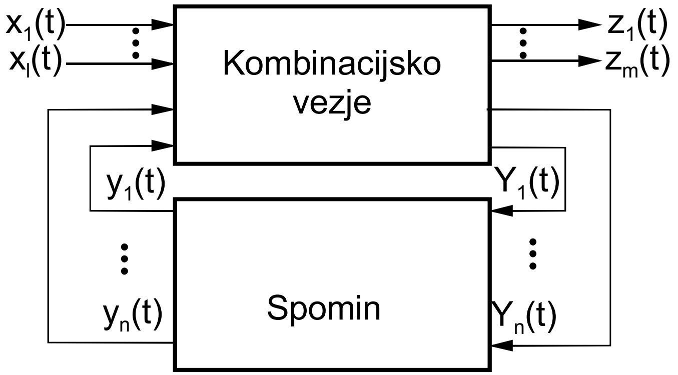
7. KONČNI SEKVENČNI AVTOMATI

7. 1 Osnovne karakteristike



$x_1(t)$, $x_2(t)$,...$x_l(t)$ - vhodne spremenljivke

$y_1(t)$, $y_2(t)$,...,$y_n(t)$ - spremenljivke stanja (sekundarne vhodne spremenljivke)

$Y_1(t)$, $Y_2(t)$...,$Y_n(t)$ - spremenljivke naslednjega stanja (vzbujalne spremenljivke)

$z_1(t)$, $z_2(t)$,...,z_m - izhodne spremenljivke

$$z_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), ..., x_l(t))$$

$$z_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), ..., x_l(t))$$

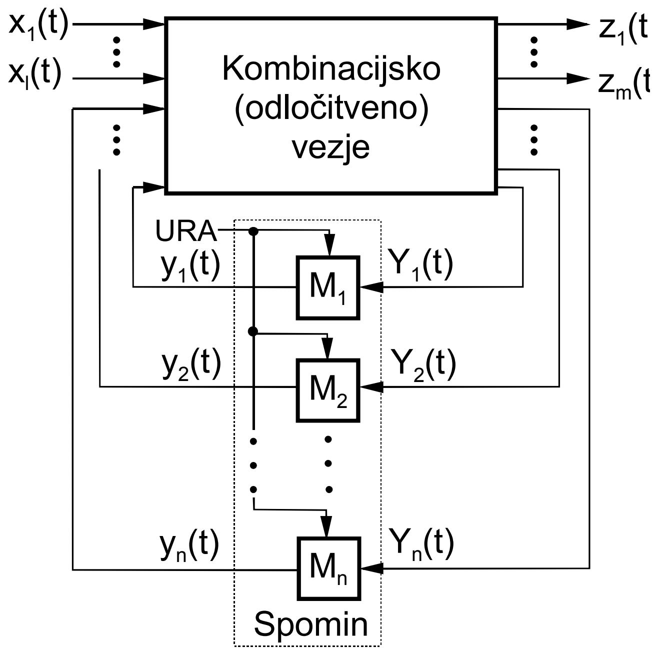
....

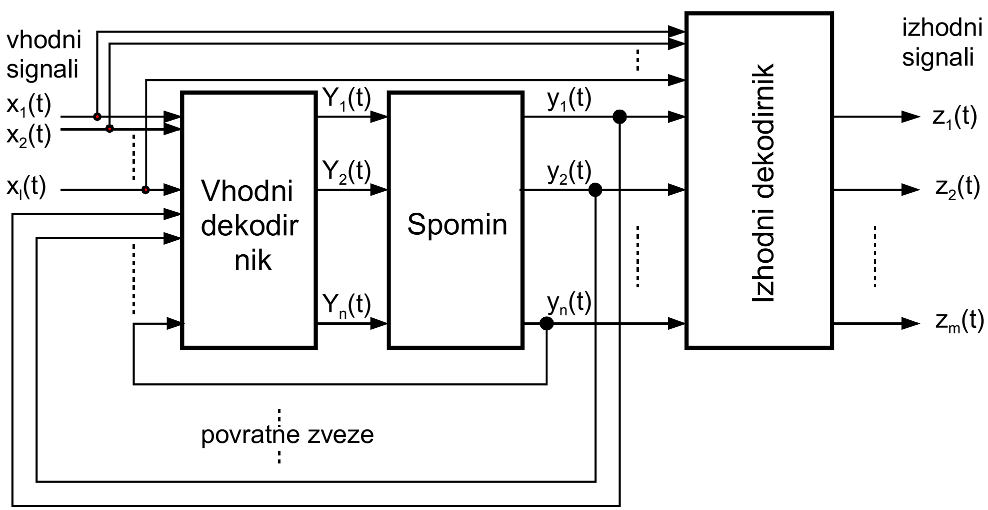
$$z_m(t) = f_m(x_1(t), x_2(t), ..., x_l(t))$$

