Vaja 2

Ime in priimek:______________________

Diferenčne enačbe v digitalni obdelavi signalov

V digitalni obdelavi signalov imajo posebno vrednost sistemi, ki jih lahko zapišemo v obliki linearnih diferenčnih enačb s konstantnimi koeficienti. Takšne sisteme lahko uporabljamo kot model realnih sistemov, še posebej pogosto pa kot orodje za obdelavo signalov. V tem primeru jih poimenjujemo z izrazom digitalni filtri.

V današnji vaji boste spoznali značilnosti tovrstnih sistemov v časovnem in v frekvenčnem prostoru.

2.1 Diferenčna enačba in njen časovni odziv

V nalogi boste oblikovali časovni odziv filtra z **neskončnim impulznim odzivom**, ki ga predstavlja naslednja linearna diferenčna enačba s konstantnimi koeficienti:

$$\sum_{k=0}^{N_a} a_k\, y[n-k] = \sum_{l=0}^{N_b} b_l\, x[n-l] \tag{2.1}$$

V MATLAB-u diferenčne enačbe predstavimo z dvema vektorjema; prvi predstavlja koeficiente b_l, ki ustrezajo elementom x, drugi pa koeficiente povratne vezave, a_k, soležne elementom y. Običajno oblikujemo diferenčno enačbo tako, da je koeficient a_0 enak 1, tako, da ga v izpeljavi izhodnega signala

$$y[n] = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{N_a} a_k\, y[n-k] + \frac{1}{a_0}\sum_{l=0}^{N_b} b_l\, x[n-l] \tag{2.2}$$

ni potrebno upoštevati. Še napotek za uporabo filtrov v MATLAB-u: iz zgornje enačbe je razvidno, da a_0 nikoli ne sme biti enak 0, saj sicer po preureditvi izraza izgine rezultat!

MATLAB-ova funkcija `y = filter(b,a,x)` predstavlja digitalno filtriranje signala x, kot ga definirata vektorja koeficientov a in b diferenčne enačbe 2.1. Če je x enotin impulz, bo rezultat y predstavljal impulzni odziv sita, $h[n]$. Pozor: funkcija $filter$ vrne le toliko vzorcev y, kot jih je v vhodnem vektorju x. Zato je impulzni odziv (načelno je neskončen!) "odrezan" na dolžino vhodnega vektorja x.

Naloga 1 Tvorite vektorja `b` in `a`, ki, glede na enačbo 2.1 vsebujeta ustrezne koeficiente sita, ki ga predstavlja naslednja diferenčna enačba:

$$y[n] + 0.9y[n-2] = 0.3x[n] + 0.6x[n-1] + 0.3x[n-2] \tag{2.3}$$

`a = [____________________________];`

`b = [____________________________];`

Dopolnite definicijo diskretnega impulza enote!

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \underline{\qquad\qquad} \\ 0, & \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

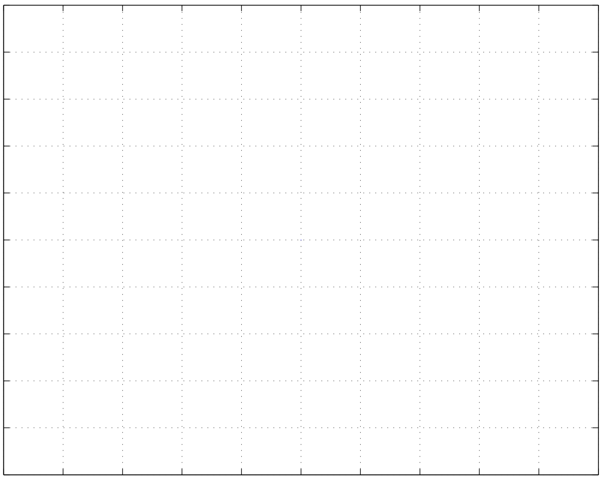
Oblikujte vektor impulza enote, `imp`, dolžine 128. Spodaj vpišite ukaz(e) v Matlabu, s pomočjo katerega(ih) ste to naredili (namig: Matlab pozna Boolove operatorje in jih izvaja tudi na vektorjih).

