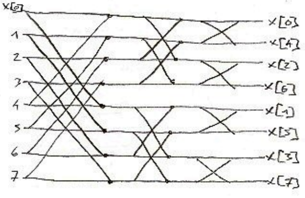
$$FT:\ X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\cdot e^{-j\omega n}$$

$$Z:\ X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\cdot z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\cdot r^{-n}\cdot e^{-j\omega n}$$

FOURIEROVA TRANSFORMACIJA JE PRI $r=1$ ENAKA TRANSFORM. Z.

$$r=1\Rightarrow F=Z$$

5. Grafično predstavite algoritem za hiter izračun diskretne Fourierove transformacije z decimacijo po času za 8 vzorcev. Pojasnite, zakaj je algoritem FFT hitrejši od uporabe osnovnega izraza za DFT!



FFT je hitrejši, zato ker osnovno računanje DFT razstavimo na manjše nize dolžine N in manjše DFT. Ločimo transformacijo po času in frekvenci. Ti algoritmi izkoriščajo PERIODIČNOST in SIMETRIČNOST.