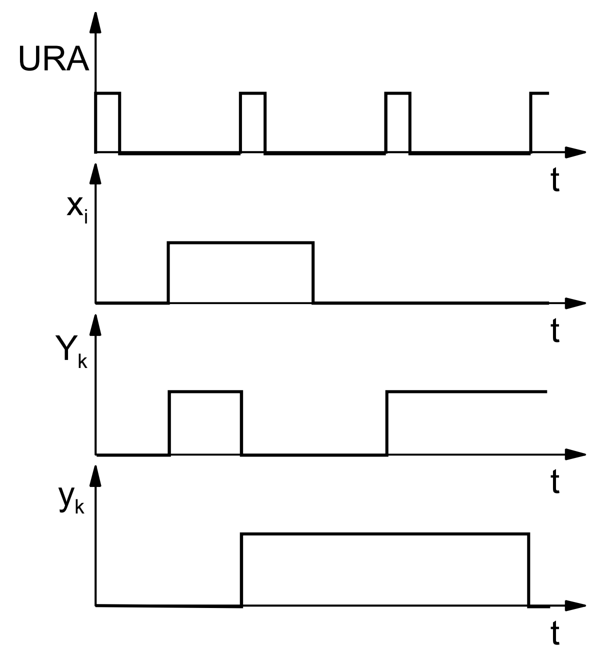
$$z_j(t) = f_j(x_1(t), x_2(t), ..., x_l(t), y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)),\ j = 1,2,...,m$$

$$Y_k(t) = f_k(x_1(t), x_2(t), ..., x_l(t), y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)),\ k = 1,2,...,n$$

7. 2 Sinhronski končni avtomati



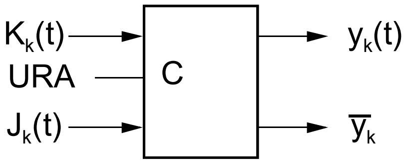




7. 2. 1 Vrste spomina.

$$J_k(t) = f_{J_k}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_l(t), y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t));$$

$$K_k(t) = f_{K_k}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_l(t), y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)); \quad j=1,2,\ldots,n$$



$$\Delta^1 y_k = \bar{K}_k y_k + J_k \bar{y}_k \qquad y_k(t+\Delta t) = \bar{K}_k(t) y_k(t) + J_k(t) \bar{y}_k(t)$$

$$\Delta^1 y_k = Y_k \qquad y_k(t+\Delta t) = Y_k(t)$$

7. 2. 2 Definicija vhodov, stanj in izhodov končnega avtomata

x= $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_l)$;

$x_i = 0,1$

$p = 2^l$ – število možnih vhodnih črk ali stanj

X = ***(x$_1$,x$_2$,...,x$_p$)***; - <u>vhodna abeceda avtomata</u>

z= $(z_1, z_2, \ldots, z_j, \ldots, z_m)$

$q = 2^m$ – število možnih izhodnih črk ali stanj

***Z* = (z$_1$,z$_2$,...,z$_q$)**; - <u>izhodna abeceda avtomata</u>

s≡y = $(y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots, y_n)$

$r = 2^n$ število možnih notranjih črk ali stanj

***S* = (s$_1$,s$_2$,...,s$_r$)** ; - <u>notranja abeceda avtomata</u>

7. 2. 3 Deterministični končni avtomat

Definicija:

$\boldsymbol{A} = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{Z}, \delta, \lambda \rangle$

$\Delta^1 \mathbf{s} = \delta[\mathbf{s}, \mathbf{x}]; \quad \mathbf{z} = \lambda[\mathbf{s}, \mathbf{x}]$

δ, λ

δ: $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{S} \rightarrow \boldsymbol{S}$

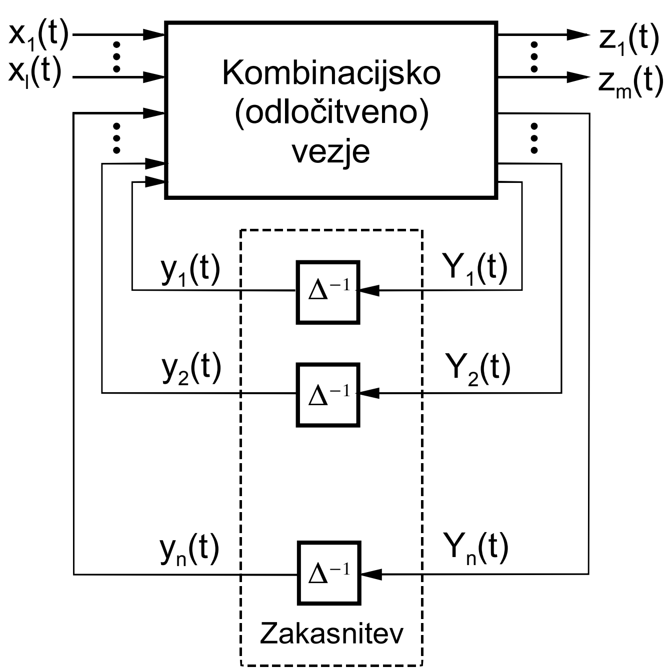
λ: $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{S} \rightarrow \boldsymbol{Z}$ pri Mealyjevem avtomatu

