

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA ELEKTROTEHNIKO

**Árpád Búrmen**

# **Linearna elektronika**

Ljubljana, 2012

Recenzenta: prof. dr. Tadej Tuma, doc. dr. Tomaž Dogša.

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Osnovni pojmi</b>	<b>1</b>
1.1	Linearna vezja in superpozicija . . . . .	1
1.2	Gradniki vezij linearne elektronike . . . . .	1
1.3	Kompleksorji . . . . .	4
1.4	Označevanje tokov in napetosti . . . . .	5
1.5	Napetostni in tokovni delilnik . . . . .	6
1.6	Linearni dvopoli, $n$ -polna vezja in (nedoločena) admitančna matrika . . . . .	7
1.7	Delovna moč . . . . .	11
1.8	Théveninovo in Nortonovo nadomestno vezje, notranja impedanca vira . . . . .	12
1.9	Razpoložljiva moč vira . . . . .	13
1.10	Vhodne in prevajalne funkcije . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Dvovhodna vezja</b>	<b>19</b>
2.1	Karakterizacija dvovhodnih vezij . . . . .	19
2.1.1	Admitančni in impedančni parametri . . . . .	19
2.1.2	Hibridni parametri . . . . .	22
2.1.3	Verižni parametri . . . . .	24
2.1.4	Pretvarjanje parametrov . . . . .	25
2.2	Vhodne in prevajalne funkcije . . . . .	26
2.2.1	Napetostno ojačenje . . . . .	26
2.2.2	Tokovno ojačenje . . . . .	27
2.2.3	Vhodna in izhodna admitanca . . . . .	27
2.2.4	Nadomestno vezje pri krmiljenju na vhodni strani . . . . .	28
2.2.5	Ojačenje moči . . . . .	30
2.3	Splošne lastnosti dvovhodnih vezij . . . . .	32
2.3.1	Recipročnost . . . . .	32
2.3.2	Aktivnost in pasivnost . . . . .	33
2.3.3	Absolutna stabilnost in potencialna nestabilnost . . . . .	36

2.4	Optimizacija koristnega ojačenja moči . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Enačbe vezja</b>	<b>45</b>
3.1	Prvi in drugi Kirchoffov zakon . . . . .	46
3.2	Vozliščne enačbe . . . . .	48
3.3	Hitro sestavljanje sistema vozliščnih enačb . . . . .	50
3.4	Linearni tropoli . . . . .	53
3.5	Vključitev tropolov v vozliščne enačbe vezja . . . . .	56
3.6	Napetostni viri in tokovno krmiljeni viri v vozliščnih enačbah . . . . .	60
3.7	Eliminacija notranjih neznank . . . . .	63
3.8	Hitro določanje admitančne matrike $n$ -polnega vezja . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Enosmerne karakteristike nelinearnih elementov</b>	<b>73</b>
4.1	Polprevodniška dioda . . . . .	73
4.2	Zenerjeva dioda . . . . .	75
4.3	Bipolarni tranzistor . . . . .	76
4.4	MOSFET z induciranim kanalom . . . . .	83
4.5	MOSFET z vgrajenim kanalom . . . . .	87
4.6	Spojni FET tranzistor (JFET) . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Naboj in kapacitivnosti nelinearnih elementov</b>	<b>91</b>
5.1	Nelinearni kondenzator . . . . .	91
5.2	Polprevodniška dioda . . . . .	93
5.3	Bipolarni tranzistor . . . . .	94
5.4	Spojni FET tranzistor (JFET) . . . . .	97
5.5	MOSFET tranzistor . . . . .	98
5.5.1	Parazitne (ekstrinzične) kapacitivnosti . . . . .	99
5.5.2	Meyerjev model intrinzičnih kapacitivnosti . . . . .	100
5.5.3	Nerecipročnost intrinzičnih kapacitivnosti . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Nastavljanje delovne točke nelinearnih elementov</b>	<b>109</b>
6.1	Dioda . . . . .	109
6.2	Zenerjeva dioda . . . . .	110
6.3	Bipolarni tranzistor . . . . .	110
6.4	MOSFET z induciranim kanalom . . . . .	114
6.5	MOSFET z vgrajenim kanalom in JFET . . . . .	116

<b>7</b>	<b>Od velikih k majhnim signalom</b>	<b>119</b>
7.1	Vezni in premostitveni kondenzatorji . . . . .	119
7.2	Popačenja . . . . .	123
7.3	Velikosignalna analiza . . . . .	127
7.4	Pretok moči . . . . .	130
7.5	Model vezja za majhne signale . . . . .	131
<b>8</b>	<b>Lastnosti osnovnih vezav tranzistorjev pri srednjih frekvencah</b>	<b>135</b>
8.1	Orientacija s skupnim emitorjem . . . . .	136
8.2	Orientacija s skupnim izvorom . . . . .	139
8.3	Orientacija s skupno bazo . . . . .	142
8.4	Orientacija s skupnimi vrati . . . . .	148
8.5	Orientacija s skupnim kolektorjem . . . . .	150
8.6	Orientacija s skupnim ponorom . . . . .	156
8.7	Darlingtonova vezava . . . . .	158
8.8	Kaskadna vezava ojačevalnih stopenj . . . . .	161
8.9	Kaskodna vezava . . . . .	163
8.10	Diferencialni ojačevalnik . . . . .	171
<b>9</b>	<b>Frekvenčna odvisnost linearnih vezij</b>	<b>185</b>
9.1	Odziv linearnega vezja v časovnem prostoru . . . . .	185
9.2	Prevajalna funkcija vezja . . . . .	188
9.3	Ničle in poli prevajalne funkcije ter njihov vpliv na prehodni pojav . . . . .	191
9.4	Določanje polov prevajalnih funkcij iz enačb vezja . . . . .	196
9.5	Bodejev diagram . . . . .	198
9.6	Bodejev diagram ojačenja moči . . . . .	214
<b>10</b>	<b>Spodnja in zgornja meja srednjefrekvenčnega območja</b>	<b>215</b>
10.1	Reaktivni elementi in poli prevajalnih funkcij . . . . .	216
10.2	Določanje spodnje frekvenčne meje . . . . .	221
10.2.1	Vhodna upornost tranzistorja . . . . .	221
10.2.2	Orientacija s skupnim emitorjem (izvorom) . . . . .	224
10.2.3	Orientacija s skupno bazo (vrati) . . . . .	226
10.2.4	Orientacija s skupnim kolektorjem (ponorom) . . . . .	229
10.3	Modeli tranzistorjev pri visokih frekvencah . . . . .	230
10.3.1	Bipolarni tranzistor . . . . .	230

10.3.2	JFET tranzistor . . . . .	235
10.3.3	MOSFET tranzistor . . . . .	237
10.4	Zgornja frekvenčna meja napetostnega ojačenja . . . . .	241
10.4.1	Kapacitivno breme . . . . .	241
10.4.2	Orientacija s skupnim emitorjem (izvorom) . . . . .	244
10.4.3	Orientacija s skupnim kolektorjem (ponorom) . . . . .	250
10.4.4	Orientacija s skupno bazo (vrati) . . . . .	252
10.4.5	Kaskodna vezava . . . . .	255
10.4.6	Diferencialni ojačevalnik . . . . .	259
<b>11</b>	<b>Povratna vezava</b>	<b>261</b>
11.1	Sistemi s povratno vezavo . . . . .	261
11.2	Ojačevalniki z negativno povratno vezavo . . . . .	263
11.2.1	Ojačenje in popačenja . . . . .	263
11.2.2	Frekvenčna karakteristika . . . . .	267
11.2.3	Poli zaprtozančne prevajalne funkcije . . . . .	270
11.3	Stabilnost sistemov s povratno vezavo . . . . .	273
11.3.1	Nyquistov diagram . . . . .	273
11.3.2	Nyquistov kriterij stabilnosti . . . . .	276
11.3.3	Amplitudni in fazni razloček . . . . .	282
11.4	Sinusni oscilatorji . . . . .	285
11.4.1	Barkhausenov pogoj za stabilno nihanje . . . . .	285
11.4.2	Zagon oscilatorja in stabilizacija amplitude nihanja . . . . .	290
11.4.3	Oscilatorji z resonančnim vezjem . . . . .	295
11.4.4	Kvarčni oscilatorji . . . . .	303
11.4.5	Oscilatorji na osnovi faznega zasuka . . . . .	310
11.5	Ojačevalniki s pozitivno povratno vezavo . . . . .	317
	<b>Literatura</b>	<b>323</b>

# Uvod

Linearna elektronika se ukvarja z vezji, ki jih v časovnem prostoru opišemo s sistemom linearnih diferencialnih enačb. Taka vezja vsebujejo le linearne elemente kot so upori, tuljave, kondenzatorji in linearni krmiljeni viri. V širšem smislu jo lahko uporabimo tudi za vezja, ki so sestavljena iz nelinearnih elementov, kot so tranzistorji in diode. Pri tem obravnavo omejimo na majhna odstopanja od delovne točke. Slednjo poiščemo z reševanjem sistema nelinearnih enačb, kar strogo gledano pomeni, da njeno določanje ni v domeni linearne elektronike. Majhna odstopanja od delovne točke lahko spet opišemo s sistemom linearnih enačb, ki jih dobimo, če elemente nelinearne vezja v njeni okolici lineariziramo. Čeprav se s tem domet analize navidez močno skrči, pa nam taka analiza daje pomemben vpogled v delovanje vezja.

Linearna vezja uporabljamo za ojačevanje signalov, obdelavo frekvenčne vsebine signala (filtriranje), izvedbo napetostnih in tokovnih virov, generiranje signalov (oscilatorji), itd. Razumevanje linearne elektronike je dobra popotnica za mnogo bolj zapleten svet nelinearne elektronike.

Knjiga je razdeljena v enajst poglavij od katerih niso vsa enako pomembna, niti se ne ukvarjajo vsa zgolj z linearno elektroniko. Prvo poglavje vpelje osnovne pojme in ponovi potrebna predznanja, ki si jih je bralec pridobil pri Osnovah elektrotehnike. Že v tem poglavju se osredotočimo na obravnavo vezij v frekvenčnem prostoru, ki ostane osrednje orodje za analizo vezij skozi celotno knjigo.

Drugo poglavje je namenjeno opisovanju in analizi dvovhodnih vezij. Bralca seznanjajo z nekaterimi osnovnimi pojmi, ki se pogosto pojavljajo v linearni elektroniki: ojačenje, vhodna in izhodna admitanca, recipročnost, aktivnost in pasivnost ter absolutna stabilnost in potencialna nestabilnost.

Z zapisovanjem in reševanjem sistema enačb, ki opisujejo vezje, se ukvarja četrto poglavje. Od obravnavanih tem je najpomembnejši postopek za hitro sestavljanje sistema modificiranih vozliščnih enačb. Opisan je s prispevki posameznih gradnikov vezij linearne elektronike k enačbam vezja. Pri tem za začetek zadošča, če se spoznamo z obravnavo prevodnosti (in s tem tuljav in kondenzatorjev) ter neodvisnih in linearnih napetostno krmiljenih tokovnih virov. Na nekaterih mestih v knjigi uporabljamo tudi postopek za eliminacijo notranjih neznanj, zato je prav, če ga bralec obdelaja, preden nadaljuje z ostalimi poglavji.

Četrto in peto poglavje ne sodita neposredno v linearno elektroniko, temveč vzpostavita most med karakteristikami nelinearnih elementov in lineariziranimi modeli le teh. Slednji so podani z diferencialnimi prevodnostmi in kapacitivnostmi, ki opisujejo obnašanje elementa pri majhnih odstopanjih od delovne točke. Poglavji obravnavata osnovne polprevodniške elemente, ki jih srečamo v elektronskih vezjih: diodo in Zenerjevo diodo, bipolarni tranzistor ter spojni FET in MOSFET. Za razumevanje ostalih poglavij so pomembne predvsem zveze med napetostmi in tokovi v delovni točki ter diferencialnimi prevodnostmi in kapacitivnostmi, ki opisujejo obnašanje elementov pri majhnih odstopanjih od delovne točke.

Šesto poglavje prav tako ne sodi v linearno elektroniko, je pa nujno za razumevanje pojma delovne točke. Razložena so enostavna vezja s pomočjo katerih nastavimo delovno točko nelinearnih elementov. Elemente obravnavamo s pomočjo močno poenostavljenih nelinearnih enačb, ki nam omogočajo, da delovno točko izračunamo tudi brez uporabe simulatorja vezij.

Sedmo poglavje vzpostavi zvezo med nelinearno elektroniko, kjer obravnavamo takoimenovane velike signale, in

linearno elektroniko, kjer se ukvarjamo zgolj z majhnimi odstopanji od delovne točke. Slednja pogosto imenujemo tudi „majhni signali“. Če ti signali niso dovolj majhni, opazimo, da odziv vezja na sinusno vzbujanje ni sinusen. Odstopanje od sinusnega poteka predstavlja popačenja, ki so nezaželen pojav v vezjih linearne elektronike. Preko primera se nato seznanimo z analizo vezja za velike signale (nelinearna elektronika), nakar sledi prehod k majhnim signalom v okolici delovne točke. Pri tem vpeljemo model vezja za majhne signale, ki postane izhodišče za zapis enačb vezja v linearni elektroniki.

Osmo poglavje obravnava osnovne vezave tranzistorjev in njihove lastnosti. Pri tem se osredotočimo na takoimenovano srednjefrekvenčno območje, kjer vezni in premostitveni kondenzatorji predstavljajo kratke stike, kapacitivnosti nelinearnih elementov pa so zanemarljive (odprte sponke), saj je njihova admitanca še premajhna, da bi skozi tekli opazni tokovi. Lastnosti vezja (ojačenja, vhodne in izhodne admitance, ...) so v tem območju podane z realnimi števili. Vsi signali so bodisi v fazi ali protifazi (fazna razlika signalov je zmeraj  $0^\circ$  ali  $180^\circ$ ).

Deveto poglavje vpelje obravnavo linearnih vezij v frekvenčnem prostoru, ko kapacitivnosti niso več zanemarljive (kratki stiki oziroma odprte sponke). Poglavje se začne s primerom analize vezja v časovnem prostoru, nakar sledi analiza v frekvenčnem prostoru, vpeljava pojma prevajalne funkcije in pojma kompleksne frekvence. Razumevanje vseh izpeljav zahteva znanje Laplaceove transformacije, vendar pa lahko v nadaljevanju knjige dovolj dobro shajamo s dejstvom, da krožna frekvenca  $\omega$  v frekvenčnem prostoru ustreza kompleksni frekvenci  $s = j\omega$ . Lastnosti vezja kot naprimer ojačenje, postanejo kompleksna števila, med signali pa se pojavijo poljubne fazne razlike. Obravnava vezij se prične vrteti okrog prevajalne funkcije ter njenih polov in ničel. Poli so pomembni, saj določajo obliko časovnega poteka prehodnega pojava in s tem tudi stabilnost vezja. Poglavje se zaključi z vpeljavo Bodejevega diagrama prevajalne funkcije.

Deseto poglavje se prične z razdelitvijo celotnega frekvenčnega območja v tri podobmočja: nizke, srednje in visoke frekvence. Podani so postopki za določanje meje med nizko- in srednjefrekvenčnim območjem, ki jo imenujemo tudi spodnja frekvenčna meja. Določanje zgornje frekvenčne meje, t.j. frekvence, pri kateri se začne visokofrekvenčno območje, zahteva upoštevanje parazitnih kapacitivnosti nelinearnih elementov. S tem namenom so najprej podani modeli tranzistorjev pri visokih frekvencah, nakar sledi obravnava osnovnih vezav tranzistorjev. V splošnem je zgornja frekvenčna meja odvisna od prevajalne funkcije, ki jo obravnavamo. Ker bi obravnava vseh prevajalnih funkcij vzela preveč prostora, se osredotočimo na napetostno ojačenje. Rezultati nam dajo vpogled v frekvenčne omejitve, ob katere trčimo pri posameznih osnovnih vezavah tranzistorjev.

Pojmu povratne vezave je posvečeno zadnje, enajsto poglavje. Povratna vezava ima v srednjefrekvenčnem območju nekatere zelo koristne lastnosti, saj zmanjša popačenja in razširi srednjefrekvenčno območje. Ceno plačamo pri stabilnosti vezja, saj lahko povratna vezava iz stabilnega naredi nestabilno vezje. Osrednje orodje za določanje stabilnosti vezja so poli prevajalne funkcije, ki se premikajo po kompleksni ravnini, če spreminjamo ojačenje povratne vezave. Osrednje orodje za analizo stabilnosti na osnovi polov je diagram lege korenov. Ker pa je njegovo risanje dokaj zapleten postopek, se pogosteje uporabljajo druga orodja, kot naprimer Nyquistov diagram in Nyquistov kriterij stabilnosti. Bodejev diagram, ki ga vpeljemo v devetem poglavju, je le drugačna interpretacija dela Nyquistovega diagrama. V nekaterih posebnih primerih ojačevalnikov lahko stabilnost ojačevalnika s povratno vezavo izrazimo številsko z amplitudnim in faznim razločkom.

Včasih si želimo, da bi bilo vezje nestabilno (npr. pri oscilatorjih). Oscilator niha sinusno, če izpolnjuje Barkhausenov pogoj nihanja, ki je pravzaprav posebna oblika Nyquistovega kriterija stabilnosti. Izpolnjevanje Barkhausenovega pogoja niti ni tako enostavna naloga, saj vodi do vezij s samodejno nastavitvijo ojačenja. Poglavje obravnava dve veliki skupini oscilatorjev: oscilatorje z resonančnim vezjem, kamor spadajo tudi kvarčni oscilatorji, in oscilatorje na osnovi faznega zasuka. Nestabilnosti pa ne uporabljamo samo za izvedbo oscilatorjev, temveč tudi v spominskih vezjih. Za razliko od oscilatorjev so slednja nestabilna le kratek čas med prehodom iz enega v drugo stabilno stanje.

Pri pisanju knjige sem si pomagal z vsebino v učbenikih [1] in [2], pri modelih, ki so opisani v petem in šestem poglavju pa sem izhajal iz najbolj osnovnih oblik enačb, ki jih uporabljajo simulatorji vezij, kot so SPICEOPUS, HSPICE, Spectre, in podobni. Zelo obširen vir informacij je tudi svetovni splet in spletne enciklopedije, kot na-



primer Wikipedia ([www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)). Vendar je potrebno te vsebine jemati z zrnom soli, saj pogosto vsebujejo marsikatero napako ali pretirano poenostavitev. Na žalost lahko trdimo enako tudi za prenekateri vir informacij pri samih proizvajalcih elektronskih komponent (datasheet, application note). Pri slednjih so enačbe včasih poenostavljene do te mere, da so sicer uporabne za večino izračunov v inženirski praksi, ne pripomorejo pa veliko k razumevanju delovanja vezij.

Nastanku knjige je botrovalo kar nekaj programskih paketov. Besedilo in enačbe so zapisani v  $\LaTeX$ -u. Skice in sheme v knjigi so narisane s programom Xcircuit ([opencircuitdesign.com/xcircuit](http://opencircuitdesign.com/xcircuit)) Za grafe pa je poskrbel programski jezik Python ([python.org](http://python.org)) skupaj s knjižnicami NumPy ([numpy.scipy.org](http://numpy.scipy.org)), SciPy ([www.scipy.org](http://www.scipy.org)), Matplotlib ([matplotlib.sourceforge.net](http://matplotlib.sourceforge.net)) in PyOPUS ([fides.fe.uni-lj.si/pyopus](http://fides.fe.uni-lj.si/pyopus)). Simulacije vezij je izvajal program SPICEOPUS ([www.spiceopus.si](http://www.spiceopus.si)), pri izračunih pa je priskočil na pomoč programski jezik Python. PDF datoteka s knjigo je rezultat prevajanja s programom pdflatex iz programskega paketa  $\text{MiKTeX}$  ([miktex.org](http://miktex.org)).

Ljubljana, marec 2012.  
Árpád Bűrmen



# 1

## Osnovni pojmi

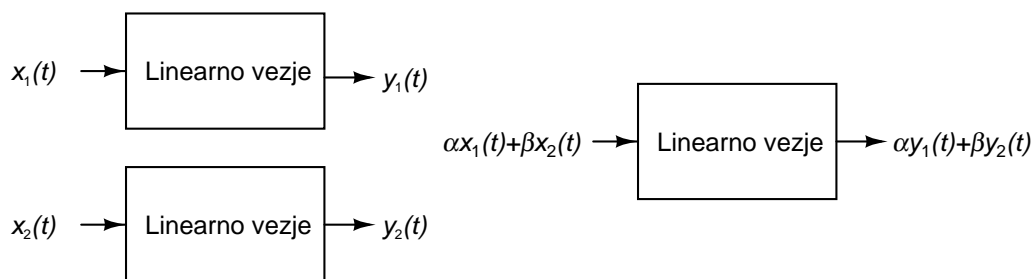
### 1.1 Linearna vezja in superpozicija

Zveza med odzivom in vzbujanjem je linearna, če za poljubni dve vzbujanji  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  in pripadajoča odziva  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  velja, da je odziv na vzbujanje

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad (1.1)$$

enak

$$y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad (1.2)$$



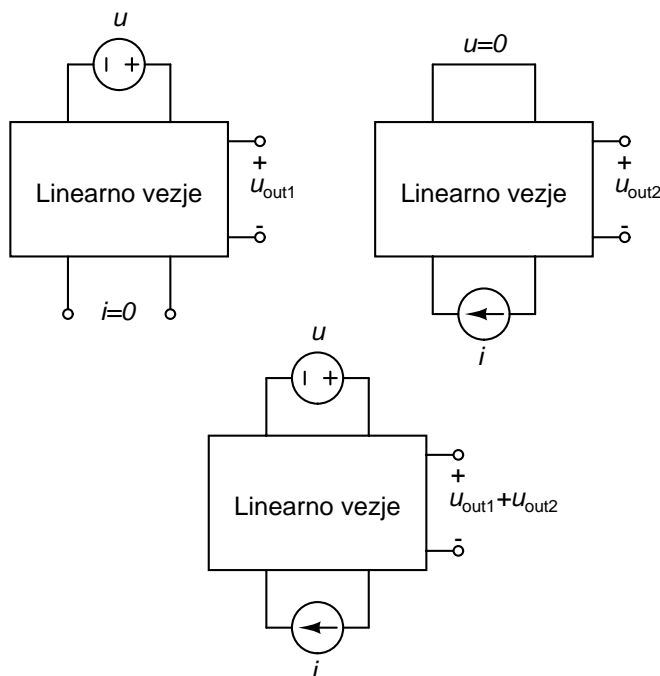
Slika 1.1: Linearna zveza med vzbujanjem in odzivom (načelo superpozicije).