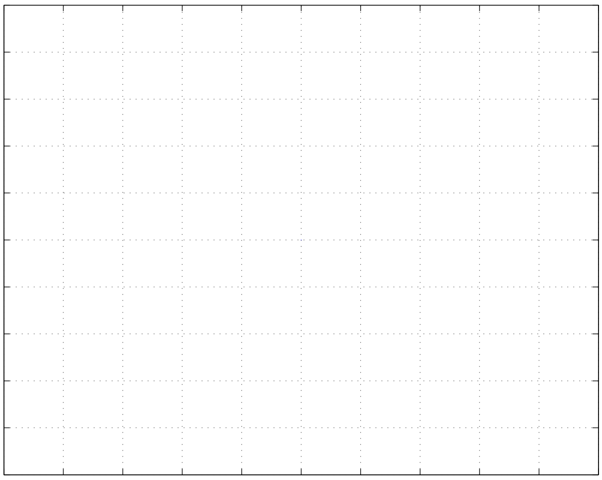
`imp = ____________________________;`

S pomočjo ukazov iz uvoda izračunajte impulzni odziv sita, ki ga podaja enačba 2.3. Upoštevajte seveda vhodni signal `imp`.

`y = ____________________________;`

Z uporabo funkcije `stem` narišite impulz (levo) in impulzni odziv (desno) sistema v diskretnem prostoru!





Podrobnosti bodo bolje vidne, če boste narisali le prvih 20 točk signala! Verificirajte rezultat!

Naloga 2 Imamo naslednje diferenčne enačbe:

$$y_1[n] - 1.8\cos(\frac{\pi}{16})y_1[n-1] + 0.81y_1[n-2] = x_1[n] + \frac{1}{2}x_1[n-1] \tag{2.4}$$

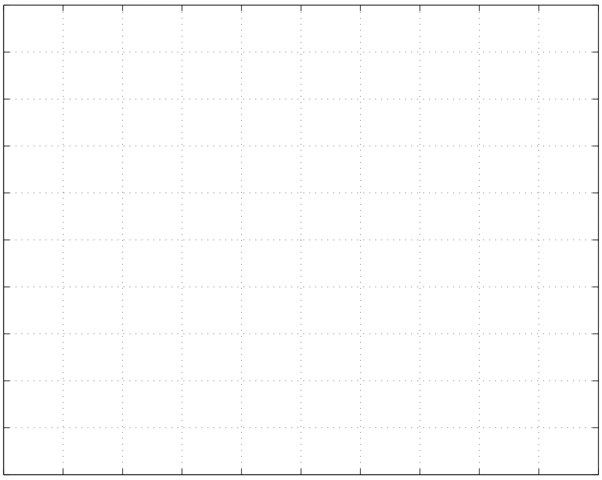
$$y_2[n] - 1.92\cos(\frac{\pi}{8})y_2[n-1] + 0.9216y_2[n-2] = x_2[n] + \frac{1}{2}x_2[n-1] \tag{2.5}$$

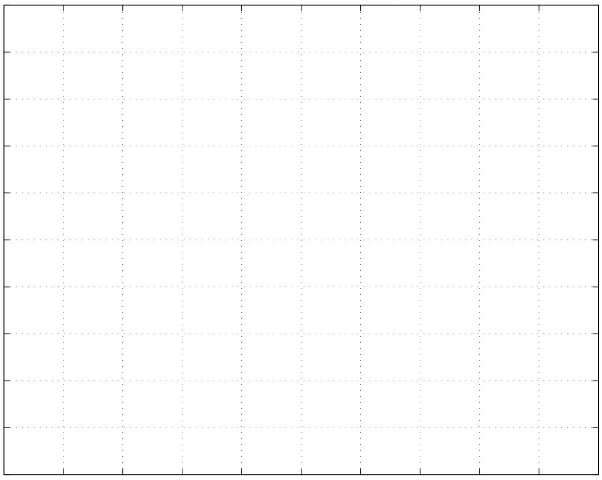
$$y_3[n] - 2\cos(\frac{\pi}{8})y_3[n-1] + y_3[n-2] = x_3[n] + \frac{1}{2}x_3[n-1] \tag{2.6}$$

$$y_4[n] - 2.2\cos(\frac{\pi}{8})y_4[n-1] + 1.21y_4[n-2] = x_4[n] + \frac{1}{2}x_4[n-1] \tag{2.7}$$