λ: $\boldsymbol{S} \rightarrow \boldsymbol{Z}$ pri Mooreovem avtomatu

$\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{S}$ - kartezični produkt $(\mathbf{x}_i \mathbf{s}_j)$

δ: $(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j) \rightarrow \mathbf{s}_k \in \boldsymbol{S}$

7. 3. Asinhronski končni avtomati

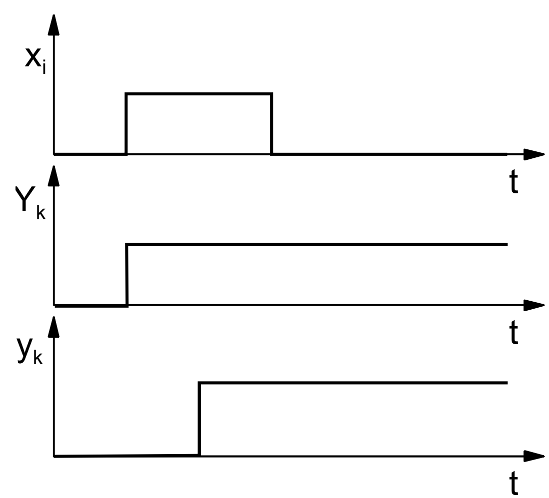


x= $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_i(t), \ldots, x_l(t))$ – vhodno stanje avtomata

y = $(y_1(t), y_2(t), \ldots y_k(t), \ldots, y_n(t))$ – notranje stanje avtomata

z= $(z_1(t), z_2(t), \ldots, z_j(t), \ldots, z_m(t))$ – izhodno stanje avtomata

$y_k(t+\Delta t) = Y_k(t)$; $k = 1, 2, \ldots, n$



7. 4 Jezikovni opis avtomata

Standardna formalna jezika avtomata:

- tabela prehajanja stanj
- diagram prehajanja stanj

7. 4. 1 Tabela prehajanja stanj

Tabela prehajanja stanj: "p" stolpcev - po enega za vsako vhodno stanje in "r" vrstic za "r" mogočih sedanjih stanj avtomata

Pari ($\mathbf{x}_i$,$\mathbf{s}_k$) - specificirajo izhod oziroma naslednje stanje, v katerega bo prešel avtomat.

$l = \log_2 p$

$n = \log_2 r$

S	***Δ¹S, Z***	
	$\mathbf{x}_1 = 0$	$\mathbf{x}_2 = 1$
$\mathbf{s}_1$	$\mathbf{s}_1$, 0	$\mathbf{s}_2$, 0
$\mathbf{s}_2$	$\mathbf{s}_1$, 0	$\mathbf{s}_3$, 0
$\mathbf{s}_3$	$\mathbf{s}_1$, 1	$\mathbf{s}_4$, 0
$\mathbf{s}_4$	$\mathbf{s}_4$, 0	$\mathbf{s}_4$, 0

Končno stanje končnega avtomata

Začetno stanje končnega avtomata

Povezanost avtomata: če za vsak par ($\mathbf{s}_i$, $\mathbf{s}_j$) obstoja vhodna sekvenca, ki prevede $\mathbf{s}_i \rightarrow \mathbf{s}_j$ je avtomat strogo povezan.

Specificirana in nespecificirana stanja

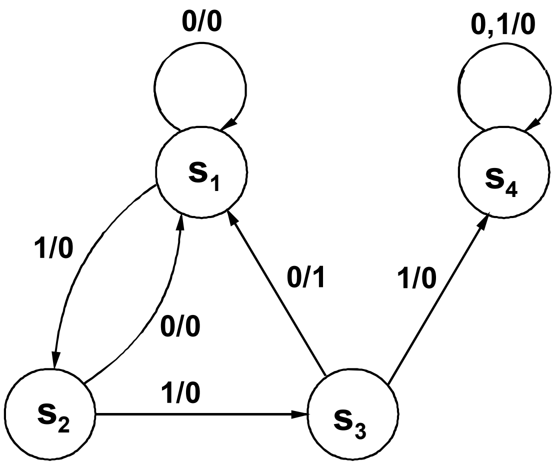
7. 4. 2 Diagram prehajanja stanj

G = (VO, VE)