Pravimo, da za vzbujanje in odziv velja načelo superpozicije (slika 1.1). Če so zveze med vzbujanjem in vsemi tokovi in napetostmi v vezju linearne, je vezje linearno.

Načelo superpozicije lahko uporabimo pri analizi vezja (slika 1.2), ki je vzbujano z večimi viri. Namesto, da bi izračunali odziv vezja na obe vzbujanji hkrati, določimo odziv vezja na prvi vir pri izklopljenem drugem viru ter odziv na drugi vir ob izklopljenem prvem viru. Oba delna odziva seštejemo in dobimo odziv vezja na hkratno vzbujanje z obema viroma. Pripomnimo še, da izklopljen napetostni vir predstavlja kratek stik, izklopljen tokovni vir pa odprte sponke.

### 1.2 Gradniki vezij linearne elektronike

Ker sta tako Kichoffov napetostni kot tudi Kirchoffov tokovni zakon linearne po svoji naravi, morajo biti zveze med napetostmi in tokovi gradnikov linearne vezij prav tako linearne.



Slika 1.2: Uporaba načela superpozicije pri analizi vezja.

**Primer 1.1:** Poglejmo si linearen upor z upornostjo  $R$ , za katerega vzamemo, da je vhodna veličina tok  $i$ , izhodna pa napetost  $u$ . Za upor je zveza med vhodno in izhodno veličino enaka

$$u = Ri. \quad (1.3)$$

Če kot vhodno veličino vzamemo tok  $i = \alpha i_1 + \beta i_2$ , velja

$$u = Ri = R(\alpha i_1 + \beta i_2) = \alpha Ri_1 + \beta Ri_2 = \alpha u_1 + \beta u_2 \quad (1.4)$$

pri čemer smo z  $u_1$  in  $u_2$  označili odziv upora na tokova  $i_1$  in  $i_2$ . △

**Primer 1.2:** Podobno lahko obravnavamo tudi linearen kondenzator s kapacitivnostjo  $C$ . Kot vhodno veličino vzamemo napetost, kot izhodno pa tok, in dobimo

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (1.5)$$

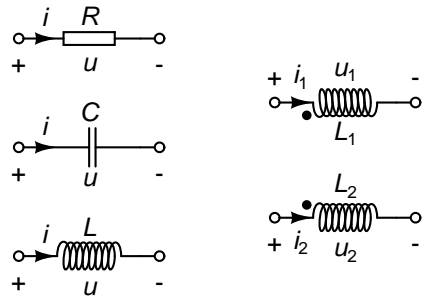
Spet lahko zapišemo

$$i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d(\alpha u_1 + \beta u_2)}{dt} = \alpha C \frac{du_1}{dt} + \beta C \frac{du_2}{dt} = \alpha i_1 + \beta i_2. \quad (1.6)$$

△

Poleg linearnega upora in kondenzatorja spada med gradnike linearnih vezij (slika 1.3, levo) tudi tuljava z induktivnostjo  $L$ , za katero velja

$$u = L \frac{di}{dt}. \quad (1.7)$$



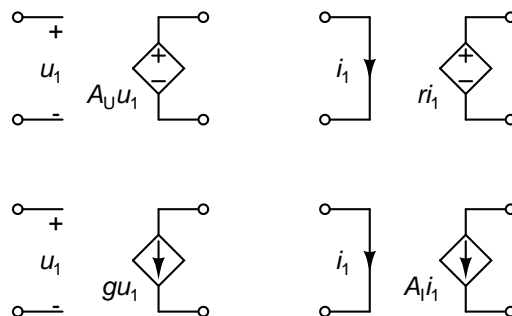
Slika 1.3: Linearni upor, kondenzator in tuljava (levo) in sklopljeni tuljavi (desno).

Redkeje srečamo sklopljene tuljave, katerih približek v resničnem svetu je transformator. Par sklopljenih tuljav z induktivnostima  $L_1$  in  $L_2$  (slika 1.3, desno) opisujeta enačbi

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad (1.8)$$

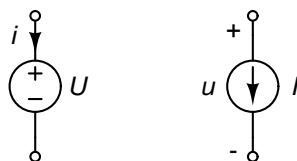
$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (1.9)$$

pri čemer je  $M$  medsebojna induktivnost. Faktor sklopa definiramo kot  $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$  in je zmeraj med 0 (nesklopljeni tuljavi) in 1 (popolnoma sklopljeni tuljavi).



Slika 1.4: Napetostno (zgoraj levo) in tokovno (zgoraj desno) krmiljeni napetostni vir ter napetostno (spodaj levo) in tokovno (spodaj desno) krmiljeni tokovni vir.

Poleg omenjenih gradnikov so v linearnih vezjih pogosti tudi krmiljeni viri (slika 1.4). Pri tem z  $A_U$  in  $A_I$  označujemo napetostno in tokovno ojačenje, z  $r$  in  $g$  pa transimpedanco in transkonduktanco.



Slika 1.5: Neodvisni napetostni vir (levo) in neodvisni tokovni vir (desno).

**Neodvisni napetostni in tokovni viri** (slika 1.5) **niso linearni**, zato kot taki ne morejo biti gradniki linearnih vezij.

**Primer 1.3:** Vzemimo neodvisni napetostni vir. Enačba, ki ga opisuje, se glasi

$$u = f(t) \quad (1.10)$$

kjer je  $f(t)$  časovni potek napetosti. Napetost vira je neodvisna od zunanjih vplivov in je določena s funkcijo  $f(t)$ , zato napetost  $u$  ne more biti v vlogi neodvisne veličine. V tej vlogi nastopa tok vira  $i$ . Če neodvisni napetostni vir vzbujamo z vsoto tokov  $i_1$  in  $i_2$  je njegov odziv (napetost) še zmeraj enak  $f(t)$ . Če bi bil vir linearen, bi moral biti odziv  $f(t) + f(t) = 2f(t)$ . Načelo superpozicije torej ne velja in tak vir ni linearen. Podobno lahko sklepamo tudi v primeru neodvisnega tokovnega vira.

Kljub temu pa imajo neodvisni napetostni viri pomembno vlogo v linearni elektroniki saj jih uporabljamo za vzbujanje vezij in za modeliranje vzbujanja v Théveninovih in Nortonovih nadomestnih vezjih.  $\triangle$

Večina omenjenih gradnikov v resničnem svetu ne obstaja. Uporabljamo jih predvsem kot računske pripomočke pri razumevanju vezij, ki so sestavljena iz realnih elektronskih komponent. Taka vezja so dobri približki linearnih vezij, če je vzbujanje dovolj majhno.

### 1.3 Kompleksorji

Če linearno vezje vzbujamo s sinusnim signalom frekvence  $f$ , je njegov odziv sestavljen iz **prehodnega pojava** in **sinusnega odziva s frekvenco  $f$** . Če je vezje stabilno, prehodni pojav sčasoma izzveni in ostane samo sinusni odziv, ki pa je v splošnem drugačne amplitude in zaostaja za vzbujanjem. Linearna elektronika se v veliki meri ukvarja z zvezo med sinusnim vzbujanjem in sinusnim odzivom.

Analiza linearnih vezij ob prisotnosti sinusnega vzbujanja je pomembna tudi zato, ker lahko vsako periodično vzbujanje zapišemo kot vsoto sinusnih signalov s pomočjo Fourierove vrste [3]. Tudi aperiodična vzbujanja lahko s pomočjo Fourierove transformacije zapišemo s sinusnimi signali. Ker za linearna vezja velja superpozicija, lahko odziv vezja na poljubno vzbujanje izračunamo za vsako sinusno komponento vzbujanja posebej. Celoten odziv vezja (brez prehodnega pojava) dobimo kot vsoto tako izračunanih delnih odzivov.

Imejmo signal

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (1.11)$$

Pri tem je  $\omega$  tako imenovana krožna frekvenca, ki je enaka  $2\pi f$ .  $A$  je amplituda (največja vrednost),  $\phi$  pa faza signala. Faza ni absolutna veličina. Merimo jo lahko le, če imamo nek referenčni signal, ki mu pripišemo fazo 0. V našem primeru je referenčni signal  $\cos(\omega t)$ . Enota za fazo je radian. Včasih fazo podajamo tudi v stopinjah.  $\pi$  radianov ustreza fazi  $180^\circ$ . Signale oblike (1.11) pogosto imenujemo kar sinusni signali, saj jih lahko zapišemo kot  $A \sin(\omega t + \phi + \pi/2)$ . Ponekod srečamo tudi pojem **izmenični signali**.

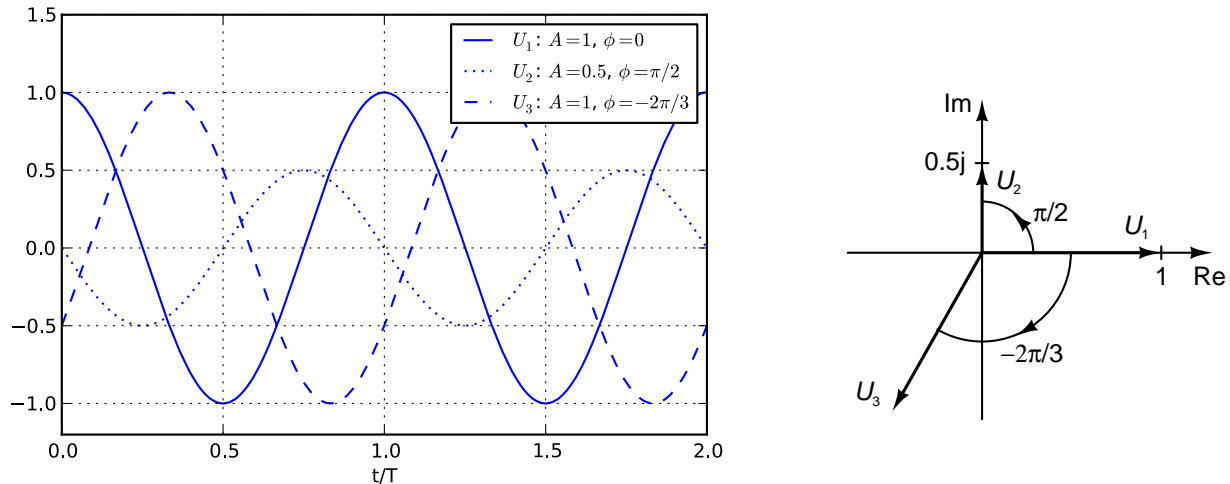
Signal  $x(t)$  lahko zapišemo tudi kot

$$x(t) = \Re \left( A e^{j(\omega t + \phi)} \right) = \Re \left( A e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} \right) = \Re \left( X \cdot e^{j\omega t} \right), \quad (1.12)$$

kjer  $j$  predstavlja imaginarno enoto.  $X = A e^{j\phi}$  je kompleksno število, ki predstavlja amplitudo in fazo signala (1.11). Taka kompleksna števila imenujemo kompleksorji in jih označujemo z velikimi tiskanimi črkami. Kompleksor sam po sebi ne nosi informacije o frekvenci signala, zato moramo pri vseh izpeljavah s kompleksorji sami vedeti na katero frekvenco se kompleksorji nanašajo. Slika 1.6 prikazuje tri sinusne signale in njihove pripadajoče kompleksorje v kompleksni ravnini.

Če namesto časovnih potekov signala uporabimo kompleksorje, se enačba (1.5), ki opisuje kondenzator s kapacitivnostjo  $C$ , poenostavi v

$$I = j\omega C U. \quad (1.13)$$



Slika 1.6: Trije časovni poteki sinusnih napetosti (levo) in pripadajoči kompleksorji (desno).

Podobno se zgodi tudi z enačbo (1.7) za tuljavo z induktivnostjo  $L$

$$U = j\omega LI \quad (1.14)$$

in z enačbama (1.8) in (1.9) za sklopljeni tuljavi

$$U_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2, \quad (1.15)$$

$$U_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2. \quad (1.16)$$

Uporaba kompleksorjev poenostavi analizo linernih vezij, saj iz enačb vezja izpadejo odvodi signalov. Nadomestijo jih kompleksorji in množenje z  $j\omega$ . Ponavadi vzbujevalni signal izberemo tako, da je njegov kompleksor pozitivno realno število (kot  $U_1$  na sliki 1.6).

Analizi vezij s pomočjo kompleksorjev pravimo tudi **analiza v frekvenčnem prostoru**. Če namesto kompleksorjev računamo s časovnimi poteki signalov in diferencialnimi enačbami, pravimo, da analiziramo vezje v **časovnem prostoru**. Večino analiz v tej knjigi bomo opravili v frekvenčnem prostoru.

## 1.4 Označevanje tokov in napetosti

Recimo, da imamo časovni potek napetosti med sponkama E in F sestavljen iz dveh komponent - enosmerne in izmenične.

$$u_{EF}(t) = U_{EF} + A \cos(\omega t + \phi). \quad (1.17)$$

Časovne poteke celotne napetosti bomo označevali z malo črko  $u$ . Indeks veličine (EF), ki nakazuje točki, med katerima je bila napetost pomerjena, bomo pisali z velikimi črkami. Z veliko črko  $U$  in z indeksom zapisanim z velikimi črkami bomo označevali enosmerno komponento  $U_{EF}$  časovnega poteka napetosti  $u_{EF}(t)$ .

Izmenično komponento napetosti (1.17) lahko izrazimo tudi s pomočjo pripadajočega kompleksorja  $U_{ef}$ .

$$u_{EF}(t) = U_{EF} + \Re(U_{ef} e^{j\omega t}). \quad (1.18)$$

Kompleksorje napetosti bomo označevali z veliko črko  $U$ , indeks pa z malimi črkami ( $U_{ef}$ ). Časovni potek izmenične komponente bomo označili z malo črko  $u$ , indeks pa z malimi črkami ( $u_{ef}(t)$ ). Velja

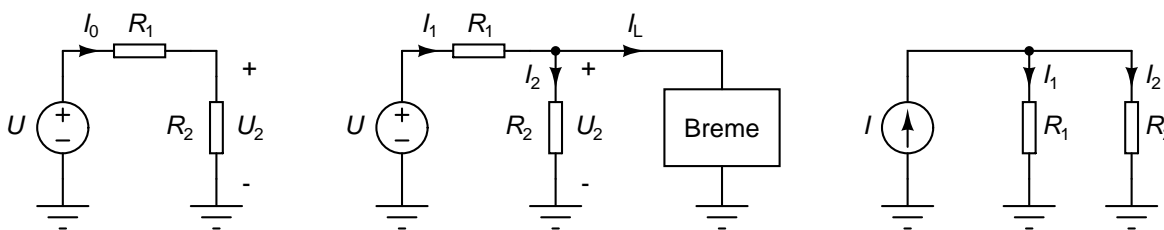
$$u_{ef}(t) = \Re(U_{ef}e^{j\omega t}) = A \cos(\omega t + \phi). \quad (1.19)$$

Včasih namesto črk nastopajo v indeksu številke (naprimer  $U_{12}$  pomeni napetost med sponkama 1 in 2). V tem primeru ni jasno, ali  $U_{12}$  predstavlja enosmerno komponento ali kompleksor. Da odpravimo nejasnosti, bomo v tem primeru označevali enosmerno komponento z dodatno črko Q kot  $U_{12Q}$ . Črko Q bomo dodali tudi v primerih, ko bomo posebej želeli poudariti, da neka veličina predstavlja enosmerno komponento signala (npr.  $U_{BEQ}$  namesto  $U_{BE}$ ). Črka „Q“ izhaja iz angleške besede „quiescent“, ki pomeni mirujoč, negiben.

Podobno bomo označevali tudi tokove in vse ostale veličine. Tako so  $i_{EF}(t)$ ,  $I_{EF}$ ,  $I_{ef}$  in  $i_{ef}(t)$  označbe za časovni potek celotnega toka, enosmerno komponento toka, kompleksor toka in časovni potek izmenične komponente toka.

## 1.5 Napetostni in tokovni delilnik

Oglejmo si še dve preprosti vezji, ki ju bomo še pogosto srečali kot sestavni del večjih vezij.



Slika 1.7: Neobremenjen (levo) in s tokom  $I_L$  obremenjen napetostni delilnik (na sredini) ter tokovni delilnik (desno).

Neobremenjen delilnik napetosti je prikazan na sliki 1.7 (levo). Za tok in izhodno napetost neobremenjenega delilnika velja

$$I_0 = \frac{U}{R_1 + R_2}, \quad (1.20)$$

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1.21)$$

Vidimo, da je delilno razmerje enako  $R_2/(R_1 + R_2)$ . Če tak delilnik obremenimo (slika 1.7, na sredini), teče v breme tok  $I_L$ . Zaradi toka  $I_L$  tokova  $I_1$  in  $I_2$  nista več enaka in delilno razmerje se poruši.

$$I_1 = I_2 + I_L \quad (1.22)$$

Iz enačbe za napetost  $U$

$$U = R_1(I_2 + I_L) + R_2I_2 \quad (1.23)$$

dobimo tok

$$I_2 = \frac{U - R_1I_L}{R_1 + R_2}. \quad (1.24)$$



Sedaj lahko določimo izhodno napetost

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( 1 - \frac{R_1 I_L}{U} \right) = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{I_L}{I_0} \right). \quad (1.25)$$

Relativna napaka izhodne napetosti zaradi obremenitve napetostnega delilnika znaša

$$e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left| \frac{I_L}{I_0} \right| \leq \left| \frac{I_L}{I_0} \right|. \quad (1.26)$$

Vidimo, da relativna napaka ne preseže razmerja med tokom bremena  $I_L$  in tokom neobremenjenega delilnika  $I_0$ . Če želimo, da je napaka zaradi obremenitve delilnika pod 1%, moramo vezje načrtovati tako, da bo tok neobremenejnega delilnika 100-krat večji od toka bremena.

Drugo pogosto vezje je tokovni delilnik (slika 1.7, desno). Vezje razdeli tok v razmerju prevodnosti obeh uporov ( $G_1 = 1/R_1$  in  $G_2 = 1/R_2$ ).

$$I_1 = I \frac{G_1}{G_1 + G_2} = I \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (1.27)$$

$$I_2 = I \frac{G_2}{G_1 + G_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (1.28)$$

## 1.6 Linearni dvopoli, $n$ -polna vezja in (nedoločena) admitančna matrika

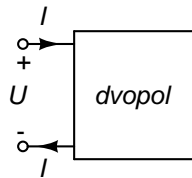
Linearni dvopol je linearno vezje z dvema priključkoma (slika 1.8), ki ga v frekvenčnem prostoru opišemo z enačbo

$$I = YU = \frac{1}{Z}U. \quad (1.29)$$

Kompleksna sorazmernostna faktorja  $Y$  in  $Z$  imenujemo tudi **admitanca** oziroma **impedanca**. Enota za admitanco je  $A/V = S$ , enota za impedanco pa  $V/A = \Omega$ . Admitanco in impedanco včasih razbijemo na realni in imaginarni del

$$Y = \Re\{Y\} + j\Im\{Y\} = G + jB, \quad (1.30)$$

$$Z = \Re\{Z\} + j\Im\{Z\} = R + jX. \quad (1.31)$$

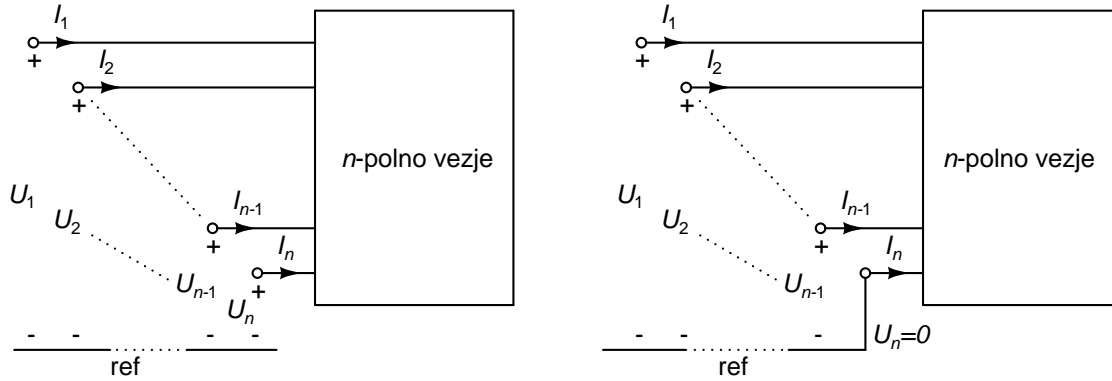


Slika 1.8: Dvopol.

Zaradi ohranitve naboja mora biti tok, ki teče v prvi priključek enak toku, ki odteka iz drugega priključka dvopola. Pojem linearnega dvopola lahko posplošimo na  $n$  priključkov in dobimo linearno  $n$ -polno vezje ali linearni  $n$ -pol (slika 1.9, levo).

Zaradi ohranitve naboja mora veljati

$$\sum_{k=1}^n I_n = 0. \quad (1.32)$$



Slika 1.9:  $n$ -polno vezje (levo) in orientacija s skupno  $n$ -to sponko (desno). Referenčni potencial je označen z ref.