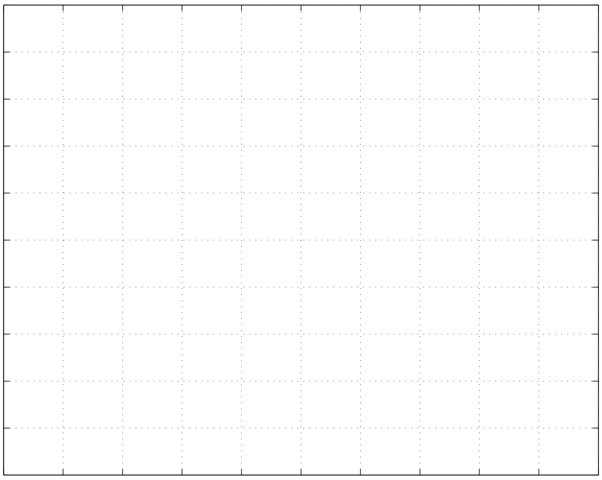
Izračunajte odzive sistemov $h_1[n]$, $h_2[n]$, $h_3[n]$ in $h_4[n]$, ki jih podajajo enačbe 2.4 - 2.7, na impulz enote v območju $-4 \leq n \leq 92$!

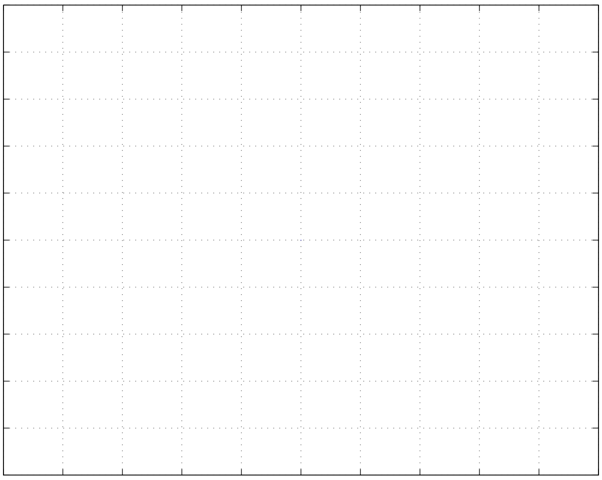
Signal $h_1[n]$ (levo) in $h_2[n]$ (desno):





Signal $h_3[n]$ (levo) in $h_4[n]$ (desno):





Naloga 3 Vemo, da je impulzni odziv diferenčne enačbe sestavljen iz naravnih frekvenc. Naravne frekvence določajo povratnozančni koeficienti a_k. Vsak koren (p_k^n) značilnega polinoma $A(z) = 1 + \sum_{k=1}^{N_a} a_k\, z^{-k}$ vzbuja izhodni signal oblike $p_k^n u[n]$, kjer je $u[n]$ diskretna stopnica enote. Poiščite korene – pole (poles) in ničle (zeros) značilnega polinoma diferenčnih enačb 2.4 – 2.7(pomagajte si z ukazom za iskanje korenov `roots`)!

$p_1 =$ ____________________ $p_3 =$ ____________________

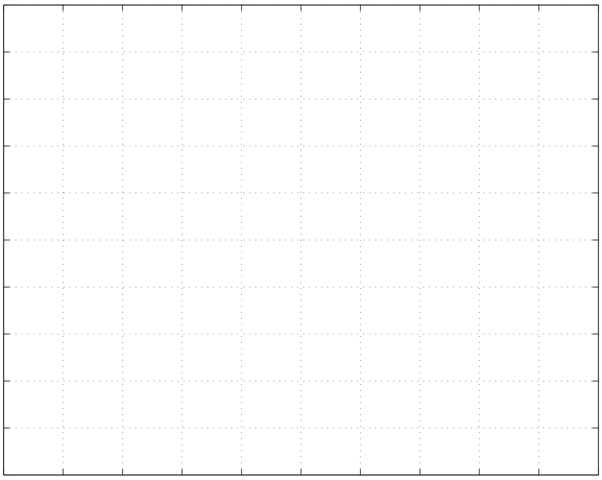
$z_1 =$ ____________________ $z_3 =$ ____________________