$vo_i \in VO$; i = 1, 2,...,r - število vozlišč

Iz vsakega vozlišča izhaja "p" vej

$ve_i \in VE$; i = 1, 2, ...,p - število možnih vej



7. 5 Mealyjev avtomat

$\boldsymbol{A_{ME}} = \langle \boldsymbol{X, S, Z,} \delta, \lambda \rangle$

δ: $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{S}$

λ: $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Z}$

Enačba stanj in izhodna enačba:

$\Delta^1\mathbf{s} = \delta(\mathbf{s}, \mathbf{x})$; $\mathbf{z} = \lambda(\mathbf{s}, \mathbf{x})$

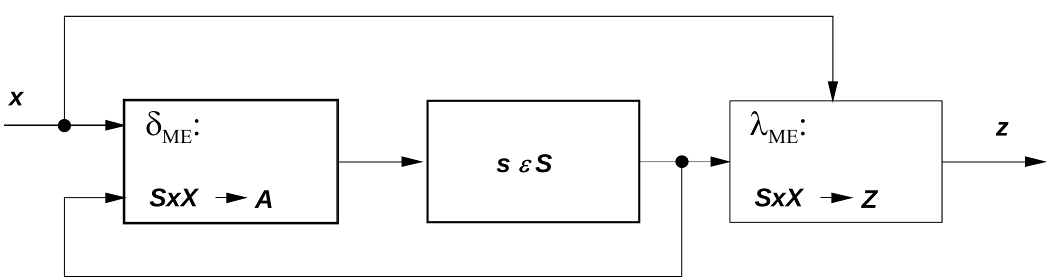
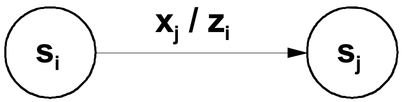


Tabela prehajanja stanj:

A_{ME}	s_1	s_2	s_3	....	s_r
x_1					
x_2					
x_3					
..		Nasl. stanje: s_i/z_i izh. č.			
x_p					

Diagram prehajanja stanj: 

7. 6 Mooreov končni avtomat

$A_{MO} = \langle X, S, Z, \delta, \lambda \rangle$

$\delta: S \times X \rightarrow S$

$\lambda: S \rightarrow Z$

$\Delta^1 s = \delta(s, x) \qquad z = \lambda(s)$

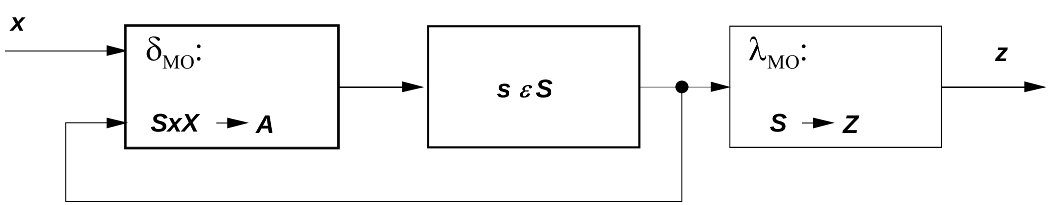
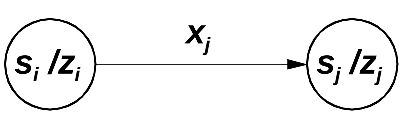


Tabela prehajanja stanj:

A_{MO}	s_1/z_1	s_2/z_2	s_3/z_3	....	s_r/z_r
x_1					
x_2					
..		Naslednje stanje: s_i			
x_p					

Diagram prehajanja stanj: 