Potenciali priključkov  $n$ -polnega vezja so merjeni proti nekemu referenčnemu potencialnemu nivoju. Zaradi linearnosti lahko vezje opišemo z  $n$  linearnimi enačbami

$$I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 + \dots + y_{1n}U_n, \quad (1.33)$$

$$I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 + \dots + y_{2n}U_n, \quad (1.34)$$

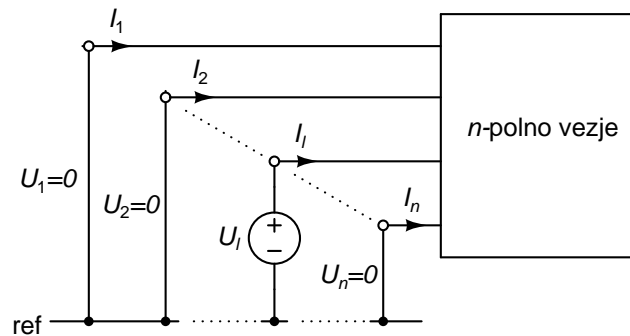
$$\vdots$$

$$I_n = y_{n1}U_1 + y_{n2}U_2 + \dots + y_{nn}U_n. \quad (1.35)$$

Čisto vseh linearnih vezij sicer ne moremo opisati na ta način. Problem nastopi pri vezjih, ki imajo priključke povezane s kratkimi stiki ali preko napetostnih virov. Kljub tej pomanjkljivosti bo za naše potrebe omenjeni opis zadoščal. Če koeficiente  $y_{kl}$  uredimo v matriko, lahko sistem enačb zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = [Y_N] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}. \quad (1.36)$$

Matriko  $[Y_N]$  imenujemo tudi **nedoločena admitančna matrika**  $n$ -polnega vezja.



Slika 1.10: Določanje koeficientov  $y_{kl}$  nedoločene admitančne matrike za linearno  $n$ -polno vezje.

Elemente  $l$ -tega stolpca v nedoločeni admitančni matriki določimo tako, da vse vhodne priključke, razen  $l$ -tega vezje nato vzbujamo z napetostnim virom na  $l$ -ti sponki in pomerimo tokove, ki

tečejo v sponke vezja (slika 1.10). Element, ki pripada  $k$ -ti vrstici dobimo kot

$$y_{kl} = \frac{I_k}{U_l} \Big|_{U_i=0 \ \forall i \neq l}. \quad (1.37)$$

Zaradi enačbe (1.32) mora biti vsota vseh tokov 0, kar lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} 0 = I_1 + I_2 + \cdots + I_n &= (y_{11} + y_{21} + \cdots + y_{n1})U_1 + \\ & (y_{12} + y_{22} + \cdots + y_{n2})U_2 + \\ & \cdots \\ & (y_{1n} + y_{2n} + \cdots + y_{nn})U_n \end{aligned} \quad (1.38)$$

To drži za poljubne napetosti samo, če so izrazi v oklepajih enaki 0, kar pa pomeni, da mora biti **vsota vseh elementov poljubnega stolpca matrike  $[Y_N]$  enaka 0**.

Vzemimo sedaj, da znižamo referenčni potencial za  $U_\Delta$ . Pri tem se vse vhodne napetosti  $U_k$  povečajo na  $U_k + U_\Delta$ . Ker sprememba referenčnega potenciala ne sme vplivati na delovanje vezja, morajo ostati vsi vhodni tokovi  $I_k$  nespremenjeni.

$$I_k = y_{k1}(U_1 + U_\Delta) + y_{k2}(U_2 + U_\Delta) + \cdots + y_{kn}(U_n + U_\Delta) \quad (1.39)$$

$$= y_{k1}U_1 + y_{k2}U_2 + \cdots + y_{kn}U_n + (y_{k1} + y_{k2} + \cdots + y_{kn})U_\Delta \quad (1.40)$$

Vhodni tok  $I_k$  mora ostati nespremenjen za poljubno vrednost  $U_\Delta$ . To je mogoče le, če je vsota koeficientov v oklepajih v enačbi (1.40) enaka 0. Sledi, da mora biti **vsota vseh elementov poljubne vrstice matrike  $[Y_N]$  enaka 0**.

Pogosto kot referenčni potencial izberemo kar potencial enega od priključkov  $n$ -polnega vezja. Brez škode za splošnost naših izpeljav lahko privzamemo, da je to  $n$ -ti priključek. Tedaj velja  $U_n = 0$ . Pravimo, da imamo  $n$ -polno vezje **v orientaciji s skupno  $n$ -to sponko** (slika 1.9, desno).

Tok v  $n$ -ti priključek lahko določimo iz preostalih tokov s pomočjo enačbe (1.32). Torej lahko zadnjo izmed enačb (1.33)-(1.35) izpustimo. Ostane

$$I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 + \cdots + y_{1(n-1)}U_{n-1}, \quad (1.41)$$

$$I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 + \cdots + y_{2(n-1)}U_{n-1}, \quad (1.42)$$

$$\vdots$$

$$I_{n-1} = y_{(n-1)1}U_1 + y_{(n-1)2}U_2 + \cdots + y_{(n-1)(n-1)}U_{n-1}. \quad (1.43)$$

Sistem lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1(n-1)} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{(n-1)1} & y_{(n-1)2} & \cdots & y_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

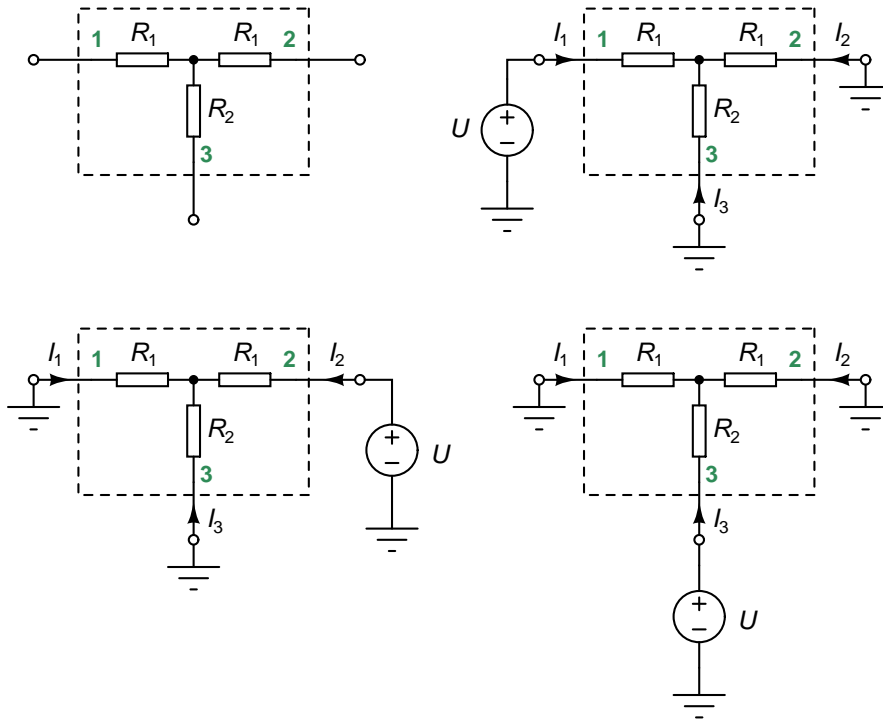
Matriko  $[Y]$  imenujemo tudi **admitančna matrika  $n$ -polnega vezja v orientaciji s skupno  $n$ -to sponko**. Vidimo, da ima enake elemente, kot nedoločena admitančna matrika, v kateri smo izbrisali  $n$ -to vrstico in  $n$ -ti stolpec. Da iz admitančne matrike določimo nedoločeno admitančno matriko, moramo določiti elemente izbrisane vrstice in stolpca, ki pripadata skupni sponki. To pa ni težko, saj vemo, da mora biti v nedoločeni admitančni matriki vsota elementov v vsakem stolpcu in v vsaki vrstici enaka 0.

Linearno  $n$ -polno vezje ima na svojih  $n$  priključkih  $n$  vhodnih tokov in  $n$  vhodnih napetosti merjenih napram referenčnemu potencialu. Zaradi ohranitve naboja mora biti vsota vseh  $n$  vhodnih tokov enaka 0. To pomeni, da lahko enega med njimi izrazimo s preostalimi  $n - 1$  tokovi. zadošča torej, da poznamo  $n - 1$  vhodnih tokov,  $n$ -tega pa lahko enostavno izrazimo kot

$$I_n = -(I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1}). \quad (1.45)$$

Vhodni tokovi v vezje se ne spremenijo, če spremenimo referenčni potencial. Izberimo  $U_\Delta = -U_n$ , zaradi česar postane vhodna napetost  $U_n$  enaka 0, vse ostale vhodne napetosti pa se zmanjšajo za  $U_n$ . Pri tem delovanje vezja ostane nespremenjeno,  $n$ -ta sponka pa postane referenčna sponka. Vidimo, da delovanje vezje določa  $n - 1$  vhodnih napetosti merjenih napram referenčni ( $n$ -ti) sponki.

Za opis  $n$ -polnega vezja zadošča torej  $n - 1$  napetosti in  $n - 1$  tokov, ki jih povezuje  $n - 1$  enačb. Da to drži, se lahko prepričamo na primeru dvopola. Dvopol ima  $n = 2$  priključka, opišemo pa ga lahko z enim vhodnim tokom  $I$  in eno vhodno napetostjo  $U$ , ki ju povezuje ena enačba (1.29).



Slika 1.11: Trojno vezje ali kratko tropol (levo zgoraj) in določanje parametrov  $y_{k1}$  (desno zgoraj),  $y_{k2}$  (levo spodaj) in  $y_{k3}$  (desno spodaj) nedoločene admitančne matrike tropola.

**Primer 1.4:** Za konec si pogledjmo še primer linearnega vezja s tremi priključki (tropola) na sliki 1.11 (levo zgoraj). Da določimo parametre prvega stolpca ( $l = 1$ ) nedoločene admitančne matrike, uporabimo vezavo na sliki 1.11 (desno zgoraj). Določimo najprej tokove v sponke vezja.

$$I_1 = -(I_2 + I_3) = \frac{U}{R_1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = U \frac{R_1 + R_2}{R_1(R_1 + 2R_2)}, \quad (1.46)$$

$$I_2 = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} I_1 = -U \frac{R_2}{R_1(R_1 + 2R_2)}, \quad (1.47)$$

$$I_3 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} I_1 = -U \frac{1}{R_1 + 2R_2}. \quad (1.48)$$

Iz enačb (1.46)-(1.48) sledijo parametri

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{U} \right|_{U_2=U_3=0} = \frac{R_1 + R_2}{R_1(R_1 + 2R_2)}, \quad (1.49)$$

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{U} \right|_{U_2=U_3=0} = -\frac{R_2}{R_1(R_1 + 2R_2)}, \quad (1.50)$$

$$y_{31} = \left. \frac{I_3}{U} \right|_{U_2=U_3=0} = -\frac{1}{R_1 + 2R_2}. \quad (1.51)$$

Za določanje parametrov drugega stolpca ( $l = 2$ ) uporabimo vezavo na sliki 1.11 (levo spodaj). Vezje je enako kot prejšnje vezje, le da  $I_1$  in  $I_2$  in s tem indeksa 1 in 2 zamenjata vlogi. Zato velja

$$y_{12} = y_{21} = -\frac{R_2}{R_1(R_1 + 2R_2)}, \quad (1.52)$$

$$y_{22} = y_{11} = \frac{R_1 + R_2}{R_1(R_1 + 2R_2)}, \quad (1.53)$$

$$y_{32} = y_{31} = -\frac{1}{R_1 + 2R_2}. \quad (1.54)$$

Slika 1.11 (desno spodaj) prikazuje določanje parametrov tretjega stolpca ( $l = 3$ ). Tokovi so sedaj enaki

$$I_3 = -(I_1 + I_2) = \frac{U}{R_2 + \frac{R_1 R_1}{R_1 + R_1}} = U \frac{2}{R_1 + 2R_2}, \quad (1.55)$$

$$I_1 = I_2 = -\frac{I_3}{2} = -U \frac{1}{R_1 + 2R_2}. \quad (1.56)$$

Sledijo še zadnji trije parametri

$$y_{13} = y_{23} = \left. \frac{I_1}{U} \right|_{U_1=U_2=0} = \left. \frac{I_2}{U} \right|_{U_1=U_2=0} = -\frac{1}{R_1 + 2R_2}, \quad (1.57)$$

$$y_{33} = \left. \frac{I_3}{U} \right|_{U_1=U_2=0} = \frac{2}{R_1 + 2R_2}. \quad (1.58)$$

Nedoločena admitančna matrika tropola je torej enaka

$$[Y_N] = \begin{bmatrix} \frac{R_1 + R_2}{R_1(R_1 + 2R_2)} & -\frac{R_2}{R_1(R_1 + 2R_2)} & -\frac{1}{R_1 + 2R_2} \\ -\frac{R_2}{R_1(R_1 + 2R_2)} & \frac{R_1 + R_2}{R_1(R_1 + 2R_2)} & -\frac{1}{R_1 + 2R_2} \\ -\frac{1}{R_1 + 2R_2} & -\frac{1}{R_1 + 2R_2} & \frac{2}{R_1 + 2R_2} \end{bmatrix}. \quad (1.59)$$

△

## 1.7 Delovna moč

Imejmo linearen dvopol (slika 1.8 s tokom ( $i(t)$ ) in napetostjo ( $u(t)$ )). Trenutna moč, ki se troši na dvopolu, je enaka

$$p(t) = u(t)i(t). \quad (1.60)$$

Če sta tok in napetost periodična s periodo  $T$ , dvopol troši povprečno moč, ki jo imenujemo tudi delovna moč

$$P = \overline{p(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt. \quad (1.61)$$

Predpostavimo sedaj, da sta napetost in tok izmenična ( $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \alpha)$ ,  $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \beta)$ ). Trenutno moč lahko zapišemo kot

$$p(t) = U_0 I_0 \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta) = \frac{U_0 I_0}{2} (\cos(2\omega t + \alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)). \quad (1.62)$$

Vidimo, da trenutna moč niha z dvakrat večjo frekvenco, kot napetost in tok. Ker je srednja vrednost člena  $\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$  enaka 0, dobimo za povprečno moč

$$P = \frac{U_0 I_0}{2} \cos(\alpha - \beta) = \mathcal{R}e \left( \frac{U_0 I_0}{2} e^{j(\alpha - \beta)} \right) = \mathcal{R}e \left( \frac{1}{2} U_0 e^{j\alpha} I_0 e^{-j\beta} \right). \quad (1.63)$$

Ker je  $(I_0 e^{j\beta})^* = I_0 e^{-j\beta}$ , dobimo

$$P = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(U I^*), \quad (1.64)$$

Delovno moč lahko izrazimo tudi s pomočjo admittance

$$P = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(U(YU)^*) = \frac{1}{2} |U|^2 \mathcal{R}e(Y^*) = \frac{1}{2} |U|^2 \mathcal{R}e(Y). \quad (1.65)$$

Če je realni del admittance negativen, je delovna moč negativna in dvopol oddaja moč v vezje. V tem primeru pravimo, da je dvopol **aktiven**. V nasprotnem primeru (če je  $\mathcal{R}e(Y) \geq 0$ ) je dvopol **pasiven**.

Podobno lahko delovno moč izrazimo tudi s pomočjo impedance

$$P = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(Z I I^*) = \frac{1}{2} |I|^2 \mathcal{R}e(Z). \quad (1.66)$$

Velja, da je dvopol aktiven, če je realni del impedance negativen. Opisane zveze lahko posplošimo na  $n$ -polno vezje (slika 1.9). Napetosti v  $n$ -polnem vezju so merjene proti poljubno izbranemu referenčnemu potencialu.

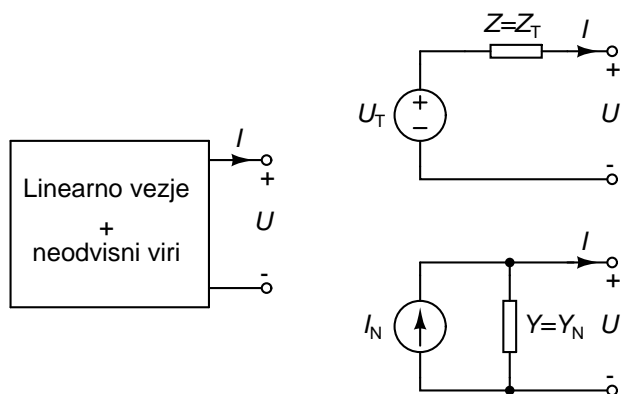
$$P = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mathcal{R}e(U_k I_k^*). \quad (1.67)$$

Če za referenčni potencialni nivo izberemo  $n$ -ti priključek vezja (orientacija s skupno  $n$ -to sponko), velja  $U_n = 0$  in v vsoti (1.67) odpade zadnji člen.

$$P = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{R}e(U_k I_k^*). \quad (1.68)$$

## 1.8 Théveninovo in Nortonovo nadomestno vezje, notranja impedanca vira

Imejmo vezje sestavljeno iz linearnih gradnikov in neodvisnih virov (slika 1.12, levo). Takemu vezju je enakovredno **Théveninovo nadomestno vezje**, ki je zgrajeno kot zaporedna vezava neodvisnega napetostnega vira  $U_T$



Slika 1.12: Dvopolno vezje iz linearnih gradnikov in neodvisnih virov (levo). Théveninovo (desno zgoraj) in Nortonovo (desno spodaj) nadomestno vezje.

in impedance  $Z_T$  (slika 1.12, desno zgoraj). Enak obnašanje lahko dosežemo tudi z **Nortonovim nadomestnim vezjem**, ki je zgrajeno kot vzporedno vezava neodvisnega tokovnega vira  $I_N$  in admittance  $Y_N$  (slika 1.12, desno spodaj). Zaradi enakovrednosti obeh nadomestnih vezij velja  $Z_T = 1/Y_N$  in  $U_T Y_N = I_N$ .

Gradnika Théveninovega nadomestnega vezja določimo tako, da pomerimo napetost  $U = U_0$  na odprtih sponkah vezja (ko je  $I = 0$ ) in kratkostični tok vezja  $I = I_0$  (ko je  $U=0$ ). Velja

$$U_T = U_0, \quad (1.69)$$

$$Z_T = \frac{U_0}{I_0}. \quad (1.70)$$

Impedanco  $Z_T$  lahko določimo tudi drugače. Izklopimo vse neodvisne vire v vezju (napetostne vire nadomestimo s kratkimi stiki, tokovne vire pa z odprtimi sponkami). Dobimo linearni dvopol za katerega lahko izračunamo impedanco med priključnima sponkama, ki je enaka kar  $Z_T$ .

Za gradnike Nortonovega nadomestnega vezja velja

$$I_N = I_0, \quad (1.71)$$

$$Y_N = \frac{I_0}{U_0}. \quad (1.72)$$

Admitanca  $Y_N$  je enaka admitanci linearnega dvopola, ki ga dobimo, če v vezju izklopimo vse neodvisne vire.

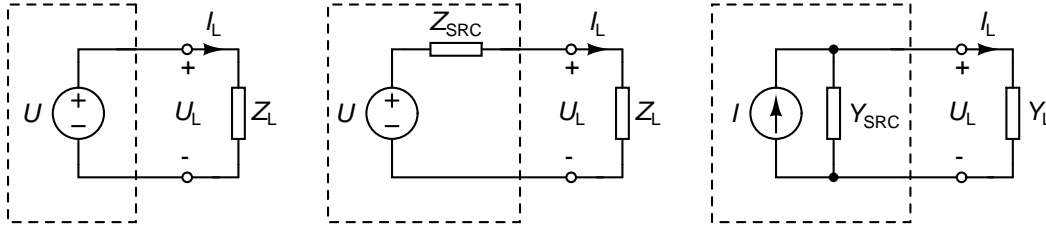
## 1.9 Razpoložljiva moč vira

Moč, ki jo vir izmeničnega signala posreduje bremenu je odvisna od bremena. Tako idealen napetostni vir (slika 1.13, levo) bremenu  $Z_L = 1/Y_L$  posreduje moč

$$P = \frac{\Re(U I^*)}{2} = \frac{\Re(U Y_L^* U^*)}{2} = \frac{|U|^2}{2} \Re(Y_L^*) = \frac{|U|^2}{2} \Re(Y_L). \quad (1.73)$$

Če admitanco bremena zapišemo kot  $Y_L = G_L + jB_L$ , kjer sta  $G_L$  in  $B_L$  njen realni in imaginarni del, dobimo

$$P = \frac{|U|^2 G_L}{2}. \quad (1.74)$$



Slika 1.13: Obremenjen idealen napetostni vir (levo), obremenjen realen napetostni vir (na sredini) in obremenjen realen tokovni vir (desno).

Vidimo, da je posredovana moč pri izbrani vrednosti  $U$  odvisna zgolj od bremena. Idealen napetostni vir lahko posreduje poljubno veliko moč bremenu s prevodnostjo  $G_L$ , če je slednja dovolj velika. Pri realnem napetostnem viru (slika 1.13, na sredini) to več ni mogoče, saj napetost na bremenu upada, tok skozi breme pa raste, ko manjšamo impedanco bremena. Moč, ki je produkt toka in napetosti, doseže svojo največjo vrednost pri nekem optimalnem bremenu. Zapišimo impedanco bremena kot  $Z_L = 1/Y_L = R_L + jX_L$ , notranjo impedanco vira pa kot  $Z_{SRC} = R_{SRC} + jX_{SRC}$ . Napetost na bremenu je določena z napetostnim delilnikom, ki ga tvorita  $Z_{SRC}$  in  $Z_L$ .

$$U_L = \frac{Z_L}{Z_L + Z_{SRC}} U. \quad (1.75)$$

Pri tem znaša tok skozi breme

$$I_L = \frac{U}{Z_L + Z_{SRC}}. \quad (1.76)$$

Delovna moč na bremenu znaša

$$P = \frac{|U|^2 \Re(Z_L)}{2|Z_L + Z_{SRC}|^2} = \frac{|U|^2}{2} \frac{R_L}{(R_L + R_{SRC})^2 + (X_L + X_{SRC})^2}. \quad (1.77)$$

Da poiščemo ekstrem moči, odvajamo po  $R_L$  in  $X_L$  ter oba odvoda izenačimo z 0.