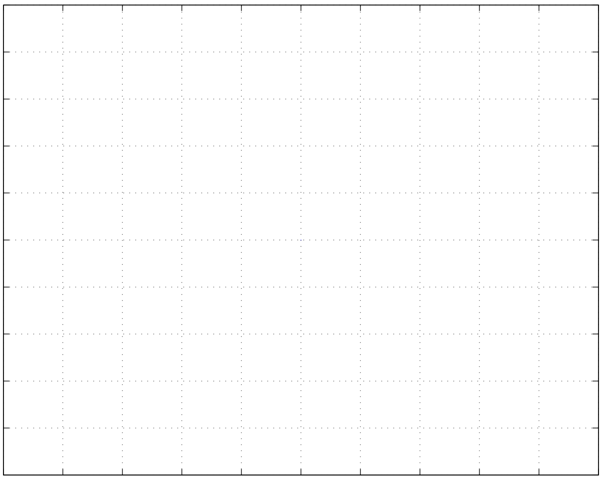
$p_2 =$ ____________________ $p_4 =$ ____________________

$z_2 =$ ____________________ $z_4 =$ ____________________

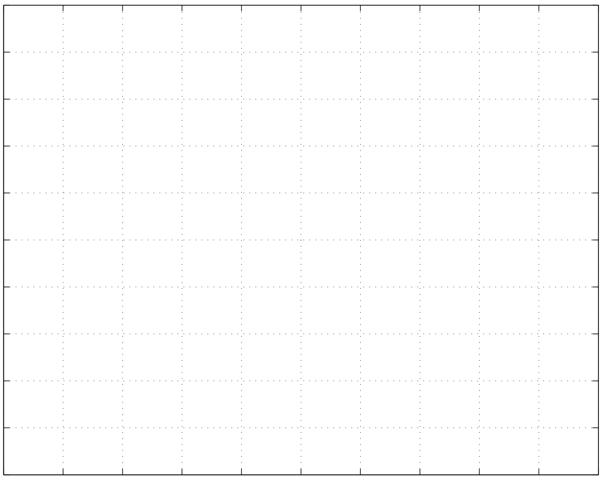
Če so koreni kompleksni, je naravni frekvenčni odziv sistema kompleksna eksponentna funkcija. Narišite signale $\sum_{k=1}^{2} p_k^n\, u[n]$ za vse štiri diferenčne enačbe, kot tudi lego korenov v kompleksni ravnini (`zplane`)!

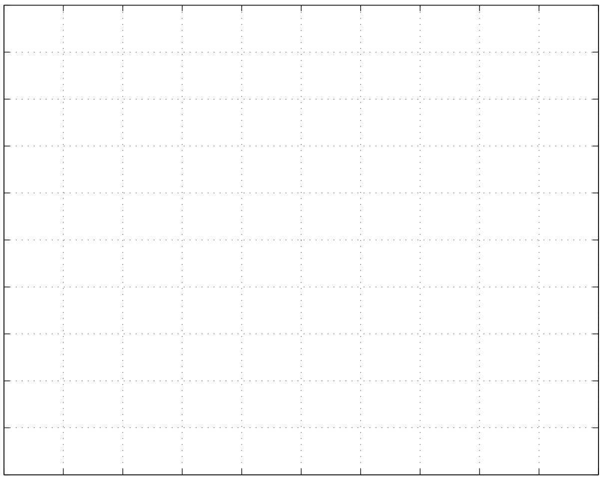
Naravno nihanje sistema 2.4(levo) in sistema 2.5 (desno):