7. 7. Načini podajanja končnih avtomatov

7. 7. 1 Mealyjev avtomat

$X = \{x_1, x_2\}$ $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$

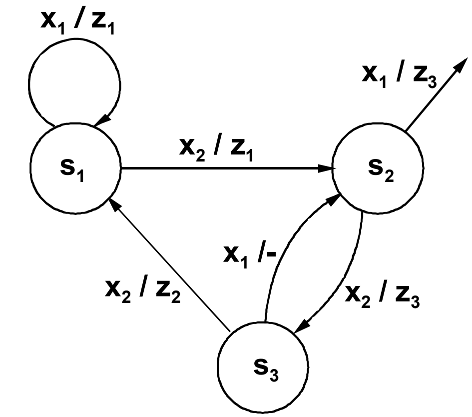
$\delta_1 = \{(s_1, s_1); (s_3, s_2)\}$

$\delta_2 = \{(s_1, s_2); (s_2, s_3); (s_3, s_1)\}$

$\lambda_1 = \{(s_1, z_1); (s_2, z_3)\}$

$\lambda_2 = \{(s_1, z_1); (s_2, z_3); (s_3, z_2)\}$

A_{ME}	s_1	s_2	s_3
x_1	s_1/z_1	$-/z_3$	$s_2/-$
x_2	s_2/z_1	s_3/z_3	s_1/z_2



7.7.2 Mooreov končni avtomat

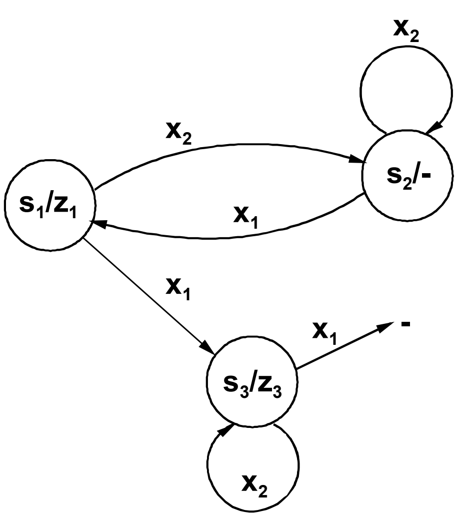
$X = \{x_1, x_2\}$ $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$

$\delta_1 = \{(s_1, s_3); (s_2, s_1)\}$

$\delta_2 = \{(s_1, s_2); (s_2, s_2); (s_3, s_3)\}$

$\lambda = \{(s_1, z_1); (s_3, z_3)\}$

A_{MO}	s_1/z_1	$s_2/-$	s_3/z_3
x_1	s_3	s_1	-
x_2	s_2	s_2	s_3



7. 8 Ekvivalentnost stanj in minimizacija spomina

Stanji $\mathbf{s_i}$ in $\mathbf{s_j}$ avtomata ***P*** sta ekvivalentni samo tedaj, kadar da avtomat za vse možne vhodne sekvence enake izhodne sekvence ne glede na to katero stanje je začetno $\mathbf{s_i}$ ali $\mathbf{s_j}$.

<u>Definicija</u> 1:

Naj bosta ***P*** in ***Q*** dva popolnoma določena avtomata, ki dobivata isto množico možnih vhodnih sekvenc poljubne dolžine.

Naj bo $\mathbf{x_1,x_2,...,x_l}$ omenjena poljubno dolga sekvenca vseh možnih vrednosti vhodne množice.

Stanji $\mathbf{p}\in \boldsymbol{P}$ in $\mathbf{q}\in \boldsymbol{Q}$ sta ekvivalentni samo tedaj, kadar je za katerokoli vhodno sekvenco izpolnjen pogoj:

$$\lambda_P(\mathbf{p}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_l) = \lambda_Q(\mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\mathbf{x}_l)$$

$$(\mathbf{p} \equiv \mathbf{q})$$

P	$\Delta^1 p$	z
	x=0	x=1
p_1	p_3,1	p_2,0
p_2	p_1,0	p_2,1
p_3	$p_1$1	$p_2$0

Q	$\Delta^1 q$	z
	x=0	x=1
q_1	q_1,1	q_2,0
q_2	q_1,0	q_2,1

Avtomat ***P***: začetno stanje $\mathbf{p_1}$, vhodna sekvenca 00110

vhod: 0 0 1 1 0

stanje: $\mathbf{p_1\ p_3\ p_1\ p_2\ p_2\ p_1}$

izhod: 1 1 0 1 0

Avtomat ***Q***: začetno stanje $\mathbf{q_1}$, vhodna sekvenca 00110

vhod: 0 0 1 1 0

stanje: $\mathbf{q_1\ q_1\ q_1\ q_2\ q_2\ q_1}$

izhod: 1 1 0 1 0

Ista vhodna sekvenca, začetni stanji pa enkrat $\mathbf{p_1}$ drugič pa $\mathbf{p_3}$

vhod: 0 0 1 1 0

stanje: $\mathbf{p_1\ p_3\ p_1\ p_2\ p_2\ p_1}$

izhod: 1 1 0 1 0

Stanji $\mathbf{p_1}$ in $\mathbf{p_3}$ sta ekvivalentni

vhod: 0 0 1 1 0

stanje: $\mathbf{p_3\ p_1\ p_3\ p_2\ p_2\ p_1}$

izhod: 1 1 0 1 0

Ekvivalentni pa sta tudi stanji $\mathbf{q_1}$ in $\mathbf{p_1}$

Definicija 2:

Dva digitalna avtomata ***P*** in ***Q*** sta ekvivalentna $P \equiv Q$, če obstoja za vsako stanje **p** v avtomatu ***P*** stanje **q** v avtomatu ***Q*** tako, da velja $\mathbf{p} \equiv \mathbf{q}$ in obratno, za vsako stanje **q** v avtomatu ***Q*** obstoja stanje **p** v avtomatu ***P***, tako, da je $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$.