$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{(R_L + R_{SRC})^2 + (X_L + X_{SRC})^2 - 2R_L(R_L + R_{SRC})}{((R_L + R_{SRC})^2 + (X_L + X_{SRC})^2)^2} = 0 \quad (1.78)$$

$$\frac{dP}{dX_L} = \frac{2R_L(X_L + X_{SRC})}{((R_L + R_{SRC})^2 + (X_L + X_{SRC})^2)^2} = 0 \quad (1.79)$$

Iz enačbe (1.79) sledi  $X_L = -X_{SRC}$ . Ko dobljeno vstavimo v enačbo (1.78), dobimo še  $R_L = R_{SRC}$ . Posredovana moč je torej največja pri impedanci bremena

$$Z_L = R_{SRC} - jX_{SRC} = Z_{SRC}^*. \quad (1.80)$$

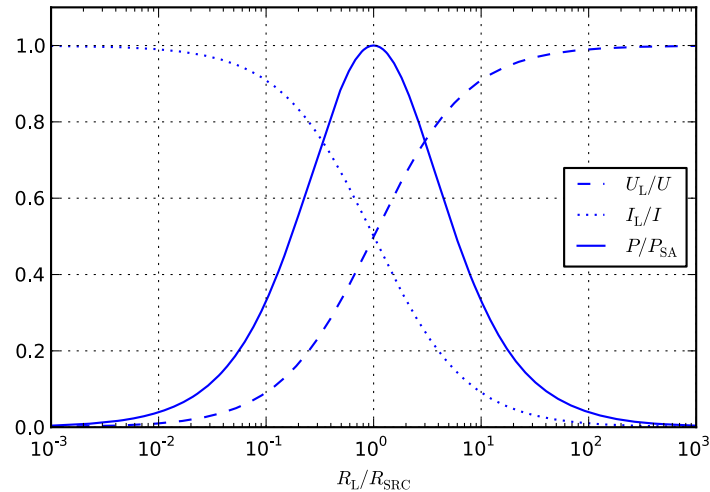
Pravimo, da je tedaj **breme prilagojeno na vir**. Največji moči, ki jo realen napetostni vir lahko posreduje bremenu, pravimo **razpoložljiva moč vira**. Ko enačbo (1.80) vstavimo v enačbo (1.77), ugotovimo, da je razpoložljiva moč vira enaka

$$P_{SA} = \frac{|U|^2}{8R_{SRC}} = \frac{|U|^2}{8\Re(Z_{SRC})} = \frac{|U|^2 |Y_{SRC}|^2}{8\Re(Y_{SRC})}. \quad (1.81)$$

Podobno bi za razpoložljivo moč realnega tokovnega vira (slika 1.13, desno) dobili

$$P_{SA} = \frac{|I|^2}{8G_{SRC}} = \frac{|I|^2}{8\Re(Y_{SRC})} = \frac{|I|^2 |Z_{SRC}|^2}{8\Re(Z_{SRC})}. \quad (1.82)$$





Slika 1.14: Tok in napetost realnega napetostnega vira in moč na bremenu v odvisnosti od impedance bremena, ko velja  $Z_{\text{SRC}} = R_{\text{SRC}}$  in  $Z_L = R_L$ .  $Z I$  je označen kratkostični tok vira  $U/R_{\text{SRC}}$ .

Če zapišemo notranjo admitanco vira kot  $Y_{\text{SRC}} = G_{\text{SRC}} + jB_{\text{SRC}}$ , vir posreduje največjo moč, ko velja

$$Y_L = G_{\text{SRC}} - jB_{\text{SRC}} = Y_{\text{SRC}}^* \quad (1.83)$$

Za poenostavljen primer, ko sta notranja impedanca vira in impedanca bremena realni, razmere prikazuje slika 1.14.

## 1.10 Vhodne in prevajalne funkcije

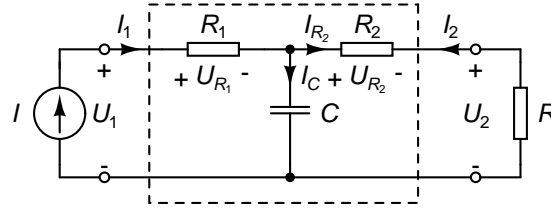
**Prevajalna funkcija** je kvocient med dvema kompleksorjema v vezju. Pri tem sta lahko tako ena kot druga veličina tok ali napetost. Tako se kvocient med dvema napetostima imenuje **napetostno ojačenje** (označimo ga z  $A_U$ ), kvocient med dvema tokovoma pa **tokovno ojačenje** ( $A_I$ ). Kadar se obe veličini nanašata na isti par sponk vezja, imenujemo prevajalno funkcijo kar **vhodna funkcija vezja**.

Če se napetost in tok nanašata na isti par sponk, imenujemo njun kvocient **impedanca** ( $Z$ ) oziroma **admitanca** ( $Y$ ). Če se tok nanaša na en par sponk vezja, napetost pa na nek drug par sponk, govorimo o **transimpedanci** in **transadmitanci**.

Če par sponk predstavlja vhod vezja, govorimo o **vhodni impedanci** ( $Z_{\text{in}}$ ) oziroma **vhodni admitanci** ( $Y_{\text{in}}$ ). Kadar par sponk predstavlja izhod vezja, govorimo o **izhodni impedanci** ( $Z_{\text{out}}$ ) oziroma **izhodni admitanci** ( $Y_{\text{out}}$ ).

**Primer 1.5:** Poglejmo si vse skupaj na primeru vezja, ki ga podaja slika 1.15. Določimo tokova  $I_1$  in  $I_2$  ter napetosti  $U_1$  in  $U_2$ . Tok  $I_{R_2}$  nastane z deljenjem toka  $I_1$  na delilniku, ki ga tvorijo kondenzator  $C$  ter zaporedno vezana upora  $R_2$  in  $R$ .

$$I_{R_2} = \frac{\frac{1}{R_2 + R}}{\frac{1}{R_2 + R} + j\omega C} I_1 = \frac{1}{1 + j\omega(R_2 + R)C} I_1 \quad (1.84)$$



Slika 1.15: Dvovhodno vezje (označeno s črtkano črto), ki ga vzbuja tokovni virom  $I$  na vohdu in obremenimo z uporom  $R$  na izhodu.  $U_1$  in  $I_1$  sta vhodni veličini,  $U_2$  in  $I_2$  pa izhodni veličini vezja.

Tok  $I_1$  enak toku vira  $I$ , tok  $I_2$  pa toku  $-I_{R_2}$ , zato velja

$$I_1 = I, \quad (1.85)$$

$$I_2 = -\frac{1}{1 + j\omega(R_2 + R)C}I. \quad (1.86)$$

Tok  $I_1$  pušča padec napetosti na upor  $R_1$ , tok  $I_{R_2}$  pa na uporih  $R_2$  in  $R$ .

$$U_{R_1} = R_1 I_1 = R_1 I, \quad (1.87)$$

$$U_{R_2} = R_2 I_{R_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega(R_2 + R)C}I, \quad (1.88)$$

$$U_2 = R I_{R_2} = \frac{R}{1 + j\omega(R_2 + R)C}I. \quad (1.89)$$

Napetost  $U_1$  je enaka vsoti napetosti  $U_{R_1}$ ,  $U_{R_2}$  in  $U_2$ .

$$U_1 = \left( R_1 + \frac{R_2 + R}{1 + j\omega(R_2 + R)C} \right) I. \quad (1.90)$$

Vidimo, da so vse veličine v vezju prenosorazmerne z vzbujanjem  $I$ . To je osnovna lastnost linearnih vezij, ki smo jo omenili že v poglavju 1.1. Napetostno in tokovno ojačenje vezja sta

$$A_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R_1 + R_2 + R + j\omega R_1(R_2 + R)C}, \quad (1.91)$$

$$A_I = \frac{I_2}{I_1} = -\frac{1}{1 + j\omega(R_2 + R)C}. \quad (1.92)$$

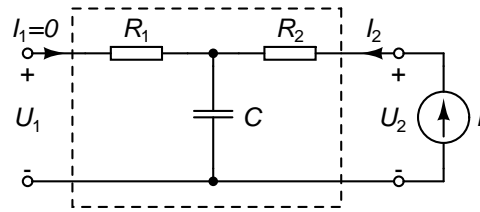
Vidimo, da sta absolutni vrednosti napetostnega in tokovnega ojačenja manjši od 1. Določimo še vhodno impedanco vezja

$$Z_{in} = \frac{U_1}{I_1} = R_1 + \frac{R_2 + R}{1 + j\omega(R_2 + R)C}. \quad (1.93)$$

Transadmitanca od vhodne napetosti  $U_1$  do izhodnega toka  $I_2$  znaša

$$Y_{21} = \frac{I_2}{U_1} = \frac{1}{R_1 + R_2 + R + j\omega R_1(R_2 + R)C}. \quad (1.94)$$

Vidimo, da so vse prevajalne funkcije vezja odvisne od njegove zaključitve na izhodu (upornosti  $R$ ).



Slika 1.16: Določanje izhodne impedanace vezja.

Izhodna impedanca je tista, ki jo čuti breme  $R$  na svojih sponkah. Na žalost je ne moremo določiti kot kvocient  $U_2$  in  $I_2$  v vezju na sliki 1.15, saj v tem primeru dobimo za izhodno impedanco kar  $R$ . Za določitev izhodne impedanace moramo izklopiti vzbujanje na vходу vezja ( $I = 0$ ). Namesto tega pričnemo vezje vzbujati na izhodu (slika 1.16). Določimo padec napetosti  $U_2$ , ki ga povzroča tok  $I$  na zaporedni vezavi upora  $R_2$  in kondenzatorja  $C$ .

$$U_2 = \left( R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) I. \quad (1.95)$$

Če upoštevamo še, da je  $I_2 = I$ , dobimo izhodno impedanco

$$Z_{\text{out}} = \frac{U_2}{I_2} = R_2 + \frac{1}{j\omega C}. \quad (1.96)$$

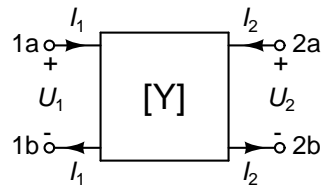
Tudi izhodna impedanca je odvisna od zaključitve vezja. Tokrat seveda od zaključitve na vходу. V našem primeru smo dobili izhodno impedanco za vezje, ki je na vходу zaključeno z odprtimi sponkami. Če bi imeli na vходу drugačno zaključitev (naprimer kratek stik), bi tudi izhodna impedanca bila drugačna.  $\triangle$



## 2

# Dvovhodna vezja

Dvovhodno vezje (ali v nekoliko ponesrečenem prevodu četveropol) je vezje s štirimi priključki (slika 2.1). Tok, ki teče v priključek 1a, je enak toku, ki teče iz priključka 1b. Enako velja za tok v priključek 2a in tok iz priključka 2b. **Pravimo, da je dvovhodno vezje v tokovnem ravnovesju.**



Slika 2.1: Dvovhodno vezje.

Z dvovhodnim vezjem so povezane štiri veličine: napetosti  $U_1$  in  $U_2$  ter tokova  $I_1$  in  $I_2$ . Priključek 1b predstavlja referenčni priključek (- sponko) za napetost  $U_1$ , priključek 2b pa igra enako vlogo za napetost  $U_2$ . Dvovhodna vezja so pogosto uporabljena za opis (modeliranje) linearnih vezij kot so ojačevalniki, filtri, oscilatorji, ipd.

Priključka 1a in 1b ponavadi imenujemo **vhod**, priključka 2a in 2b pa **izhod** vezja. Posledično sta  $I_1$  in  $U_1$  vhodni veličini,  $I_2$  in  $U_2$  pa izhodni.

## 2.1 Karakterizacija dvovhodnih vezij

Dvovhodno vezje vzpostavi dve povezavi (enačbi) med veličinami  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $I_1$  in  $I_2$  s čimer zmanjša število prostih veličin na dve. Enako dvovhodno vezje lahko v večini primerov opišemo na več načinov, odvisno od tega, kateri dve veličini si izberemo kot neodvisni spremenljivki. Koeficienti v enačbah, ki opisujejo dvovhodno vezje, so v splošnem frekvenčno odvisni.

### 2.1.1 Admitančni in impedančni parametri

Če si za neodvisni spremenljivki izberemo  $U_1$  in  $U_2$ , dvovhodno vezje opišemo z naslednjim sistemom enačb

$$I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2, \quad (2.1)$$

$$I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2. \quad (2.2)$$

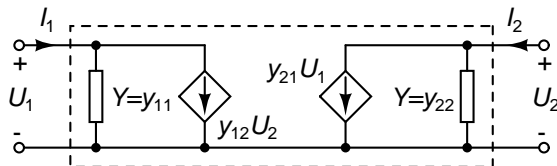
Če predpostavimo, da so tokovi in napetosti v vezju izmenični in zato opisani s pripadajočimi kompleksorji, so parametri  $y_{11}$ ,  $y_{12}$ ,  $y_{21}$  in  $y_{22}$  kompleksna števila, ki imajo enoto prevodnosti ( $S = A/V$ ). Imenujemo jih tudi

**admitančni parametri dvovhodnega vezja.** Včasih jih razbijemo na realni in imaginarni del

$$y_{kl} = g_{kl} + jb_{kl}. \quad (2.3)$$

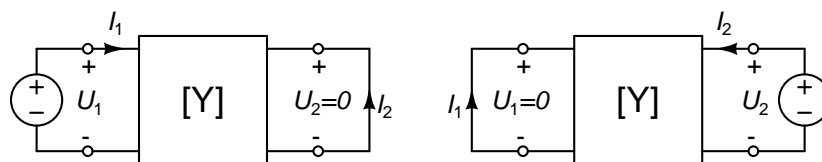
Admitančne parametre lahko uredimo v matriko in enačbi (2.1)-(2.2) zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$



Slika 2.2: Model dvovhodnega vezja izražen z admitančnimi parametri.

Nadomestno vezje poljubnega dvovhodnega vezja opisanega z admitančnimi parametri je podano na sliki 2.2.



Slika 2.3: Določanje parametrov  $y_{11}$  in  $y_{21}$  (levo) ter  $y_{12}$  in  $y_{22}$  (desno).

Da določimo admitančne parametre, moramo opraviti meritve na dveh priključitvah vezja. Najprej kratko sklenemo izhod ( $U_2 = 0$ ), vezje vzbujamo z napetostnim virom na vходу in pomerimo tokova  $I_1$  in  $I_2$  (slika 2.3, levo). Iz enačb (2.1)-(2.2) sledi

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0}, \quad (2.5)$$

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0}. \quad (2.6)$$

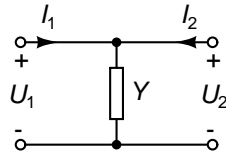
Pri drugi meritvi kratko sklenemo vhod ( $U_1 = 0$ ), vezje vzbujamo z napetostnim virom na izhodu in spet pomerimo oba tokova (slika 2.3, desno). Iz rezultatov lahko določimo še druga dva parametra.

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0}, \quad (2.7)$$

$$y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0}. \quad (2.8)$$

Čeprav predstavljajo admitančni parametri splošen način za opis dvovhodnega vezja, pa ne moremo z njimi opisati poljubnih vezij. Primer vezja, ki ga ne moremo opisati, je na sliki 2.4. Poglejmo zakaj. Recimo, da kratko sklenemo izhod vezja ( $U_2 = 0$ ). Enačba (2.1) tako postane

$$I_1 = y_{11}U_1 \quad (2.9)$$



Slika 2.4: Vezje, ki ga ne moremo opisati z admitančnimi parametri.

Parameter  $y_{11}$  lahko izrazimo kot  $y_{11} = \frac{I_1}{U_1}$ . Ker kratko sklenjen izhod vezja na sliki 2.4 predstavlja neskončno prevodnost, je koeficient  $y_{11}$ , ki predstavlja prevodnost med vhodnima sponkama, neskončen. Admitančni parametri za vezje na sliki 2.4 ne obstajajo.

Če si kot neodvisni veličini izberemo tokova  $I_1$  in  $I_2$ , lahko dvovhodno vezje opišemo z enačbama

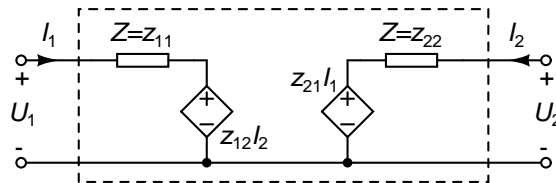
$$U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2, \quad (2.10)$$

$$U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2. \quad (2.11)$$

ki ju lahko zapišemo v matrični obliki kot

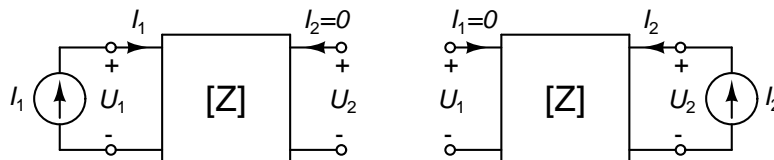
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Parametre  $z_{11}$ ,  $z_{12}$ ,  $z_{21}$  in  $z_{22}$  imenujemo **impedančni parametri dvovhodnega vezja**. Ti parametri imajo enoto impedance ( $\Omega = \text{V/A}$ ).



Slika 2.5: Model dvovhodnega vezja izražen z impedančnimi parametri.

Nadomestno vezje poljubnega dvovhodnega vezja opisanega z impedančnimi parametri je podano na sliki 2.5.

Slika 2.6: Določanje parametrov  $z_{11}$  in  $z_{21}$  (levo) ter  $z_{12}$  in  $z_{22}$  (desno).

Da določimo impedančne parametre, moramo opraviti meritve na dveh priključitvah vezja. Najprej ob odprtem izhodu ( $I_2 = 0$ ) vezje vzbujamo s tokovnim virom na vходу in pomerimo napetosti  $U_1$  in  $U_2$  (slika 2.6, levo). Iz enačb (2.10)-(2.11) sledi

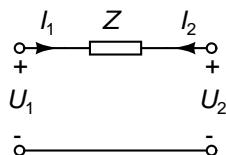
$$z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}, \quad (2.13)$$

$$z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0}. \quad (2.14)$$

Pri drugi meritvi vezje vzbujamo s tokovnim virom na izhodu ob odprtem vhodu ( $I_1 = 0$ ) in spet pomerimo obe napetosti (slika 2.6, desno). Iz rezultatov sledita še preostala dva parametra.

$$z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}, \quad (2.15)$$

$$z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}. \quad (2.16)$$



Slika 2.7: Vezje, ki ga ne moremo opisati z impedančnimi parametri.

Tudi z impedančnimi parametri ne moremo opisati poljubnih vezij. Primer vezja, ki ga ne moremo opisati, je na sliki 2.7. Razlaga je podobna, kot pri admitančnih parametrih, le da tokrat obravnavamo primer, ko je izhod odprt ( $I_2 = 0$ ). Tako vezje bi lahko opisali z admitančnimi parametri.

Admitančni parametri se pogosto uporabljajo pri analizi vezja. Ti parametri so v tesni povezavi z vozliščno metodo pisanja enačb vezja. Programi za računalniško analizo vezij (kot npr. SPICE [4]) večinoma uporabljajo vozliščno metodo za zapis enačb, ki jih nato numerično rešujejo. Impedančni parametri so manj pogosti. Srečamo jih predvsem v določenih izpeljavah, saj je nekatera vezja lažje analizirati z zančno metodo. Ta je tesno povezana z impedančnimi parametri.

## 2.1.2 Hibridni parametri

Če kot neodvisni spremenljivki izberemo  $I_1$  in  $U_2$ , dobimo naslednji enačbi za opis dvovhodnega vezja

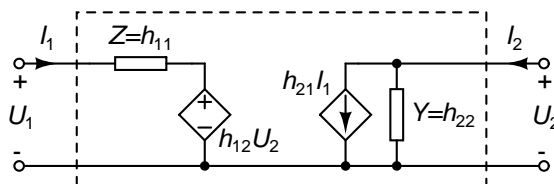
$$U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2, \quad (2.17)$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2. \quad (2.18)$$

Koeficienti  $h_{11}$ ,  $h_{12}$ ,  $h_{21}$  in  $h_{22}$  se imenujejo tudi **hibridni  $h$  parametri dvovhodnega vezja**.  $h_{11}$  ima naravo impedance (enota  $\Omega = \text{V/A}$ ),  $h_{22}$  pa naravo admittance (enota  $\text{S} = \text{A/V}$ ).  $h_{12}$  in  $h_{21}$  sta po naravi napetostno in tokovno ojačenje, zato sta brezdimenzijski veličini.

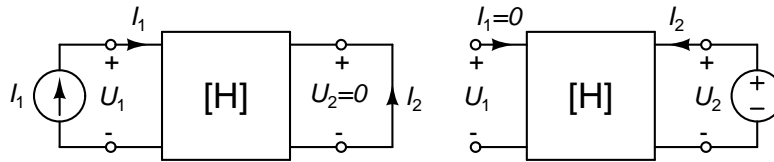
Enačbi (2.17)-(2.18) lahko zapišemo tudi v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{H}] \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$



Slika 2.8: Model dvovhodnega vezja izražen s hibridnimi  $h$  parametri.



Slika 2.9: Določanje parametrov  $h_{11}$  in  $h_{21}$  (levo) ter  $h_{12}$  in  $h_{22}$  (desno).

Nadomestno vezje poljubnega dvovhodnega vezja opisanega s hibridnimi  $h$  parametri je podano na sliki 2.8.

Da določimo hibridne  $h$  parametre, moramo opraviti meritve na dveh priključitvah vezja. Najprej ob kratko sklenjenem izhodu ( $U_2 = 0$ ) vezje vzbujaemo s tokovnim virom na vходу in pomerimo napetost  $U_1$  ter tok  $I_2$  (slika 2.9, levo). Iz enačb (2.17)-(2.18) sledi

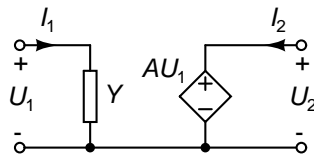
$$h_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{U_2=0}, \quad (2.20)$$

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{U_2=0}. \quad (2.21)$$

Pri drugi meritvi vezje vzbujaemo z napetostnim virom na izhodu ob odprtem vходу ( $I_1 = 0$ ) in pomerimo napetost  $U_1$  in tok  $I_2$  (slika 2.9, desno). Velja

$$h_{12} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_1=0}, \quad (2.22)$$

$$h_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{I_1=0}. \quad (2.23)$$

Slika 2.10: Vezje, ki ga ne moremo opisati s hibridnimi  $h$  parametri.