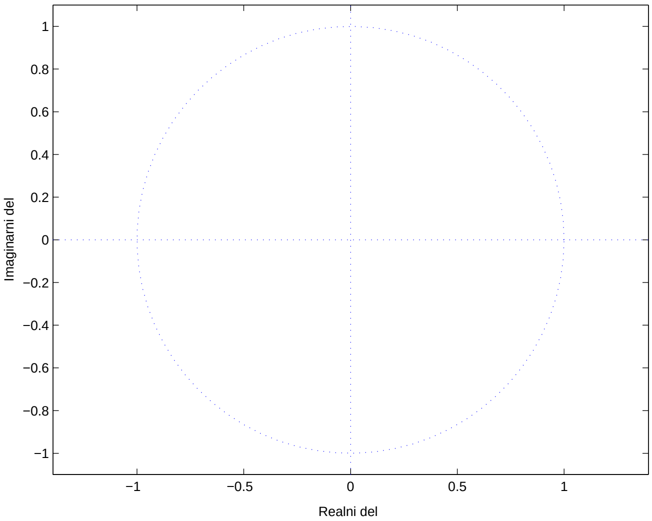


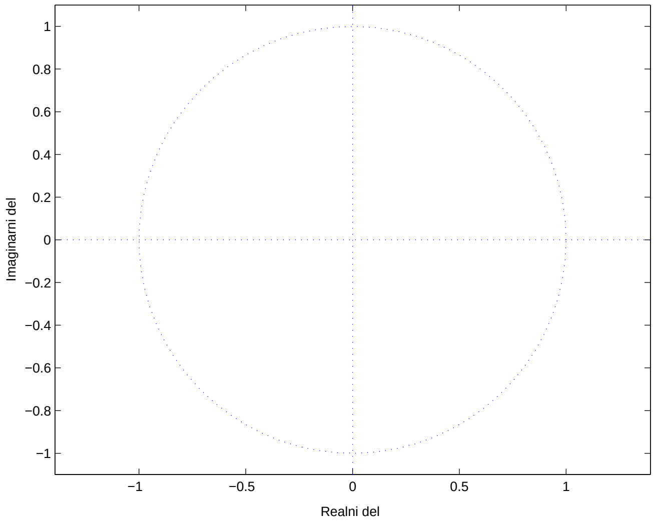
Naravno nihanje sistema 2.6(levo) in sistema 2.7 (desno):



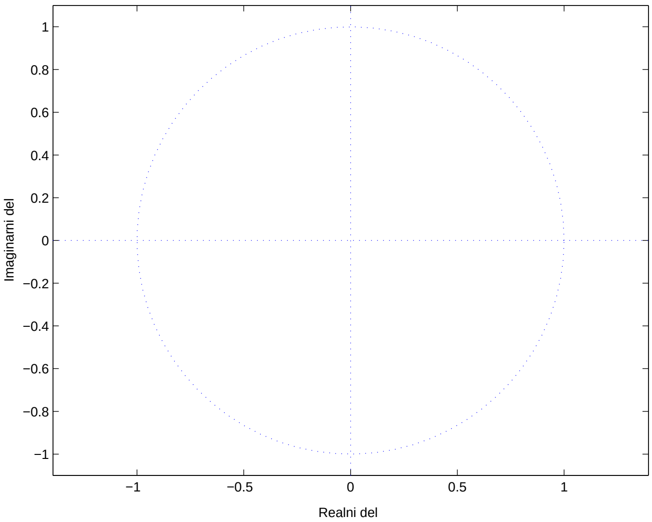


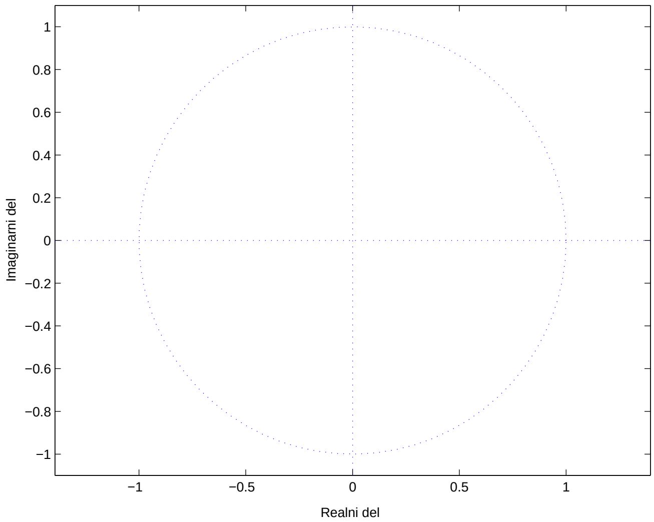
Koreni sistema 2.4 (levo) in sistema 2.5 (desno) v kompleksni ravnini:





Koreni sistema 2.6 (levo) in sistema 2.7 (desno) v kompleksni ravnini:





Primerjajte rezultate z odzivi sistema iz naloge 2! Kako lega korenov značilnega polinoma vpliva na odziv sistema?