$\mathbf{s}_1 \equiv \mathbf{s}_1$ zakon refleksivnosti

$\mathbf{s}_1 \equiv \mathbf{s}_2,\ \mathbf{s}_2 \equiv \mathbf{s}_1$ zakon simetričnosti

$\mathbf{s}_1 \equiv \mathbf{s}_2 \quad \mathbf{s}_2 \equiv \mathbf{s}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s}_1 \equiv \mathbf{s}_3$ zakon tranzitivnosti

Neposredna posledica gornjih zakonitosti je možnost razdelitve stanj avtomata na skupine ločljivih razredov ekvivalentnosti.

V teh skupinah razredov se v posameznem razredu nahajajo samo ekvivalentna stanja – dve ali več.

Minimizacija stanj avtomata pomeni iskanje minimalnega števila skupin ekvivalentnih stan.

Minimiziran avtomat ***Q*** bo torej imel toliko stanj, kolikor ločljivih razredov obstoja v začetnem ***P*** avtomatu.

Nakazan postopek formalizirajmo z ustreznimi pravili, s katerimi bo mogoče testirati ekvivalentnost stanj popolnoma opredeljenega avtomata.

Teorem o ekvivalentnosti stanj :

Naj bodo stanja avtomata ***A*** razdeljena na ločljive razrede.

Z označbo $\mathbf{s}_1 \triangleq \mathbf{s}_2$ označimo, da se stanji $\mathbf{s}_1$ in $\mathbf{s}_2$ nahajata znotraj istega razreda.

Razdelitev je sestavljena iz razredov ekvivalentnosti, ki vsebujejo ekvivalentna stanja samo takrat, ko za katerikoli par stanj.

$\mathbf{s}_1 \triangleq \mathbf{s}_2$

pri istem vhodu $\mathbf{x}_i$ velja, da je:

1. $\lambda(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i) = \lambda(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i)$

2. $\delta(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i) \triangleq \delta(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i)$

Metoda, ki je osnovana na tem se imenuje Huffman - Mealyjev algoritem, sestavljena pa je iz sledečih korakov.

1. Imamo tabelo stanj avtomata ***P.*** Na osnovi pogoja $\lambda(\mathbf{s_1},\mathbf{x_i}) = \lambda(\mathbf{s_2},\mathbf{x_i})$ delimo notranja stanja na razrede, katerih elementi imajo iste izhode.
2. Opazujemo polje naslednjih stanj avtomata. Na osnovi identičnosti naslednjih stanj določimo ekvivalentnost.
3. Reduciramo tabelo stanj s tem, da množico ekvivalentnih stanj zamenjamo z enim elementom te množice.
4. Zgrajujemo razdvojene množice ekvivalentnih stanj s pomočjo relacije:
   $\lambda(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i) = \lambda(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i)$
5. Nadaljujemo z izgradnjo razdvojenih množic s testom naslednjih stanj po relaciji:
   $\delta(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i) \triangleq \delta(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i)$
6. Če je potrebno ponavljamo korake 4. in 5. Če ni, ima tabela stanj avtomata ***Q*** toliko vrstic, kolikor je ločljivih razredov.

P	$\Delta^1 p$	z
	x = 0	x = 1
p_1	p_1,1	p_4,0
p_2	p_1,0	p_5,0
p_3	p_2,0	p_6,0
p_4	p_2,0	p_6,0
p_5	p_3,0	p_7,1
p_6	p_3,0	p_7,1
p_7	p_4,0	p_8,1
p_8	p_4,0	p_8,1

Q	$\Delta^1 p$	z
	x = 0	x = 1
$(p_1) \rightarrow q_1$	q_1,1	q_3,0
$(p_2) \rightarrow q_2$	q_1,0	q_4,0
$(p_3,p_4) \rightarrow q_3$	q_2,0	q_4,0
$(p_5,p_6,p_7,p_8) \rightarrow q_4$	q_3,0	q_4,1

$$\pi_0 = (p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6,p_7,p_8)$$

$$\pi_1 = (p_1)(p_2,p_3,p_4)(p_5,p_6,p_7,p_8)$$

$$\pi_2 = (p_1)(p_2)(p_3,p_4)(p_5,p_6,p_7,p_8)$$

7. 9 Pretvarjanje avtomatov

7. 9. 1 Pretvorba Mealyjevega avtomata v Mooreovega

$(\mathbf{s}_i , \mathbf{x}_j)$ – opazovano stanje Mealyjevega avtomata

$\mathbf{x}_r$ - vhodna črka za naslednje stanje v Mooreovem avtomatu

$$\delta_{MO}((\mathbf{s}_{iME},\mathbf{x}_j),\mathbf{x}_r) = (\delta_{ME}(\mathbf{s}_{iME},\mathbf{x}_j),\mathbf{x}_r); \quad \mathbf{s}_i \neq \mathbf{s}_0$$

$$\delta_{MO}(\mathbf{s}_{0MO},\mathbf{x}_r) = (\mathbf{s}_{0ME},\mathbf{x}_r) = \mathbf{s}_{0rMO}; \quad \mathbf{s}_{0MO} = \mathbf{s}_{0ME}$$