Tudi hibridni  $h$  parametri niso univerzalni, saj obstajajo vezja, katerih ne moremo opisati s temi parametri. Primer takega vezja je na sliki 2.10. To vezje je preprost linearen napetostni ojačevalnik z ojačenjem  $A$  in vhodno admitanco  $Y$ . Ko želimo določiti  $h_{21}$ , ugotovimo, da ob kratko sklenjenem izhodu krmiljen napetostni vir požene neskončno velik tok  $I_2$  za vsako napetost  $U_1 \neq 0$ . Torej je  $h_{21}$  neskončen in zato hibridni  $h$  parametri za vezje na sliki 2.10 ne obstajajo.

Hibridni  $h$  parametri se pogosto uporabljajo za podajanje lastnosti bipolarnih tranzistorjev za majhne signale (ponavadi za orientacijo s skupnim emitorjem). V podatkovnih listih tranzistorjev so ponavadi označeni nekoliko drugače, in sicer  $h_{ie} = h_{11}$ ,  $h_{fe} = h_{21}$ ,  $h_{re} = h_{12}$  in  $h_{oe} = h_{22}$ .

Poleg hibridnih  $h$  parametrov poznamo tudi **hibridne  $k$  parametre**, pri katerih sta neodvisni veličini  $U_1$  in  $I_2$ . Enačbi, ki določata obnašanje dvovhodnega vezja s pomočjo teh parametrov, sta

$$I_1 = k_{11}U_1 + k_{12}I_2, \quad (2.24)$$

$$U_2 = k_{21}U_1 + k_{22}I_2. \quad (2.25)$$

Hibridni  $k$  parametri se redko uporabljajo.

### 2.1.3 Verižni parametri

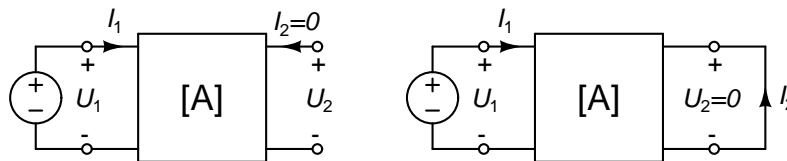
Pri verižnih parametrih izberemo kot neodvisni veličini  $U_2$  in  $-I_2$ . Enačbi se v tem primeru glasita

$$U_1 = a_{11}U_2 - a_{12}I_2, \quad (2.26)$$

$$I_1 = a_{21}U_2 - a_{22}I_2. \quad (2.27)$$

oziroma v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$



Slika 2.11: Določanje verižnih parametrov  $a_{11}$  in  $a_{21}$  (levo) ter  $a_{12}$  in  $a_{22}$  (desno).

Za določanje verižnih parametrov najprej vezje ob odprtem izhodu ( $I_2 = 0$ ) vzbujamo z napetostnim virom na vходу in pomerimo napetost  $U_2$  ter tok  $I_1$  (slika 2.11, levo). Iz enačb (2.26)-(2.27) sledi

$$a_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0}, \quad (2.29)$$

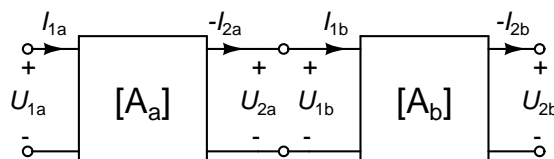
$$a_{21} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0}. \quad (2.30)$$

Pri drugi meritvi vezje vzbujamo z napetostnim virom na vходу ob kratko sklenjenem izhodu ( $U_2 = 0$ ) in pomerimo tokova  $I_1$  in  $I_2$  (slika 2.11, desno).

$$a_{12} = - \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{U_2=0}, \quad (2.31)$$

$$a_{22} = - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_2=0}. \quad (2.32)$$

Vidimo, da v imenovalcu zmeraj nastopa izhodna veličina. Če vhod vezja ne more vplivati na izhod (to se zgodi, če je naprimer  $y_{21} = 0$ ), je izhodna veličina zmeraj enaka 0 in vsaj en verižni parameter neskončen. Tedaj verižni parametri ne obstajajo.



Slika 2.12: Kaskadna vezava dvovhodnih vezij.

Verižni parametri pridejo prav pri analizi kaskad dvovhodnih vezij (slika 2.12). Velja namreč

$$\begin{bmatrix} U_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = [A_a] \begin{bmatrix} U_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = [A_a] \begin{bmatrix} U_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = [A_a] [A_b] \begin{bmatrix} U_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} U_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Vidimo, da je matrika verižnih parametrov kaskadne vezave dvovhodnih vezij enaka produktu matrik verižnih parametrov posameznih vezij.

Če bi kot neodvisni veličini izbrali  $U_1$  in  $-I_1$  bi dobili obratne verižne parametre. Ti parametri ne obstajajo, če izhod vezja ne more vplivati ne vhod (npr. ko je  $y_{12} = 0$ ).

### 2.1.4 Pretvarjanje parametrov

Obstaja cela vrsta parametrov s katerimi lahko opišemo dvovhodna vezja. Če poznamo ene parametre, lahko vse druge določimo računsko. Pri tem „obrnemo enačbe“ tako, da dobimo željene parametre. Da bo zapis enačb enostavnejši, vpeljemo za determinanto parametrov „ $x$ “ oznako  $D_x = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$ .

Poglejmo si naprimer **pretvorbo hibridnih  $h$  parametrov v admitančne parametre**. Izhajamo iz enačb vezja za hibridne  $h$  parametre (2.17)-(2.18). Iz enačbe (2.17) lahko izrazimo  $I_1$

$$I_1 = \frac{1}{h_{11}}U_1 - \frac{h_{12}}{h_{11}}U_2. \quad (2.34)$$

Dobljeni  $I_1$  vstavimo v enačbo (2.18) in dobimo

$$I_2 = h_{21} \left( \frac{1}{h_{11}}U_1 - \frac{h_{12}}{h_{11}}U_2 \right) + h_{22}U_2 = \frac{h_{21}}{h_{11}}U_1 + \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{h_{11}}U_2. \quad (2.35)$$

Če enačbi (2.34) in (2.35) primerjamo z enačbama (2.1) in (2.2), dobimo

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{D_h}{h_{11}} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Do pretvorbe admitančnih parametrov v hibridne  $h$  parametre pridemo po podobni poti.

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_{11}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{D_y}{y_{11}} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Ker sta neodvisni veličini pri admitančnih parametrih ( $U_1$  in  $U_2$ ) odvisni veličini pri impedančnih (in obratno), je **pretvorba admitančnih v impedančne parametre** pravzaprav invertiranje matrike admitančnih parametrov

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = [Y]^{-1} = \frac{1}{D_y} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Enako velja za **pretvorbo impedančnih v admitančne parametre**

$$[Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = [Z]^{-1} = \frac{1}{D_z} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Tudi hibridni  $h$  parametri so povezani s hibridnimi  $k$  parametri z operacijo invertiranja matrike parametrov.

Pri pretvorbi admitančnih parametrov v verižne izhajamo iz enačbe (2.2), iz katere izrazimo  $U_1$

$$U_1 = -\frac{y_{22}}{y_{21}}U_2 + \frac{1}{y_{21}}I_2. \quad (2.40)$$

Dobljeno vstavimo v enačbo (2.1) in po preureditvi dobimo

$$I_1 = y_{11} \left( -\frac{y_{22}}{y_{21}}U_2 + \frac{1}{y_{21}}I_2 \right) + y_{12}U_2 = -\frac{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}{y_{21}}U_2 + \frac{y_{11}}{y_{21}}I_2. \quad (2.41)$$

S primerjavo enačb (2.40) in (2.41) z enačbama (2.26) in (2.27), dobimo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{D_y}{y_{21}} & -\frac{y_{11}}{y_{21}} \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

**Pretvorba verižnih parametrov v admitančne** poteka podobno (iz enačbe (2.26) izrazimo  $I_2$ , ga vstavimo v enačbo (2.27) in dobljeno primerjamo z enačbama (2.40) in (2.41))

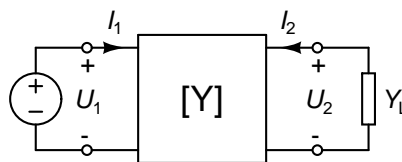
$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{12}} & -\frac{D_a}{a_{12}} \\ -\frac{1}{a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{12}} \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

## 2.2 Vhodne in prevajalne funkcije

Najpogostejše vhodne in prevajalne funkcije dvovhodnih vezij bomo izrazili z admitančnimi parametri, saj se le-ti najpogosteje uporabljajo pri analizi vezij.

### 2.2.1 Napetostno ojačenje

Napetostno ojačenje je kvocient med izhodno in vhodno napetostjo dvovhodnega vezja. Označujemo ga z  $A_U$ . Ponavadi nas zanima kako se spreminja napetostno ojačenje, če spreminjamo admitanco zaključitve izhoda ( $Y_L$ , glej sliko 2.13).



Slika 2.13: Dvovhodno vezje z zaključenim izhodom.

Če upoštevamo, da mora zaradi zaključitve  $Y_L$  veljati

$$I_2 = -Y_L U_2, \quad (2.44)$$

lahko enačbo (2.1) preoblikujemo v

$$-Y_L U_2 = y_{21} U_1 + y_{22} U_2. \quad (2.45)$$

Od tod sledi

$$A_U = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{y_{21}}{y_{22} + Y_L} \quad (2.46)$$

Vidimo, da napetostno ojačenje upada, ko raste prevodnost zaključitve. Največje ojačenje dobimo, če kot zaključitev uporabimo odprte sponke ( $Y_L = 0$ ).

$$A_{U,\max} = A_U|_{Y_L=0} = -\frac{y_{21}}{y_{22}} \quad (2.47)$$

### 2.2.2 Tokovno ojačenje

Tokovno ojačenje je kvocient med izhodnim in vhodnim tokom dvovhodnega vezja. Označujemo ga z  $A_I$ . Pona vadi nas zanima kako se spreminja, če spreminjamo impedanco zaključitve izhoda ( $Z_L = 1/Y_L$ ).

Zaradi zaključitve  $Z_L$  velja

$$U_2 = -Z_L I_2. \quad (2.48)$$

Iz enačbe (2.1) izrazimo  $U_1$  in v dobljeno zvezo vstavimo (2.48).

$$U_1 = \frac{1}{y_{11}} (I_1 - y_{12} U_2) = \frac{1}{y_{11}} (I_1 + y_{12} Z_L I_2) \quad (2.49)$$

Sedaj v enačbo (2.2) vstavimo (2.48) in (2.49).

$$I_2 = \frac{y_{21}}{y_{11}} (I_1 + y_{12} Z_L I_2) - y_{22} Z_L I_2 \quad (2.50)$$

Preuredimo člene

$$I_2 \left( 1 + \frac{y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21}}{y_{11}} Z_L \right) = \frac{y_{21}}{y_{11}} I_1 \quad (2.51)$$

in izrazimo

$$A_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{y_{21}}{y_{11} + (y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21}) Z_L} = \frac{y_{21}}{y_{11} + D_y Z_L} \quad (2.52)$$

kjer smo z  $D_y$  označili determinanto admitančnih parametrov  $y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21}$ . Vidimo, da je tokovno ojačenje največje, kadar kot zaključitev uporabimo kratek stik ( $Z_L = 0$ ).

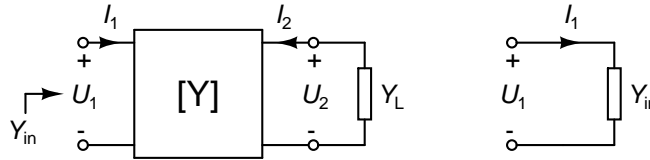
$$A_{I,\max} = A_I|_{Z_L=0} = \frac{y_{21}}{y_{11}} \quad (2.53)$$

### 2.2.3 Vhodna in izhodna admitanca

Kadar govorimo o vhodni admitanci, nas zanima razmerje med vhodnim tokom in napetostjo. Vhod z  $Y_L$  zaključenega vezja se obnaša kot admitanca  $Y_{in}$  (slika 2.14).

Začnemo z enačbo (2.1) v katero vstavimo zvezo med vhodno in izhodno napetostjo, ki jo določa napetostno ojačenje (2.46).

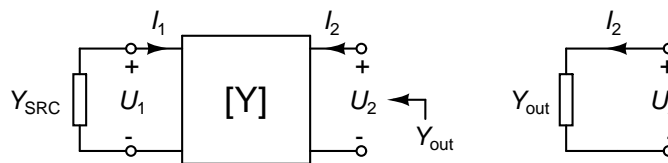
$$I_1 = y_{11} U_1 + y_{12} A_U U_1 = \left( y_{11} - y_{12} \frac{y_{21}}{y_{22} + Y_L} \right) U_1 \quad (2.54)$$



Slika 2.14: Dvovhodno vezje z zaključenim izходом (levo) in pripadajoče nadomestno vezje vhoda vezja (desno).

Sledi vhodna admitanca

$$Y_{\text{in}} = \frac{I_1}{U_1} = y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22} + Y_L}. \quad (2.55)$$



Slika 2.15: Dvovhodno vezje z zaključenim vhomom (levo) in pripadajoče nadomestno vezje izhoda vezja (desno).

Izhodna admitanca je odvisna od zaključitve na vhodu ( $Y_{\text{SRC}}$ ) (slika 2.15). Izpeljava je enaka, kot za vhodno admitanco, le da v tem primeru vhod in izhod zamenjata vlogi (ideksa 1 in 2 se zamenjata), namesto napetostnega ojačenja pa uporabimo reverzno napetostno ojačenje  $A_{\text{UR}}$ , ki ga dobimo, če vzbujanje vezja preselimo na izhod, odziv pa opazujemo na vhodu. To ojačenje je odvisno od zaključitve na vhodu ( $Y_{\text{SRC}}$ ) in znaša

$$A_{\text{UR}} = \frac{U_1}{U_2} = -\frac{y_{12}}{y_{11} + Y_{\text{SRC}}}. \quad (2.56)$$

na koncu za izhodno admitanco dobimo

$$Y_{\text{out}} = \frac{I_2}{U_2} = y_{22} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{11} + Y_{\text{SRC}}}. \quad (2.57)$$

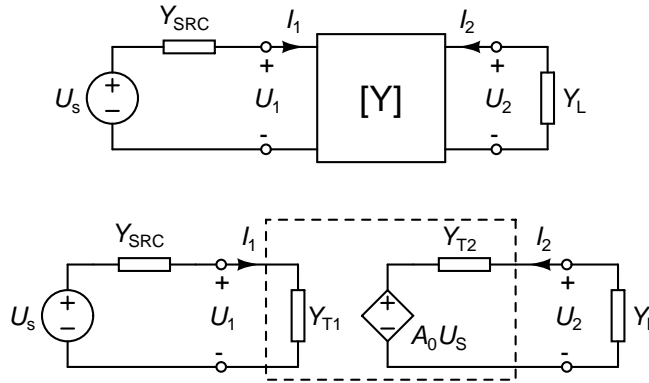
Vidimo, da zaključitev ne vpliva na vhodno in izhodno admitanco, če velja bodisi  $y_{12} = 0$  bodisi  $y_{21} = 0$ . Takrat je vhodna admitanca enaka  $y_{11}$ , izhodna admitanca pa  $y_{22}$ . Za konec dodajmo še, da je vhodna impedanca definirana kot  $Z_{\text{in}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{1}{Y_{\text{in}}}$ , izhodna impedanca pa kot  $Z_{\text{out}} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{1}{Y_{\text{out}}}$ .

## 2.2.4 Nadomestno vezje pri krmiljenju na vhodni strani

Recimo, da imamo dvovhodno vezje, ki mu na vhod priključimo napetostni vir z notranjo admitanco  $Y_{\text{SRC}}$ , izhod pa obremenimo z admitanco  $Y_L$ . Ker je dvovhodno vezje linearno, lahko vhod in izhod dvovhodnega vezja nadomestimo s pripadajočim Théveninovim nadomestnim vezjem (slika 2.16). Nadomestno vezje vhodne strani, ki ga predstavlja admitanca  $Y_{\text{T1}}$ , ne vsebuje napetostnega vira, saj je izhod dvovhodnega vezja zaključen samo z admitanco  $Y_L$ . Nadomestno vezje izhoda vsebuje poleg admitance  $Y_{\text{T2}}$  še krmiljen napetostni vir  $A_0 U_s$ , ki predstavlja vhodno vzbujanje ( $U_s$ ) prenešeno na izhodno stran.

Gradniki nadomestnega vezja so odvisni tako od admitančnih parametrov dvovhodnega vezja, kot tudi od zaključitve ( $Y_{\text{SRC}}$  in  $Y_L$ ).  $Y_{\text{T1}}$  je kar vhodna admitanca pri izhodu zaključenem z  $Y_L$  (enačba (2.55)).

$$Y_{\text{T1}} = Y_{\text{in}}(Y_L) = y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22} + Y_L}. \quad (2.58)$$



Slika 2.16: Dvovhodno vezje s signalnim virom na vohu in zaključitveno admittanco na izhodu (zgoraj) in pripadajoče Théveninovo nadomestno vezje vohda in izhoda (spodaj).

Vzemimo sedaj, da je  $U_s = 0$ . V tem primeru se krmiljen vir  $A_0 U_s$  obnaša kot kratek stik in dobimo vezje, ki je enako tistemu na sliki 2.15. Torej velja, da je admittanca  $Y_{T2}$  enaka kar izhodni admittanci pri vohu zaključenem z  $Y_{SRC}$  (enačba (2.57)).

$$Y_{T2} = Y_{out}(Y_{SRC}) = y_{22} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{11} + Y_{SRC}}. \quad (2.59)$$

Da bomo lahko določilo  $A_0$ , si najprej pogledimo napetostno ojačenje od vira  $U_s$  do zaključenega izhoda ( $U_2$ ), ki ga imenujemo tudi **napetostno ojačenje z upoštevanjem admittance vira**.

$$A_{US} = \frac{U_2}{U_s} = \frac{U_1}{U_s} \cdot \frac{U_2}{U_1}. \quad (2.60)$$

Prvi kvocient je določen z delilnikom napetosti med  $Y_{SRC}$  in  $Y_{T1}$

$$\frac{U_1}{U_s} = \frac{Y_{SRC}}{Y_{SRC} + Y_{T1}} = \frac{Y_{SRC}(y_{22} + Y_L)}{(y_{11} + Y_{SRC})(y_{22} + Y_L) - y_{12}y_{21}}, \quad (2.61)$$

drugi kvocient pa je enak napetostnemu ojačenju

$$\frac{U_2}{U_1} = A_U = -\frac{y_{21}}{y_{22} + Y_L}. \quad (2.62)$$

Ko oba združimo, dobimo

$$A_{US} = -\frac{Y_{SRC}y_{21}}{(y_{11} + Y_{SRC})(y_{22} + Y_L) - y_{12}y_{21}}. \quad (2.63)$$

Za določitev  $A_0$ , odstranimo zaključitev na izhodni strani ( $Y_L = 0$ ). Ker je sedaj izhod neobremenjen, velja  $U_2 = A_0 U_s$ . V (2.63) vstavimo  $Y_L = 0$  in dobimo

$$A_0 = A_{US}|_{Y_L=0} = -\frac{Y_{SRC}y_{21}}{(y_{11} + Y_{SRC})y_{22} - y_{12}y_{21}}. \quad (2.64)$$

Vidimo, da je ojačenje  $A_0$  odvisno samo od lastnosti vira (notranje admittance  $Y_{SRC}$ ) in admitančnih parametrov dvovhodnega vezja.

### 2.2.5 Ojačenje moči

Za razlago ojačenja moči bomo uporabili kar nadomestno vezje na sliki 2.16. Označimo realni del vhodne admittance z  $G_{\text{in}} = \mathcal{R}e(Y_{\text{in}})$ , realni del admittance bremena pa z  $G_L = \mathcal{R}e(Y_L)$ . Moč, ki jo dvovhodno vezje troši na svojem vhodu, znaša

$$P_1 = \frac{\mathcal{R}e(U_1 I_1^*)}{2} = \frac{|U_1|^2}{2} \mathcal{R}e(Y_{\text{in}}^*) = \frac{|U_1|^2}{2} G_{\text{in}}. \quad (2.65)$$

Dvovhodno vezje daje moč, ki se troši na bremenu (zaključitev izhoda z  $Y_L$ )

$$P_2 = \frac{\mathcal{R}e(-U_2 I_2^*)}{2} = \frac{|U_2|^2}{2} \mathcal{R}e(Y_L^*) = \frac{|U_2|^2}{2} G_L. \quad (2.66)$$

**Ojačenje moči (power gain)** je definirano kot

$$A_P = \frac{P_2}{P_1} = -\frac{\mathcal{R}e(U_2 I_2^*)}{\mathcal{R}e(U_1 I_1^*)}. \quad (2.67)$$

Če sta napetostno in tokovno ojačenje realna, velja

$$A_P = -\frac{\mathcal{R}e(A_U U_1 (A_I I_1)^*)}{\mathcal{R}e(U_1 I_1^*)} = -A_U A_I. \quad (2.68)$$

Iz (2.65)-(2.67) sledi, da je ojačenje moči enako

$$A_P = \left| \frac{U_2}{U_1} \right|^2 \frac{G_L}{G_{\text{in}}} = |A_U|^2 \frac{G_L}{G_{\text{in}}}. \quad (2.69)$$

Tako vhodna admittance ( $Y_{\text{in}}$ ) kot napetostno ojačenje  $A_U$  sta odvisna samo od admitančnih parametrov in zaključitve na izhodu vezja ( $Y_L$ ). Odtod sledi, da je ojačenje moči za neko dano dvovhodno vezje odvisno zgolj od zaključitve na izhodu ( $Y_L$ ).

$$A_P(Y_L) = \left| \frac{y_{21}}{y_{22} + Y_L} \right|^2 \frac{G_L}{\mathcal{R}e\left(y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22} + Y_L}\right)} = \frac{|y_{21}|^2 G_L}{|y_{22} + Y_L|^2 \mathcal{R}e\left(y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22} + Y_L}\right)}. \quad (2.70)$$

Ker ojačenje moči v enačbi (2.70) ni odvisno od notranje admittance vira, nam daje zgolj informacijo o tem za koliko se ojači moč, ki na vhodu vstopi v dvovhodno vezje. Nič pa ne izvemo o tem, kolikšen del razpoložljive moči vira vstopa v vezje. Ta delež je odvisen od vhodne admittance vezja in od notranje admittance vira. V skrajnem primeru je lahko zelo majhen, kar pomeni, da nam veliko ojačenje moči ne koristi kaj dosti, saj se ojačuje le majhen del razpoložljive moči vira.

Za vir  $U_s$  z notranjo admittance  $Y_{\text{SRC}}$  je **razpoložljiva moč vira** enaka

$$P_{\text{SA}} = \frac{|U_s|^2 |Y_{\text{SRC}}|^2}{8 \mathcal{R}e(Y_{\text{SRC}})} = \frac{|U_s|^2 |Y_{\text{SRC}}|^2}{8 G_{\text{SRC}}}, \quad (2.71)$$

pri čemer smo z  $G_{\text{SRC}}$  označili realni del admittance bremena  $Y_{\text{SRC}}$ . Boljše merilo za ojačenja moči je kvocient med močjo na bremenu in razpoložljivo močjo vira, ki ga imenujemo **ojačenje prenosa moči** ali tudi **koristno ojačenje moči** (ang. **transducer power gain**).

$$G_T = \frac{P_2}{P_{\text{SA}}} = \frac{\frac{|U_2|^2 G_L}{2}}{\frac{|U_s|^2 |Y_{\text{SRC}}|^2}{8 G_{\text{SRC}}}} = \frac{4 G_L G_{\text{SRC}}}{|Y_{\text{SRC}}|^2} \left| \frac{U_2}{U_s} \right|^2 = \frac{4 G_L G_{\text{SRC}}}{|Y_{\text{SRC}}|^2} |A_{\text{US}}|^2. \quad (2.72)$$



Ko v (2.73) vstavimo (2.63), dobimo

$$G_T(Y_{\text{SRC}}, Y_L) = \frac{4G_L G_{\text{SRC}} |y_{21}|^2}{|(y_{11} + Y_{\text{SRC}})(y_{22} + Y_L) - y_{12}y_{21}|^2}. \quad (2.73)$$

Koristno ojačenje moči je za dano dvovhodno vezje odvisno tako od notranje admitance vira, kot tudi od admitance bremena. V nadomestnem vezju na sliki 2.16 je ojačenje  $A_0$  odvisno le od admitančnih parametrov in notranje admitance vira  $Y_{\text{SRC}}$ . Torej je moč, ki jo breme dobi iz izhoda vezja, pri nekem  $Y_{\text{SRC}}$  in  $U_s$  odvisna samo še od bremena ( $Y_L$ ). V tem pogledu lahko govorimo o **razpoložljivi moči na izhodu vezja**. Ta je odvisna od izhodne admitance vezja in znaša

$$P_{\text{outA}} = \frac{|A_0 U_s|^2 |Y_{\text{out}}|^2}{8\Re(Y_{\text{out}})} = \frac{|A_0 U_s|^2 |Y_{\text{out}}|^2}{8G_{\text{out}}}, \quad (2.74)$$

pri čemer smo z  $G_{\text{out}}$  označili realni del izhodne admitance  $Y_{\text{out}}$ .

Poleg ojačenja moči in koristnega ojačenja moči je v uporabi še eno merilo - **razpoložljivo ojačenje moči (available power gain)**. Slednje je definirano kot kvocient med razpoložljivo močjo na izhodu vezja in razpoložljivo močjo vira

$$G_A = \frac{P_{\text{outA}}}{P_{\text{SA}}} = \frac{\frac{|A_0 U_s|^2 |Y_{\text{out}}|^2}{8G_{\text{out}}}}{\frac{|U_s|^2 |Y_{\text{SRC}}|^2}{8G_{\text{SRC}}}} = |A_0| \cdot \left| \frac{Y_{\text{out}}}{Y_{\text{SRC}}} \right|^2 \cdot \frac{G_{\text{SRC}}}{G_{\text{out}}}. \quad (2.75)$$

Po tem, ko v enačbo (2.75) vstavimo enačbi (2.64) in (2.57), dobimo

$$G_A(Y_{\text{SRC}}) = \frac{|y_{21}|^2 G_{\text{SRC}}}{|y_{11} + Y_{\text{SRC}}|^2 \Re\left(y_{22} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{11} + Y_{\text{SRC}}}\right)} \quad (2.76)$$

Vidimo, da je razpoložljivo ojačenje moči za dano dvovhodno vezje odvisno samo od notranje admitance vira na vhodu vezja. Moč, ki jo vir posreduje na vhod vezja, je zmeraj manjša ali kvečjemu enaka razpoložljivi moči vira ( $P_1 \leq P_{\text{SA}}$ ). Od tod sledi

$$G_T = \frac{P_2}{P_{\text{SA}}} \leq \frac{P_2}{P_1} = A_P. \quad (2.77)$$

Podobno je moč, ki se troši na bremenu, manjša ali enaka razpoložljivi moči na izhodu vezja ( $P_2 \leq P_{\text{outA}}$ ). To pomeni, da velja

$$G_T = \frac{P_2}{P_{\text{SA}}} \leq \frac{P_{\text{outA}}}{P_{\text{SA}}} = G_A. \quad (2.78)$$

Koristno ojačenje moči ( $G_T$ ) je najmanjše med vsemi tremi merili za ojačenje moči ( $G_T$ ,  $A_P$  in  $G_A$ ). Ko spremenjamo notranjo admitanco vira  $Y_{\text{SRC}}$  pri neki dani vrednosti  $Y_L$ , se spreminja moč  $P_1$ , ki vstopa v vezje. Pri neki optimalni vrednosti  $Y_{\text{SRC}} = Y_{\text{in}}^*$  postane moč, ki vstopa v vezje, enaka razpoložljivi moči vira ( $P_1 = P_{\text{SA}}$ ). Tedaj velja  $A_P = P_2/P_1 = P_2/P_{\text{SA}}$ , ojačenje moči  $A_P$  pa je enako koristnemu ojačenju moči  $G_T$ . Zapišemo lahko zvezo

$$\begin{aligned} \max_{Y_{\text{SRC}}} G_T(Y_{\text{SRC}}, Y_L) &= \max_{Y_{\text{SRC}}} \frac{A_P(Y_L) P_1(Y_{\text{SRC}})}{P_{\text{SA}}(Y_{\text{SRC}})} = A_P(Y_L) \max_{Y_{\text{SRC}}} \frac{P_1(Y_{\text{SRC}})}{P_{\text{SA}}(Y_{\text{SRC}})} \\ &= A_P(Y_L) \left. \frac{P_1(Y_{\text{SRC}})}{P_{\text{SA}}(Y_{\text{SRC}})} \right|_{Y_{\text{SRC}}=Y_{\text{in}}^*} = A_P(Y_L). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Recimo, da spreminjamo admitanco bremena  $Y_L$  pri neki dani vrednosti  $Y_{SRC}$ . Pri tem se spreminja moč  $P_2$ , ki jo troši breme. Pri neki optimalni vrednosti  $Y_L = Y_{out}^*$  postane moč  $P_2$  enaka razpoložljivi moči na izhodu vezja ( $P_{outA}$ ). Tedaj velja  $G_A = P_{outA}/P_{SA} = P_2/P_{SA}$ , razpoložljivo ojačenje moči  $G_A$  pa je enako koristnemu ojačenju moči  $G_T$ . Zapišemo lahko

$$\begin{aligned} \max_{Y_L} G_T(Y_{SRC}, Y_L) &= \max_{Y_L} \frac{P_2(Y_L)}{P_{SA}(Y_{SRC})} = \frac{1}{P_{SA}(Y_{SRC})} \max_{Y_L} P_2(Y_L) \\ &= \frac{1}{P_{SA}(Y_{SRC})} P_2(Y_L)|_{Y_L=Y_{out}^*} = \frac{P_{outA}(Y_{SRC})}{P_{SA}(Y_{SRC})} = G_A(Y_{SRC}). \end{aligned} \quad (2.80)$$

## 2.3 Splošne lastnosti dvovhodnih vezij

### 2.3.1 Recipročnost

Če dvovhodne vezje vzbujamo na vhodni strani z napetostnim virom  $U_1 = U$ , izhod pa obremenimo s kratkim stikom (slika 2.17, zgoraj levo) ( $U_2 = 0$ ), je tok na izhodni strani enak

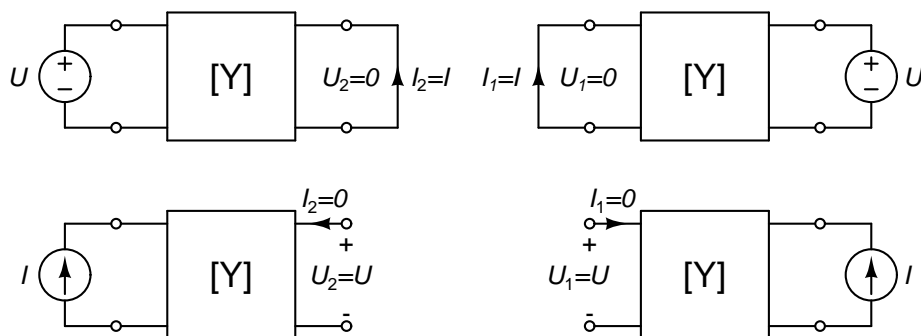
$$I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 = y_{21}U. \quad (2.81)$$

Če prenesemo vzbujanje na izhodno stran ( $U_2 = U$ ), kratak stik pa na vodno stran ( $U_1 = 0$ ), velja (slika 2.17, zgoraj desno)

$$I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 = y_{12}U. \quad (2.82)$$

Tok je v obeh primerih enak, če je vezje **recipročno**. Recipročnost lahko izrazimo z admitančnimi parametri s pogojem

$$y_{12} = y_{21}. \quad (2.83)$$



Slika 2.17: Recipročnost dvovhodnega vezja pri napetostnem vzbujanju (zgoraj) in tokovnem vzbujanju (spodaj).

Recipročnost velja tudi za vzbujanje s tokovnim virom, le da moramo v tem primeru opazovati napetost odprtih sponk na drugi strani vezja: Pri vzbujanju na vhodni strani (slika 2.17, spodaj levo) imamo

$$I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 = I, \quad (2.84)$$

$$I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 = 0. \quad (2.85)$$

Iz enačbe (2.85) dobimo

$$U_1 = -\frac{y_{22}}{y_{21}}U_2. \quad (2.86)$$

Ko (2.86) vstavimo v enačbo (2.84) dobimo

$$-\frac{y_{11}y_{22}}{y_{21}}U_2 + y_{12}U_2 = I. \quad (2.87)$$

in nato

$$U_2 = \frac{y_{21}}{y_{12}y_{21} - y_{11}y_{22}}I. \quad (2.88)$$

Če zamenjamo stran vzbujanja (slika 2.17, spodaj desno), dobimo

$$U_1 = \frac{y_{12}}{y_{12}y_{21} - y_{11}y_{22}}I. \quad (2.89)$$

Iz  $U_1 = U_2$  dobimo pogoj (2.83).

### 2.3.2 Aktivnost in pasivnost

Moč, ki jo troši dvovhodno vezje, je enaka

$$P = \frac{1}{2}\Re(U_1I_1^* + U_2I_2^*) = \frac{1}{2}\Re(U_1^*I_1 + U_2^*I_2). \quad (2.90)$$

Po vstavitvi enačb (2.1)-(2.2) dobimo

$$P = \frac{1}{2}\Re(y_{11}U_1U_1^* + y_{12}U_2U_1^* + y_{21}U_1U_2^* + y_{22}U_2U_2^*). \quad (2.91)$$

**Dvovhodno vezje je aktivno, če je celotna moč, ki jo vezje troši, negativna ( $P < 0$ ).** Vezje tedaj odda več moči, kot je prejme. Nasprotje aktivnosti je pasivnost. **Pasivna vezja prejemajo vsaj toliko energije, kot je oddajajo ( $P \geq 0$ ).** Poglejmo si najprej dva posebna primera. Recimo, da je  $U_1 = 0$  (kratek stik na vhodu vezja). Pogoj za pasivnost se tedaj glasi

$$\frac{1}{2}\Re(y_{22}U_2U_2^*) = \frac{1}{2}\Re(y_{22})|U_2|^2 = \frac{1}{2}g_{22}|U_2|^2 \geq 0, \quad (2.92)$$

kar zaradi  $|U_2|^2 \geq 0$  lahko zapišemo kot

$$g_{22} \geq 0. \quad (2.93)$$

Podobno bi ob kratkem stiku na izhodu pasivnega vezja ( $U_2 = 0$ ) dobili pogoj

$$g_{11} \geq 0. \quad (2.94)$$

Za vse ostale primere izpostavimo  $U_1U_1^* = |U_1|^2$  iz enačbe (2.91).

$$P = \frac{1}{2}|U_1|^2\Re\left(y_{11} + y_{12}\frac{U_2}{U_1} + y_{21}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^* + y_{22}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^*\frac{U_2}{U_1}\right). \quad (2.95)$$

Označimo kompleksno razmerje  $U_2/U_1$  z  $A = A_r + jA_i$ . Dobimo

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}|U_1|^2 \Re(y_{11} + y_{12}A + y_{21}A^* + y_{22}AA^*) \\ &= \frac{1}{2}|U_1|^2 (g_{11} + (g_{12} + g_{21})A_r - (b_{12} - b_{21})A_i + g_{22}(A_r^2 + A_i^2)). \end{aligned} \quad (2.96)$$

O pasivnosti vezja bo odločala najnižja vrednost moči  $P$ . Poiščimo zato tisto vrednost  $A$ , kjer nastopi ekstrem  $P$ . Odvajajmo po  $A_r$  in izenačimo z nič. Dobimo enačbo

$$g_{12} + g_{21} + 2g_{22}A_r = 0 \quad (2.97)$$

iz katere sledi

$$A_r = -\frac{g_{12} + g_{21}}{2g_{22}}. \quad (2.98)$$

Z odvajanjem (2.96) po  $A_i$  in izenačitvijo z nič dobimo še drugo enačbo, ki nam da

$$A_i = \frac{b_{12} - b_{21}}{2g_{22}}. \quad (2.99)$$

Izraza (2.98) in (2.99) vstavimo v (2.96) in dobimo

$$P = \frac{1}{2}|U_1|^2 \left( g_{11} - \frac{(g_{12} + g_{21})^2 + (b_{12} - b_{21})^2}{4g_{22}} \right) = \frac{1}{2}|U_1|^2 \left( g_{11} - \frac{|y_{12} + y_{21}^*|^2}{4g_{22}} \right). \quad (2.100)$$

Če upoštevamo, da za pasivno vezje velja  $g_{22} \geq 0$  (pogoj (2.93)), dobimo še tretji pogoj za pasivnost.

$$4g_{11}g_{22} - |y_{12} + y_{21}^*|^2 \geq 0. \quad (2.101)$$

**Pogoji za pasivnost vezja** so torej

$$g_{11} \geq 0 \quad (2.102)$$

$$g_{22} \geq 0 \quad (2.103)$$

$$4g_{11}g_{22} \geq |y_{12} + y_{21}^*|^2 \quad (2.104)$$

Če katerikoli od pogojev (2.102)-(2.104) ni izpolnjen, je vezje aktivno. Če ni izpolnjen pogoj (2.102) ali (2.103), pravimo, da je dvovhodno vezje **aktivno zaradi negativnih vhodnih admitanc**. Pri gradnikih vezij linearne elektronike (kot npr. tranzistorjih) jo le redko zasledimo. Če sta prva dva pogoja za pasivnost izpolnjena, pogoj (2.104) pa ni, govorimo o **prevajalni aktivnosti**. Ta nastopi, ko velja

$$g_{11} \geq 0, \quad (2.105)$$

$$g_{22} \geq 0, \quad (2.106)$$

$$4g_{11}g_{22} < |y_{12} + y_{21}^*|^2. \quad (2.107)$$

Preoblikujmo izraz  $|y_{12} + y_{21}^*|^2$ .

$$\begin{aligned} |y_{12} + y_{21}^*|^2 &= |y_{12} - y_{21} + y_{21} + y_{21}^*|^2 = |y_{12} - y_{21} + 2g_{21}|^2 \\ &= (y_{12} - y_{21} + 2g_{21})(y_{12} - y_{21} + 2g_{21})^* \\ &= |y_{12} - y_{21}|^2 + 2g_{21}(y_{12} - y_{21} + y_{12}^* - y_{21}^*) + 4g_{21}^2 \\ &= |y_{12} - y_{21}|^2 + 2g_{21}(2g_{12} - 2g_{21}) + 4g_{21}^2 \\ &= |y_{12} - y_{21}|^2 + 4g_{12}g_{21}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Dobljeno vstavimo v pogoj (2.107) in preuredimo

$$4(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) < |y_{12} - y_{21}|^2. \quad (2.109)$$

Če velja  $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} < 0$ , je vezje prevajalno aktivno, saj je desna stran (2.109) zmeraj večja ali enaka 0. Vendar ta primer pri fizikalnih elementih (kot npr. tranzistorjih) nastopi le redko. Ponavadi velja  $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \geq 0$ . Tedaj lahko (2.109) zapišemo kot

$$U = \frac{|y_{12} - y_{21}|^2}{4(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})} > 1. \quad (2.110)$$

Številu  $U$  pravimo **mera aktivnosti** (zaradi oznake ga ne smemo zamenjati z napetostjo, ki jo prav tako označujemo z  $U$ ). V literaturi ga najdemo tudi pod imenom **Masonova invariants** [5]. Vrednost  $U$  nekega tropola je neodvisna od njegove orientacije (več o orientaciji tropolov najdemo v poglavju 3.4).

Za aktivne elektronske komponente (npr. tranzistorje) mera aktivnosti pada, ko frekvenca raste. Od neke frekvence  $f_{\max}$  naprej ( $f > f_{\max}$ ) postane  $U < 1$ . Nad frekvenco  $f_{\max}$  take komponente ne moremo uporabljati za ojačenje moči, saj tedaj ni sposobna oddati več moči, kot je prejema.

**Primer 2.1:** Izrazimo Masonovo invariants z impedančnimi parametri.

Admitančne parametre z impedančnimi poveže (2.39).

$$[Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = [Z]^{-1} = \frac{1}{D_z} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}, \quad (2.111)$$

Velja  $D_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$ . Števec  $U$  je tako enak

$$|y_{12} - y_{21}|^2 = \frac{|-z_{12} + z_{21}|^2}{|D_z|^2} = \frac{|z_{12} - z_{21}|^2}{|D_z|^2}. \quad (2.112)$$

Izrazimo realne dele admitančnih parametrov.

$$g_{11} = \Re(y_{11}) = \Re\left(\frac{z_{22}D_z^*}{|D_z|^2}\right) = \frac{1}{|D_z|^2} (r_{22}\Re(D_z) + x_{22}\Im(D_z)), \quad (2.113)$$

$$g_{12} = -\frac{1}{|D_z|^2} (r_{12}\Re(D_z) + x_{12}\Im(D_z)), \quad (2.114)$$

$$g_{21} = -\frac{1}{|D_z|^2} (r_{21}\Re(D_z) + x_{21}\Im(D_z)), \quad (2.115)$$

$$g_{22} = \frac{1}{|D_z|^2} (r_{11}\Re(D_z) + x_{11}\Im(D_z)). \quad (2.116)$$

V imenovalcu  $U$  imamo

$$g_{11}g_{22} = \frac{1}{|D_z|^4} (r_{11}r_{22}\Re^2(D_z) + (r_{11}x_{22} + r_{22}x_{11})\Re(D_z)\Im(D_z) + x_{11}x_{22}\Im^2(D_z)), \quad (2.117)$$

$$g_{12}g_{21} = \frac{1}{|D_z|^4} (r_{12}r_{21}\Re^2(D_z) + (r_{12}x_{21} + r_{21}x_{12})\Re(D_z)\Im(D_z) + x_{12}x_{21}\Im^2(D_z)). \quad (2.118)$$

Če upoštevamo  $\Re(D_z) = r_{11}r_{22} - x_{11}x_{22} - r_{12}r_{21} + x_{12}x_{21}$  in  $\Im(D_z) = r_{11}x_{22} + r_{22}x_{11} - r_{12}x_{21} - r_{21}x_{12}$ , dobimo

$$\begin{aligned} g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} &= \frac{(r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})\Re^2(D_z) + (\Re(D_z) + x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})\Im^2(D_z)}{|D_z|^4} \\ &= \frac{(r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})(\Re^2(D_z) + \Im^2(D_z))}{|D_z|^4} = \frac{(r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})}{|D_z|^2}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Če združimo (2.112) in (2.119), dobimo

$$U = \frac{|z_{12} - z_{21}|^2}{4(r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21})}. \quad (2.120)$$

Vidimo, da ima izraz za  $U$  enako obliko tako za admitančne, kot tudi za impedančne parametre.  $\triangle$

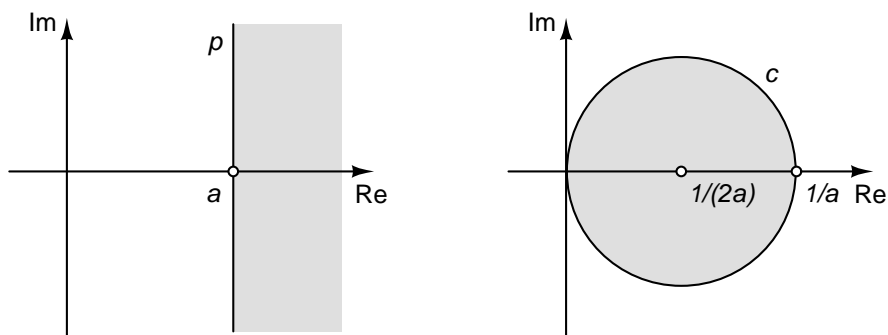
### 2.3.3 Absolutna stabilnost in potencialna nestabilnost

Če dvovhodno vezje zaključimo na izhodu z admitanco  $Y_L$ , postane to vezje (gledano z vhodne strani) dvopol z admitanco  $Y_{in}$  (slika 2.14). Če vezje zaključimo na vходу z admitanco  $Y_{SRC}$ , dobimo na izhodni strani dvopol z admitanco  $Y_{out}$  (slika 2.15). Velja

$$Y_{in} = \frac{I_1}{U_1} = y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22} + Y_L}, \quad (2.121)$$

$$Y_{out} = \frac{I_2}{U_2} = y_{22} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{11} + Y_{SRC}}. \quad (2.122)$$

Če kot zaključitev  $Y_L$  oziroma  $Y_{SRC}$  izbiramo pasivne dvopole, rezultat pa je zmeraj pasiven dvopol na vходу oziroma izhodu (realni del  $Y_{in}$  in  $Y_{out}$  sta zmeraj večja ali enaka 0), pravimo, da je dvovhodno vezje **absolutno stabilno**. Absolutno stabilnega vezja ne moremo pripraviti do tega, da bi zanihalo, če ga zaključujemo s pasivnimi dvopoli. Nasprotje absolutne stabilnosti je **potencialna nestabilnost**.