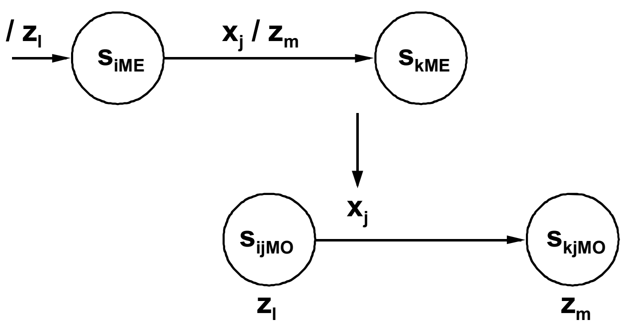
$$\lambda_{MO}(\mathbf{s}_{ij}) = \lambda_{ME}(\mathbf{s}_i,x_j); \quad \mathbf{s}_{ij} \neq \mathbf{s}_0$$

$$\lambda_{MO}(\mathbf{s}_0) = \mathbf{u}; \quad \mathbf{s}_{0MO} = \mathbf{s}_{0ME}$$

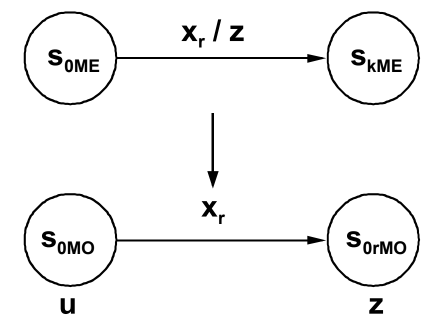
Stanju $\delta_{ME}(\mathbf{s}_{iME},\mathbf{x}_j)$ ustreza stanje $\mathbf{s}_{ijMO}$.

Stanje $\mathbf{s}_{krMO}$ iščemo v Mealyjevem avtomatu v stolpcu $\mathbf{s}_{kME}$, če je le $\delta_{ME}(\mathbf{s}_{iME},\mathbf{x}_j) = \mathbf{s}_{kME}$

Če je $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_j$ nastopa preslikava detajlov, ki jo vidimo na naslednji sliki:



Začetno stanje pa je naslednje:



Zgled:

A_{ME}	s_1	s_2	s_3	s_4
x_1	s_2/z_2	$s_3/-$	s_2/z_1	$-/-$
x_2	s_4/z_1	$-/-$	$s_1/-$	$-/-$

$(s_{1ME}, x_1) \quad \Rightarrow \quad s_{11MO}$ $\qquad (s_{3ME}, x_1) \quad \Rightarrow \quad s_{31MO}$

$(s_{1ME}, x_2) \quad \Rightarrow \quad s_{12MO}$ $\qquad (s_{3ME}, x_2) \quad \Rightarrow \quad s_{32MO}$

$(s_{2ME}, x_1) \quad \Rightarrow \quad s_{21MO}$ $\qquad (s_{4ME}, x_1) \quad \Rightarrow \quad s_{41MO}$

$(s_{2ME}, x_2) \quad \Rightarrow \quad s_{22MO}$ $\qquad (s_{4ME}, x_2) \quad \Rightarrow \quad s_{42MO}$

$(s_{1ME}, x_1) \rightarrow s_{2ME} : (s_{11MO}, x_1) \rightarrow s_{21MO}, (s_{11MO}, x_2) \rightarrow s_{22MO}$ ➩ 1

$(s_{1ME}, x_2) \rightarrow s_{4ME} : (s_{12MO}, x_1) \rightarrow s_{41MO}, (s_{12MO}, x_2) \rightarrow s_{42MO}$ ➩ 2

$(s_{2ME}, x_1) \rightarrow s_{3ME} : (s_{21MO}, x_1) \rightarrow s_{31MO}, (s_{21MO}, x_2) \rightarrow s_{32MO}$ ➩ 3

$(s_{2ME}, x_2) \rightarrow - : \quad (s_{22MO}, x_1) \rightarrow -, \quad (s_{22MO}, x_2) \rightarrow -$ ➩ 4

$(s_{3ME}, x_1) \rightarrow s_{2ME} : (s_{31MO}, x_1) \rightarrow s_{21MO}, (s_{31MO}, x_2) \rightarrow s_{22MO}$ ➩ 5

$(s_{3ME}, x_2) \rightarrow s_{1ME} : (s_{32MO}, x_1) \rightarrow s_{11MO}, (s_{32MO}, x_2) \rightarrow s_{12MO}$ ➩ 6

$(s_{4ME}, x_1) \rightarrow - : \quad (s_{41MO}, x_1) \rightarrow -, \quad (s_{41MO}, x_2) \rightarrow -$ ➩ 7

$(s_{4ME}, x_2) \rightarrow - : \quad (s_{42MO}, x_1) \rightarrow -, \quad (s_{42MO}, x_2) \rightarrow -$ ➩ 8

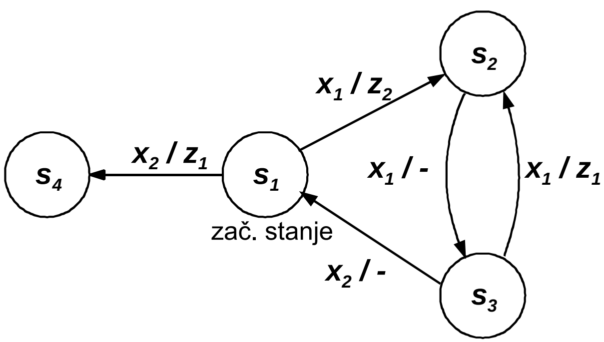
$(s_{0MO}, x_1) \rightarrow s_{11MO}, (s_{0MO}, x_2) \rightarrow s_{12MO}$ ➩ 0

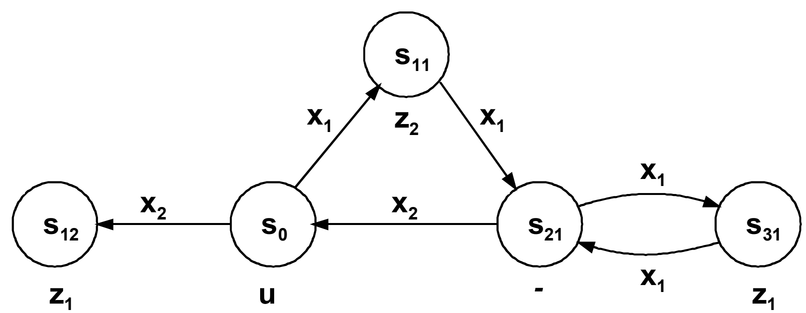
A_{MO}	u	z_2	z_1	-	-	z_1	-	-	-
	s_{0MO}	s_{11}	s_{12}	s_{21}	s_{22}	s_{31}	s_{32}	s_{41}	s_{42}
x_1	s_{11}	s_{21}	s_{41}	s_{31}	-	s_{21}	s_{11}	-	-
x_2	s_{12}	s_{22}	s_{42}	s_{32}	-	s_{22}	s_{12}	-	-

$s_{22} = s_{41} = s_{42} = -$

$s_0 = s_{32}$

A_{MO}	-	z_2	z_1	-	z_1
	s_{0MO}	s_{11}	s_{12}	s_{21}	s_{31}
x_1	s_{11}	s_{21}	-	s_{31}	s_{21}
x_2	s_{12}	-	-	s_0	-





7. 9. 2 Pretvorba Mooreovega končnega avtomata v Mealyjevega

$$\delta_{ME}(\mathbf{s}_{ME}, \mathbf{x}) = \delta_{MO}(\mathbf{s}_{MO}, \mathbf{x}); \qquad \mathbf{s}_{ME} = \mathbf{s}_{MO}$$

$$\lambda_{ME}(\mathbf{s}_{ME}, \mathbf{x}) = \lambda_{MO}(\delta_{MO}(\mathbf{s}_{MO}, \mathbf{x}))$$

A_{MO}	s_0/u	s_1/z_2	s_2/z_1	$s_3/-$	s_4/z_1
x_1	s_1	s_3	-	s_4	s_3
x_2	s_2	-	-	s_0	-

A_{ME}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
x_1	s_1/z_2	$s_3/-$	-/-	s_4/z_1	$s_3/-$
x_2	s_2/z_1	-/-	-/-	$s_0/-$	-/-

A_{ME}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
x_1	s_1/z_2	$s_3/-$	-/-	s_4/z_1	$s_3/-$
x_2	s_2/z_1	-/-	-/-	$s_0/$ -	-/-

A_{ME}	s_0	s_1	s_2	s_3
x_1	s_1/z_2	$s_3/-$	-/-	s_4/z_1
x_2	s_2/z_1	-/-	-/-	$s_0/-$