Slika 2.18: Inverzija premice  $p$ , ki je vzporedna imaginarni osi in seka realno os pri vrednosti  $a$  (levo). Rezultat preslikave je krožnica  $c$  s središčem v točki  $\frac{1}{2a}$  na realni osi in polmerom  $\frac{1}{2a}$ . Polravnina, ki leži desno od premice  $p$  se preslika v notranjost krožnice  $c$ .

Preden se lotimo izpeljave pogojev za absolutno stabilnost, si pogledjmo kompleksno operacijo, ki ji pravimo inverzija. Inverzija je preslikava kompleksnega števila  $z$  v njegovo obratno vrednost  $z^{-1}$ . Zanima nas, kako inverzija preslika točke, ki ležijo na premicah vzporednih z imaginarno osjo (slika 2.18, levo). Točke na vzporednici z imaginarno osjo ( $p$ ), ki seka realno os pri  $a$ , lahko zapišemo kot

$$z = a + jy; \quad y \in (-\infty, \infty), \quad (2.123)$$

oziroma v polarnem zapisu

$$z = \sqrt{a^2 + y^2} e^{j\varphi} = \frac{a}{\cos \varphi} e^{j\varphi} \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.124)$$

Določimo, kje ležijo točke, ki jih dobimo s preslikavo  $z^{-1}$ .

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{2 \cos \varphi e^{-j\varphi}}{2a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{2 \cos \varphi (\cos \varphi - j \sin \varphi) - 1}{2a} + \frac{1}{2a} \\ &= \frac{\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) - 2j \cos(\varphi) \sin(\varphi)}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{\cos(2\varphi) - j \sin(2\varphi)}{2a} + \frac{1}{2a} \\ &= \frac{e^{-j2\varphi}}{2a} + \frac{1}{2a}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Ko  $\varphi$  preleti interval  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , točke  $e^{-j2\varphi}$  opišejo krožnico s polmerom 1 in središčem v koordinatnem izhodišču. Preslikane točke zato ležijo na krožnici  $c$  s središčem v točki  $\frac{1}{2a}$  na realni osi in polmerom  $\frac{1}{2a}$  (slika 2.18, desno). Pri tem se točke iz neskončnosti preslikajo v koordinatno izhodišče, točke s polravnine, ki leži desno od premice  $p$ , pa v notranjost krožnice  $c$ .

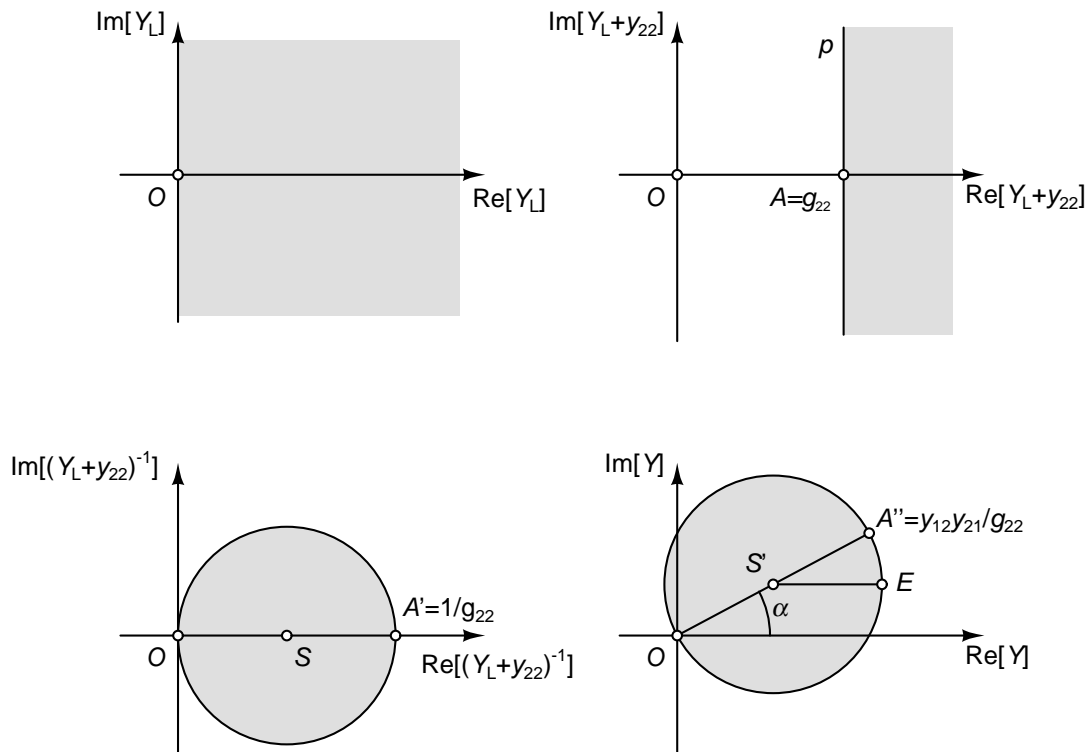
Če vezje zaključimo s kratkim stikom ( $Y_L \rightarrow \infty$  ali  $Y_{\text{SRC}} \rightarrow \infty$ ), dobimo  $Y_{\text{in}} = y_{11}$  oziroma  $Y_{\text{out}} = y_{22}$ . Za absolutno stabilnost morata biti realna dela teh dveh admitanc večja ali enaka 0, kar nas pripelje do pogojev

$$\Re(y_{11}) = g_{11} \geq 0, \quad (2.126)$$

$$\Re(y_{22}) = g_{22} \geq 0. \quad (2.127)$$

V nadaljevanju si oglejmo realni del vhodne admitance  $Y_{\text{in}}$ , ki mora biti večji ali enak nič za absolutno stabilno vezje

$$\Re(Y_{\text{in}}) = g_{11} - \Re\left(\frac{y_{12}y_{21}}{y_{22} + Y_L}\right) = g_{11} - \Re(Y) \geq 0. \quad (2.128)$$



Slika 2.19: Preslikava pasivnega bremena na kompleksni ravnini.

Ker je  $g_{11}$  parameter dvovhodnega vezja, in ni odvisen od zaključitve, je izpolnjevanje neenakosti (2.128) odvisno zgolj od drugega člena ( $Y$ ). Najbolj neugoden primer nastopi, ko je  $\Re(Y)$  največji.

Pasivna zaključitev  $Y_L$  ima realni del admittance večji ali enak 0. Takim zaključitvam ustrezajo točke na imaginarni osi in desno od nje (slika 2.19, zgoraj levo). Če k taki zaključitvi prištejemo  $y_{22}$ , dobimo imenovalc izraza  $Y$ , ki mu ustreza polravnina omejena s premico  $p$  (slika 2.19, zgoraj desno).

Po inverziji izraza  $y_{22} + Y_L$  dobimo za pasivne zaključitve  $Y_L$  v kompleksni ravnini krog s središčem v točki  $S = \frac{1}{2g_{22}}$  in polmerom  $\frac{1}{2g_{22}}$  (slika 2.19, spodaj levo). Pri tem se točka  $A = g_{22}$  na realni osi preslika v točko  $A' = 1/g_{22}$  na realni osi. Do izraza  $Y$  je le še korak - množenje s  $y_{12}y_{21} = |y_{12}y_{21}|e^{j\alpha}$ , ki je sestavljeno iz raztega z absolutno vrednostjo  $y_{12}y_{21}$  in vrtenja v nasprotni smeri urinega kazalca za kot  $\alpha$ . Pri tem se točka  $A'$  preslika v točko  $A'' = \frac{y_{12}y_{21}}{g_{22}}$  (slika 2.19, spodaj desno). Središče kroga  $S$  se preslika v točko  $S' = \frac{y_{12}y_{21}}{2g_{22}}$ , polmer raztegnjenega in zavrnega kroga pa je enak  $\frac{|y_{12}y_{21}|}{2g_{22}}$ .

Najbolj neugodnemu primeru (vrednosti  $Y$  z največjim realnim delom) ustreza točka  $E$  na sliki 2.19, ki se nahaja za polmer kroga desno od središča  $S$ . Odtod sledi

$$\min_{\Re(Y_L) \geq 0} \Re(Y_{in}) = g_{11} - \Re\left(\frac{y_{12}y_{21}}{2g_{22}} + \frac{|y_{12}y_{21}|}{2g_{22}}\right). \quad (2.129)$$

Za absolutno stabilnost mora veljati

$$\min_{\Re(Y_L) \geq 0} \Re(Y_{in}) \geq 0, \quad (2.130)$$

kar nam da pogoj

$$2g_{11}g_{22} - \Re(y_{12}y_{21}) \geq |y_{12}y_{21}|. \quad (2.131)$$

Na podoben način bi lahko obravnavali tudi zaključitev na vhodu z admittance  $Y_{SRC}$  in dobili enak pogoj (2.131) za absolutno stabilnost. **Pogoji za absolutno stabilnost dvovhodnega vezja**, ki jih v literaturi najdemo tudi pod imenom **Llewellynovi pogoji za absolutno stabilnost** [6], so torej

$$\Re(y_{11}) = g_{11} \geq 0, \quad (2.132)$$

$$\Re(y_{22}) = g_{22} \geq 0, \quad (2.133)$$

$$2g_{11}g_{22} - \Re(y_{12}y_{21}) \geq |y_{12}y_{21}|. \quad (2.134)$$

Če je katerikoli od pogojev (2.132)-(2.134) kršen, je dvovhodno vezje **potencialno nestabilno**, saj obstaja pasivna zaključitev, ki vodi do negativne vhodne (oziroma izhodne) admittance. V primeru kršitve prvih dveh pogojev govorimo o **potencialni nestabilnosti zaradi negativnih vhodnih prevodnosti**. S preoblikovanjem tretjega pogoja ((2.134)) dobimo

$$k = \frac{2g_{11}g_{22} - \Re(y_{12}y_{21})}{|y_{12}y_{21}|} \geq 1, \quad (2.135)$$

kjer je  $k$  **invariantni stabilnostni faktor**.

**Osredotočimo se sedaj na vezja z  $g_{11} \geq 0$  in  $g_{22} \geq 0$ .** Pogoj za absolutno stabilnost takih vezij sledi iz (2.134) in se glasi

$$4g_{11}g_{22} \geq 2\Re(y_{12}y_{21}) + 2|y_{12}y_{21}|. \quad (2.136)$$



Če ga primerjamo s pogojem za pasivnost

$$\begin{aligned} 4g_{11}g_{22} \geq |y_{12} + y_{21}^*|^2 &= (y_{12} + y_{21}^*)(y_{12}^* + y_{21}) \\ &= |y_{12}|^2 + |y_{21}|^2 + y_{12}y_{21} + y_{12}^*y_{21}^* \\ &= |y_{12}|^2 + |y_{21}|^2 + 2\Re(y_{12}y_{21}), \end{aligned} \quad (2.137)$$

vidimo, da je pogoj za pasivnost strožji, saj velja

$$|y_{12}|^2 + |y_{21}|^2 - 2|y_{12}||y_{21}| = (|y_{12}| - |y_{21}|)^2 \geq 0. \quad (2.138)$$

**Torej so vsa pasivna vezja z  $g_{11} \geq 0$  in  $g_{22} \geq 0$  tudi absolutno stabilna.** Poleg njih pa so absolutno stabilna tudi nekatera prevajalno aktivna vezja.

## 2.4 Optimizacija koristnega ojačenja moči

V poglavju 2.2.5 smo spoznali tri merila za ojačenje moči. Najmanjšo vrednost med njimi ima koristno ojačenje moči, ki ga označujemo z  $G_T$  in je odvisno tako od notranje admitance signalnega vira na vhodu ( $Y_{SRC}$ ), kot tudi od admitance bremena ( $Y_L$ ) na izhodu dvovhodnega vezja. Zanima nas, pri katerih vrednostih  $Y_{SRC}$  in  $Y_L$  je koristno ojačenje moči največje.

Če se problema lotimo neposredno, moramo iskati maksimum funkcije dveh kompleksnih spremenljivk ( $G_T(Y_{SRC}, Y_L)$ ), kar nam da štiri enačbe za realni in imaginarni del optimalnih vrednosti  $Y_{SRC,opt}$  in  $Y_{L,opt}$ . Lahko pa uberemo krajšo pot, ki terja nekaj razmisleka, preden se lotimo računanja.

Zaradi enačb (2.79) in (2.80) lahko pišemo

$$\max_{Y_{SRC}} \max_{Y_L} G_T(Y_{SRC}, Y_L) = \max_{Y_L} A_P(Y_L) = \max_{Y_{SRC}} G_A(Y_{SRC}). \quad (2.139)$$

Če poiščemo maksimum ojačenja moči  $A_P$  preko vseh možnih admitanc bremena dobimo optimalno vrednost admitance bremena  $Y_{L,opt}$ . Podobno lahko z iskanjem maksimuma razpoložljivega ojačenja moči  $G_A$  preko vseh možnih notranjih admitanc vira dobimo optimalno vrednost notranje admitance vira  $Y_{SRC,opt}$ . V obeh primerih iščemo maksimum funkcije ene kompleksne spremenljivke, kar nam da dve enačbi za realni in imaginarni del  $Y_{L,opt}$  oziroma  $Y_{SRC,opt}$ .

Izhajamo iz ojačenja moči (enačba (2.70))

$$A_P = \left| \frac{y_{21}}{y_{22} + Y_L} \right|^2 \frac{G_L}{\Re\left(y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22} + Y_L}\right)} = \frac{|y_{21}|^2 G_L}{|y_{22} + Y_L|^2 g_{11} - \Re(y_{12}y_{21}(y_{22} + Y_L)^*)} \quad (2.140)$$

$$= \frac{|y_{21}|^2 G_L}{((g_{22} + G_L)^2 + (b_{22} + B_L)^2) g_{11} - \Re(y_{12}y_{21})(g_{22} + G_L) - \Im(y_{12}y_{21})(b_{22} + B_L)}. \quad (2.141)$$

Ojačenje moči je funkcija realnega ( $G_L$ ) in imaginarnega ( $B_L$ ) dela admitance bremena ( $Y_L$ ). Da najdemo največje ojačenje, moramo izraz odvajati po  $G_L$  in  $B_L$  ter oba odvoda izenačiti z 0. Iz pogoja  $\frac{dA_P}{dB_L} = 0$  sledi

$$2g_{11}(b_{22} + B_L) - \Im(y_{12}y_{21}) = 0.$$

Za imaginarni del optimalne admitance bremena dobimo

$$B_{L,opt} = -b_{22} + \frac{\Im(y_{12}y_{21})}{2g_{11}}. \quad (2.142)$$

Iz  $\frac{dA_P}{dG_L} = 0$  sledi

$$\begin{aligned} |y_{22} + Y_L|^2 g_{11} - \Re(y_{12}y_{21}(y_{22} + Y_L)^*) - G_L(2(g_{22} + G_L)g_{11} - \Re(y_{12}y_{21})) &= 0, \\ g_{11}(g_{22}^2 - G_L^2)g_{11} + (b_{22} + B_L)^2 g_{11} + \Re(y_{12}y_{21})g_{22} - \Im(y_{12}y_{21})(b_{22} + B_L) &= 0. \end{aligned}$$

Vstavimo (2.142) in dobimo

$$g_{11}(g_{22}^2 - G_L^2) - \frac{\Im^2(y_{12}y_{21})}{4g_{11}} + \Re(y_{12}y_{21})g_{22} = 0. \quad (2.143)$$

Sledi

$$G_{L,\text{opt}}^2 = \frac{4g_{11}^2 g_{22}^2 - \Im^2(y_{12}y_{21}) - 4g_{11}g_{22}\Re(y_{12}y_{21})}{4g_{11}^2}. \quad (2.144)$$

Če vse skupaj malo preuredimo, dobimo

$$G_{L,\text{opt}}^2 = \frac{(2g_{11}g_{22} - \Re(y_{12}y_{21}))^2 - (\Re^2(y_{12}y_{21}) + \Im^2(y_{12}y_{21}))}{4g_{11}^2}. \quad (2.145)$$

Sedaj lahko povežemo realni del optimalne admitance bremena z invariantnim stabilnostnim faktorjem  $k$

$$G_{L,\text{opt}} = \frac{|y_{12}y_{21}|}{2g_{11}} \sqrt{k^2 - 1}. \quad (2.146)$$

Preuredimo še imaginarni del optimalne admitance bremena

$$jB_{L,\text{opt}} = \frac{-2jg_{11}b_{22} + y_{12}y_{21} - \Re(y_{12}y_{21}) + 2g_{11}g_{22} - 2g_{11}g_{22}}{2g_{11}} \quad (2.147)$$

$$= \frac{-2g_{11}(g_{22} + jb_{22}) + y_{12}y_{21} + 2g_{11}g_{22} - \Re(y_{12}y_{21})}{2g_{11}} \quad (2.148)$$

$$= -y_{22} + \frac{y_{12}y_{21} + |y_{12}y_{21}|k}{2g_{11}}. \quad (2.149)$$

**Optimalna admitanca bremena** je tako enaka

$$Y_{L,\text{opt}} = -y_{22} + \frac{y_{12}y_{21} + |y_{12}y_{21}|(k + \sqrt{k^2 - 1})}{2g_{11}}. \quad (2.150)$$

Če je  $y_{12}y_{21} = 0$ , je  $k$  neskončen. V tem primeru uporabimo drugo obliko enačbe (2.150). Vstavimo definicijo  $k$  (enačba (2.135)) v (2.150) in dobimo

$$\begin{aligned} Y_{L,\text{opt}} &= -y_{22} + \frac{y_{12}y_{21} + 2g_{11}g_{22} - \Re(y_{12}y_{21}) + \sqrt{(2g_{11}g_{22} - \Re(y_{12}y_{21}))^2 - |y_{12}y_{21}|^2}}{2g_{11}} \\ &= \frac{\sqrt{(2g_{11}g_{22} - \Re(y_{12}y_{21}))^2 - |y_{12}y_{21}|^2}}{2g_{11}} + j \left( -b_{22} + \frac{\Im(y_{12}y_{21})}{2g_{22}} \right). \end{aligned} \quad (2.151)$$

Ko velja  $y_{12}y_{21} = 0$ , dobimo za optimalno admitanco bremena

$$Y_{L,\text{opt}} = g_{22} - jb_{22} = y_{22}^*. \quad (2.152)$$

Optimalno notranjo admitanco signalnega vira dobimo z maksimizacijo razpoložljivega ojačenja moči  $G_A$ .

$$G_A(Y_{\text{SRC}}) = \frac{|y_{21}|^2 G_{\text{SRC}}}{|y_{11} + Y_{\text{SRC}}|^2 \Re\left(y_{22} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{11} + Y_{\text{SRC}}}\right)} \quad (2.153)$$

Vidimo, da je izraz (2.153) enake oblike kot (2.140), le da indeksa 1 in 2 zamenjata vlogi, namesto  $Y_L$  in  $G_L$  pa nastopata  $Y_{\text{SRC}}$  in  $G_{\text{SRC}}$ . Ker ostane invariantni stabilnostni faktor  $k$  nespremenjen, če v izrazu (2.135) zamenjamo indeksa 1 in 2, je **optimalna notranja admitanca signalnega vira** enaka

$$\begin{aligned} Y_{\text{SRC,opt}} &= -y_{11} + \frac{y_{12}y_{21} + |y_{12}y_{21}| \left(k + \sqrt{k^2 - 1}\right)}{2g_{22}} \\ &= \frac{\sqrt{(2g_{11}g_{22} - \Re(y_{12}y_{21}))^2 - |y_{12}y_{21}|^2}}{2g_{22}} + j \left(-b_{11} + \frac{\text{Im}(y_{12}y_{21})}{2g_{11}}\right). \end{aligned} \quad (2.154)$$

Če je  $y_{12}y_{21} = 0$ , je optimalna notranja admitanca signalnega vira enaka

$$Y_{\text{SRC,opt}} = g_{11} - jb_{11} = y_{11}^*. \quad (2.155)$$

Iz enačbe (2.146) vidimo, da je realni del optimalne admitance bremena realen le, če je  $k \geq 0$ . To pomeni, da optimalna zaključitev dvovhodnega vezja obstaja samo, če je vezje absolutno stabilno ali kvečjemu nestabilno zaradi negativnih vhodnih prevodnosti.

Pri optimalni zaključitvi velja, da so vsa tri ojačenja moči ( $A_P$ ,  $G_T$  in  $G_A$ ) enaka in maksimalna. Določimo jih tako, da v izraz za ojačenje moči (2.140) vstavimo dobljeno optimalno admitanco bremena (enačba (2.150)).

$$A_{P,\text{opt}} = \frac{|y_{21}|^2 G_{L,\text{opt}}}{|y_{22} + Y_{L,\text{opt}}|^2 g_{11} - \Re(y_{12}y_{21}(y_{22} + Y_{L,\text{opt}})^*)}. \quad (2.156)$$

Izračunajmo najprej člena, ki nastopata v imenovalcu izraza (2.156).

$$\begin{aligned} |y_{22} + Y_{L,\text{opt}}|^2 g_{11} &= \frac{|y_{12}y_{21} + |y_{12}y_{21}|(k + \sqrt{k^2 - 1})|^2}{4g_{11}} \\ &= \frac{\left(\Re(y_{12}y_{21}) + |y_{12}y_{21}|(k + \sqrt{k^2 - 1})\right)^2 + \text{Im}^2(y_{12}y_{21})}{4g_{11}} \\ &= \frac{(|y_{12}y_{21}|^2 k + \Re(y_{12}y_{21})|y_{12}y_{21}|)(k + \sqrt{k^2 - 1})}{2g_{11}} \end{aligned} \quad (2.157)$$

$$\begin{aligned} \Re(y_{12}y_{21}(y_{22} + Y_{L,\text{opt}})^*) &= \Re\left(y_{12}y_{21} \frac{y_{12}^*y_{21}^* + |y_{12}y_{21}|(k + \sqrt{k^2 - 1})}{2g_{11}}\right) \\ &= \frac{|y_{12}y_{21}|^2 + \Re(y_{12}y_{21})|y_{12}y_{21}|(k + \sqrt{k^2 - 1})}{2g_{11}} \end{aligned} \quad (2.158)$$

Vstavimo izraze (2.146), (2.157) in (2.158) v (2.156) in dobimo

$$A_{P,\text{opt}} = \frac{|y_{21}|^2 \frac{|y_{12}y_{21}|\sqrt{k^2 - 1}}{2g_{11}}}{\frac{|y_{12}y_{21}|^2(k^2 + k\sqrt{k^2 - 1} - 1)}{2g_{11}}} = \frac{|y_{21}|}{|y_{12}|} \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - 1}}. \quad (2.159)$$

**Optimalna ojačenja moči** so vsa enaka  $G_{\max}$ .

$$A_P(Y_{L,\text{opt}}) = G_A(Y_{\text{SRC,opt}}) = G_T(Y_{\text{SRC,opt}}, Y_{L,\text{opt}}) = \frac{|y_{21}|}{|y_{12}|} \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - 1}} = G_{\max}. \quad (2.160)$$

Ker za  $y_{12}y_{21} = 0$  postane  $k$  neskončen, zapišimo še drugo obliko izraza (2.160), ki jo dobimo, če vanj vstavimo definicijo  $k$ .

$$G_{\max} = \frac{|y_{21}|^2}{2g_{11}g_{22} - \Re(y_{12}y_{21}) + \sqrt{(2g_{11}g_{22} - \Re(y_{12}y_{21}))^2 - |y_{12}y_{21}|^2}}. \quad (2.161)$$

Zaradi **optimalnosti zaključitve** na vhodni in izhodni strani velja

$$Y_{\text{in}}(Y_{L,\text{opt}}) = y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22} + Y_{L,\text{opt}}} = Y_{\text{SRC,opt}}^*, \quad (2.162)$$

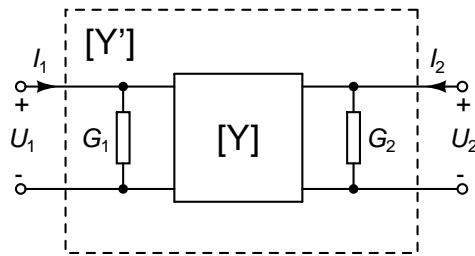
$$Y_{\text{out}}(Y_{\text{SRC,opt}}) = y_{22} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{11} + Y_{\text{SRC,opt}}} = Y_{L,\text{opt}}^*. \quad (2.163)$$

Vidimo, da je optimalno ojačenje  $G_{\max}$  odvisno od invariantnega stabilnostnega faktorja  $k$ .  $G_{\max}$  obstaja le, če je  $k \geq 1$  (tretji pogoj za absolutno stabilnost vezja (2.134)). Za dvovhodna vezja, katerim sta skupni vrednosti  $y_{12}$  in  $y_{21}$ , je  $G_{\max}$  največji, ko je  $k = 1$ . Vrednost

$$G_{\text{MS}} = G_{\max}|_{k=1} = \frac{|y_{21}|}{|y_{12}|}, \quad (2.164)$$

imenujemo tudi **največje stabilno ojačenje moči** (ang. Maximum Stable Gain). Za dvovhodna vezja, katerim sta skupni vrednosti parametrov  $y_{12}$  in  $y_{21}$ , velja

$$G_{\max} = G_{\text{MS}} \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - 1}} \leq G_{\text{MS}}. \quad (2.165)$$



Slika 2.20: Stabilizacija dvovhodnega vezja s priključitvijo prevodnosti  $G_1$  in  $G_2$ .

Za vsa dvovhodna vezja pa ne velja  $k \geq 1$ . Za taka vezja ne moremo določiti  $G_{\max}$ . Lahko pa določimo  $G_{\text{MS}}$ . Če takemu vezju na vходу dodamo prevodnost  $G_1$ , na izhodu pa prevodnost  $G_2$  (slika 2.20), se admitančna matrika dobljenega vezja glasi

$$[Y'] = \begin{bmatrix} y_{11} + G_1 & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} + G_2 \end{bmatrix}. \quad (2.166)$$

Ker parametra  $y_{12}$  in  $y_{21}$  ostaneta nespremenjena, se  $G_{\text{MS}}$  vezja ne spremeni. Z ustreznimi izbiri  $G_1$  in  $G_2$  lahko dosežemo, da vezje postane absolutno stabilno,  $k$  pa enak 1. Za tako vezje  $G_{\max}$  obstaja in je enak  $G_{\text{MS}} = |y_{21}/y_{12}|$ .

**Poglejmo si še zvezo med Masonovo invarianto  $U$  in  $G_{\max}$ .** Ko  $G_{\max}$  postane enak 1, vezje preneha ojačevati moč, ne glede na to, kakšen  $Y_{\text{SRC}}$  in  $Y_L$  izberemo. Tedaj velja

$$|y_{21}| = |y_{12}|(k + \sqrt{k^2 - 1}). \quad (2.167)$$

Prenesimo člen  $k|y_{12}|$  na levo stran in kvadrirajmo.

$$|y_{21}|^2 - 2|y_{12}y_{21}|k = -|y_{12}|^2. \quad (2.168)$$

Vstavimo definicijo  $k$  (enačba (2.135)).

$$|y_{12}|^2 + |y_{21}|^2 - (4g_{11}g_{22} - 2\Re(y_{12}y_{21})) = 0. \quad (2.169)$$

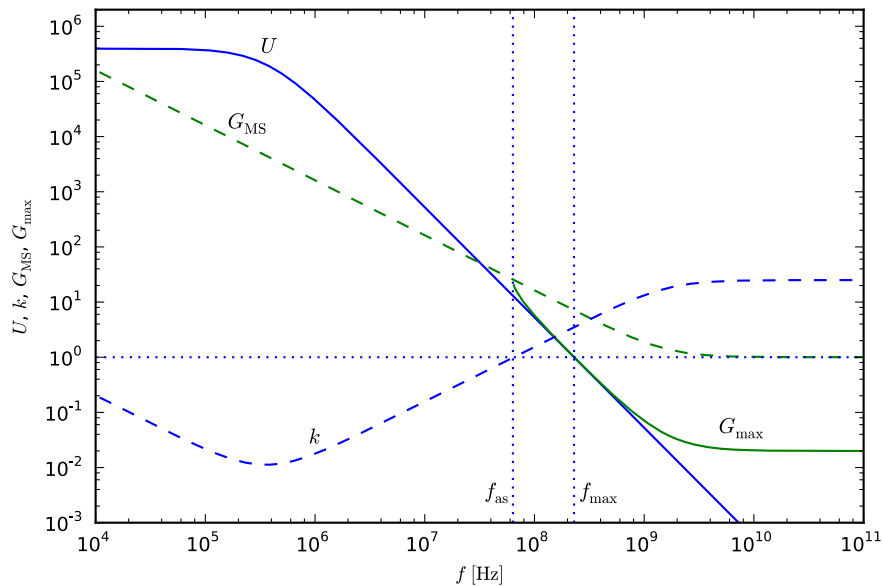
Ker je  $2\Re(y_{12}y_{21}) = y_{12}y_{21} + y_{12}^*y_{21}^*$ , lahko pišemo

$$(y_{12} + y_{21}^*)(y_{12}^* + y_{21}) - 4g_{11}g_{22} = 0, \quad (2.170)$$

kar nam na koncu da

$$|y_{12} + y_{21}^*|^2 - 4g_{11}g_{22} = 0. \quad (2.171)$$

To pa je pogoj za mejo med prevajalno aktivnostjo in pasivnostjo (2.101), kjer velja  $U = 1$ . Vidimo, da  $G_{\max}$  in  $U$  hkrati postaneta enaka 1 (pri frekvenci  $f_{\max}$ ).



Slika 2.21: Tipični poteki Masonove invariante  $U$ , invariantnega stabilnostnega faktorja  $k$  ter ojačenj  $G_{\text{MS}}$  in  $G_{\text{max}}$  pri bipolarnem tranzistorju v orientaciji s skupnim emitorjem.  $f_{\text{as}}$  označuje frekvenco, ko postane  $k$  enak 1.

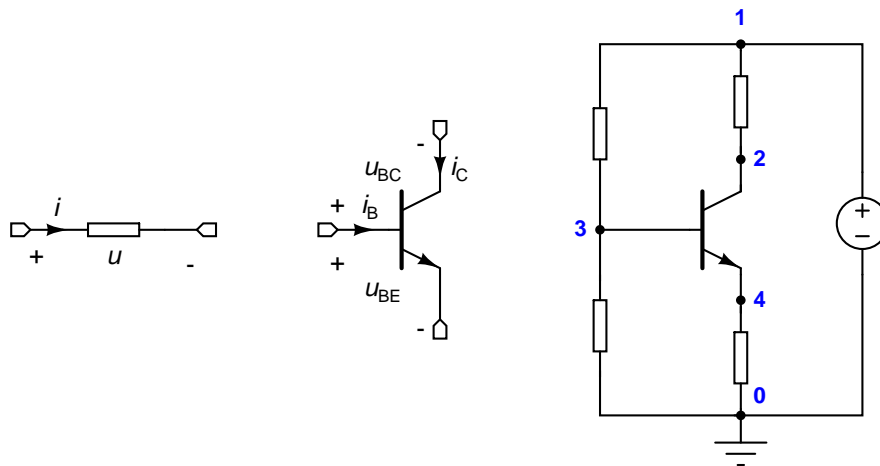
Slika 2.21 prikazuje potek Masonove invariante  $U$ , invariantnega stabilnostnega faktorja  $f$  ter ojačenj  $G_{\text{MS}}$  in  $G_{\text{max}}$  za bipolarni tranzistor v orientaciji s skupnim emitorjem s parametri  $g_{11} = 0.1\text{mS}$ ,  $g_{12} = 0\text{mS}$ ,  $g_{21} = 40\text{mS}$ ,  $g_{22} = 10\mu\text{S}$ ,  $c_{\text{be}} = 20\text{pF}$ ,  $c_{\text{bc}} = 4\text{pF}$  in  $r_{\text{B}} = 50\Omega$ . Model tranzistorja, ki smo ga uporabili, je podan v poglavju 10.3.1 na sliki 10.14.

Mera aktivnosti  $U$  pada z naraščujočo frekvenco in doseže 1 pri  $f_{\max} = 230\text{MHz}$ . Od te frekvence naprej je tranzistor neuporaben za ojačevanje moči. Faktor  $k$  preseže 1 za frekvence nad  $f_{\text{as}} = 63,6\text{MHz}$ . Tam je tudi definirano optimalno ojačenje moči  $G_{\max}$ . Povsod drugod je definirano samo največje stabilno ojačenje moči  $G_{\text{MS}}$ , ki prav tako upada s frekvenco in se bliža 1. Slednje je posledica dejstva, da pri visokih frekvencah v admitančnih parametrih pričnejo prevladovati kapacitivnosti, ki pa so recipročne. Zaradi tega postane  $y_{12} \approx y_{21}$ , kar pomeni, da za dovolj visoke frekvence velja  $G_{\text{MS}} = |y_{21}/y_{12}| \approx 1$ .

# 3

## Enačbe vezja

Da bi lahko izračunali odzive vezja moramo najprej sestaviti enačbe, ki jim morajo zadostiti tokovi in napetosti v vezju. Zahtevnost postopka reševanja enačb je v veliki meri odvisna od izbire nabora neznank. Poleg tega je zaželeno, da je postopek za sestavljanje enačb vezja čim bolj enostaven in splošen.



Slika 3.1: Upor s priključki (levo), bipolarni tranzistor tipa NPN s priključki (na sredini) in primer vezja z oštevilčenimi vozlišči (desno). Referenčno vozlišče je označeno z 0.

Preden se začnemo ukvarjati z enačbami vezja bomo definirali nekaj pojmov. Vsi **gradniki vezij** (upori, kondenzatorji, tranzistorji, ...) imajo dva ali več priključkov (polov). Vezje nastane, ko gradnike (elemente) povežemo med seboj tako, da se njihovi priključki stikajo v skupnih točkah, ki jim pravimo **vozlišča**.

Pri analizi bomo upoštevali, da je eno od vozlišč ozemljeno (na potencialu 0V). Ozemljenemu vozlišču pravimo tudi **referenčno vozlišče**. V vsakem vezju si lahko izberemo eno vozlišče in ga ozemljimo, brez da bi to vplivalo na delovanje vezja.

Gradnike vezja opišemo z enačbami, ki povezujejo napetosti med priključki s tokovi, ki tečejo v priključke elementa. Da opišemo  $M$ -polni element, potrebujemo  $M - 1$  neodvisnih enačb, ki povezujejo  $2(M - 1)$  neodvisnih veličin na priključnih sponkah  $M$ -polnega elementa.

**Primer 3.1:** Za opis upora (slika 3.1, levo), ki ima le dva priključka, zadošča kar Ohmov zakon

$$u = Ri, \tag{3.1}$$

ki povezuje dve veličini – tok in napetost.

△

**Primer 3.2:** Za bipolarni tranzistor (slika 3.1, na sredini), ki ima tri priključke, potrebujemo dve enačbi.

$$i_B = \frac{I_S}{\beta_F} \left( e^{\frac{u_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + \frac{I_S}{\beta_R} \left( e^{\frac{u_{BC}}{U_T}} - 1 \right), \quad (3.2)$$

$$i_C = -\frac{I_S}{\beta_R} \left( e^{\frac{u_{BC}}{U_T}} - 1 \right) + \left( I_S \left( e^{\frac{u_{BE}}{U_T}} - 1 \right) - I_S \left( e^{\frac{u_{BC}}{U_T}} - 1 \right) \right) \left( 1 - \frac{u_{BE}}{V_{AR}} - \frac{u_{BC}}{V_{AF}} \right), \quad (3.3)$$

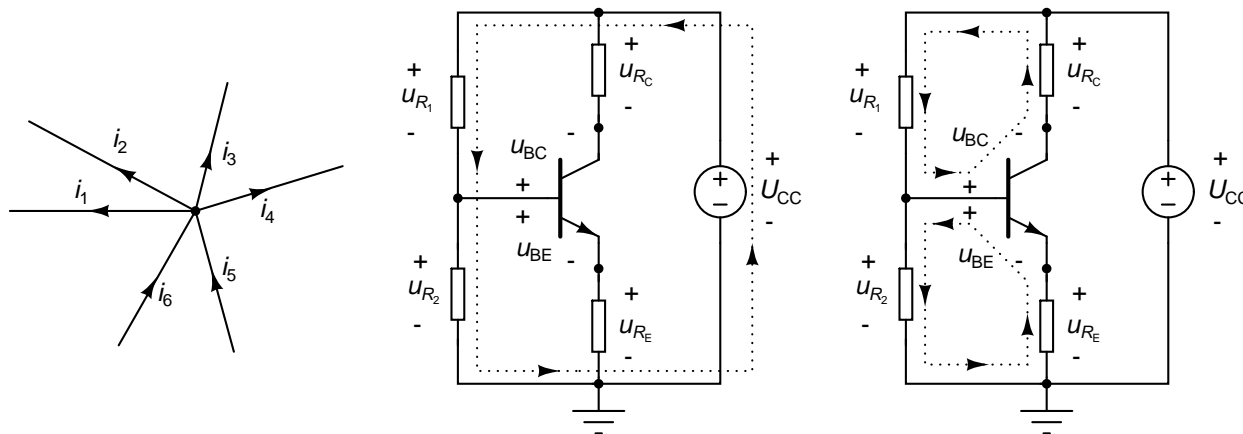
ki povezujeta dva tokova in dve napetosti. Enačbi (3.2) in (3.3) predstavljata razširjeni Ebers-Mollov model in veljata v časovnem prostoru, če frekvence signalov niso previsoke.  $\triangle$

V linearni elektroniki se večidel gibljemo v frekvenčnem prostoru in se ukvarjamo z majhnimi signali, ki predstavljajo odmito od tki. **delovne točke**. Zaradi tega so tudi enačbe gradnikov linearne in mnogo bolj enostavne od enačb (3.2) in (3.3).

### 3.1 Prvi in drugi Kirchoffov zakon

Vsota tokov, ki pritekajo v neko vozlišče vezja mora biti enaka vsoti tokov, ki odtekaajo. To pomeni, da se v nobenem vozlišču ne sme nabirati naboja. Tej zahtevi pravimo **prvi Kirchoffov zakon** (Kirchoffov tokovni zakon) in jo lahko za vozlišče, kamor se steka  $k$  tokov, matematično zapišemo kot

$$\sum_{k=1}^n i_k = i_1 + i_2 + \dots + i_k = 0. \quad (3.4)$$



Slika 3.2: Tokovi, ki tečejo v vozlišče (levo), tri različne sklenjene poti skozi vezje s slike 3.1, (na sredini in desno).

Enačbo (3.4) ilustrira slika 3.2 (levo). V nadaljevanju bomo tokove, ki tečejo iz vozlišča šteli kot pozitivne, tokove, ki tečejo v vozlišče pa kot negativne.

**Primer 3.3:** Prvi Kirchoffov zakon za vozlišče na sliki 3.2 (levo) zapišemo kot

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 - i_5 - i_6 = 0 \quad (3.5)$$

$\triangle$

Da opišemo vezje z vidika ravnovesja tokov, moramo zapisati prvi Kirchoffov zakon za vsa vozlišča, razen enega. Pri pisanju enačb ponavadi izpustimo referenčno vozlišče.



Poglejmo, zakaj. V vezju z  $n$  vozlišči predpostavimo, da je vsota tokov enaka 0 za prvih  $n-1$  vozlišč.  $n$ -to vozlišče naj bo referenčno vozlišče vezja. Če bi za  $n$ -to vozlišče vsota tokov ne bila enaka 0, bi se moral v tem vozlišču tekom časa nabirati čedalje večji naboj. Naboj bi bil pozitiven, če bi več toka priteklo v vozlišče, kot ga odteče, in negativen, če bi tokovi, ki odtekajo prevladovali nad tokovi, ki pritekajo. Recimo da se v  $n$ -tem vozlišču nabira pozitiven naboj. Zaradi ohranitve naboja mora kopičenje pozitivnega naboja v tem vozlišču povzročiti kopičenje negativnega naboja v vsaj enem od preostalih  $n-1$  vozlišč. To pa ni mogoče, saj je za prvih  $n-1$  vozlišč vsota tokov enaka 0.

**Drugi Kirchoffov zakon** (Kirchoffov napetostni zakon) pravi, da mora biti vsota napetosti na vsaki sklenjeni poti skozi vezje enaka 0. Pri tem upoštevamo kot pozitivne tiste napetosti, pri katerih najprej prečkamo pripadajočo oznako „+“ in nato oznako „-“.

**Primer 3.4:** Tri možne sklenjene poti skozi vezje na sliki 3.1 so prikazane na sliki 3.2 (na sredini in desno). Tem potem pripadajo enačbe

$$u_{R_1} + u_{R_2} - U_{CC} = 0, \quad (3.6)$$

$$u_{R_1} + u_{BC} - u_{RC} = 0, \quad (3.7)$$

$$u_{R_2} - u_{RE} - u_{BE} = 0. \quad (3.8)$$

$$(3.9)$$

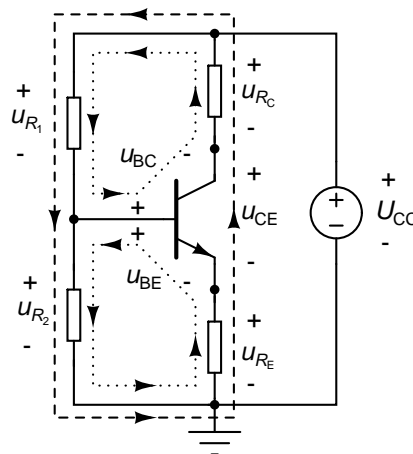
△

Vsak  $M$ -polni element opišemo z  $M-1$  enačbami, ki povezujejo  $M-1$  tokov in  $M-1$  napetosti (glej poglavje 1.6). Število neznank v vezju z  $N_E$  elementi je tako enako

$$2 \sum_{k=1}^{N_E} (M_k - 1) \quad (3.10)$$

kjer je  $M_k$  število priključkov  $k$ -tega elementa. Enačb, ki opisujejo posamezne elemente, je tako

$$\sum_{k=1}^{N_E} (M_k - 1). \quad (3.11)$$



Slika 3.3: Primer odvisnih sklenjenih poti v vezju.

Da lahko določimo teh  $2 \sum_{k=1}^{N_E} (M_k - 1)$  neznank potrebujemo  $2 \sum_{k=1}^{N_E} (M_k - 1)$  enačb. Potrebujemo torej še  $\sum_{k=1}^{N_E} (M_k - 1)$  enačb. Te dobimo s pomočjo prvega in drugega Kirchoffovega zakona. Prvi Kirchoffov zakon

nam za vezje z  $n$  vozlišči da  $n - 1$  enačb. Preostale enačbe pridobimo s pomočjo drugega Kirchoffovega zakona. Torej moramo poiskati

$$\left( \sum_{k=1}^{N_E} (M_k - 1) \right) - n + 1 \quad (3.12)$$

sklenjenih poti skozi vezje. Za povrh morajo biti te poti neodvisne, kar z drugimi besedami pomeni, da nobene od enačb, ki sledijo iz drugega Kirchoffovega zakona, ne moremo izraziti kot linearno kombinacijo preostalih.

**Primer 3.5:** Slika 3.3 prikazuje tri medsebojno odvisne poti. Pikčasti poti nam data enačbi (3.7) in (3.8). Črtkana pot nam da enačbo

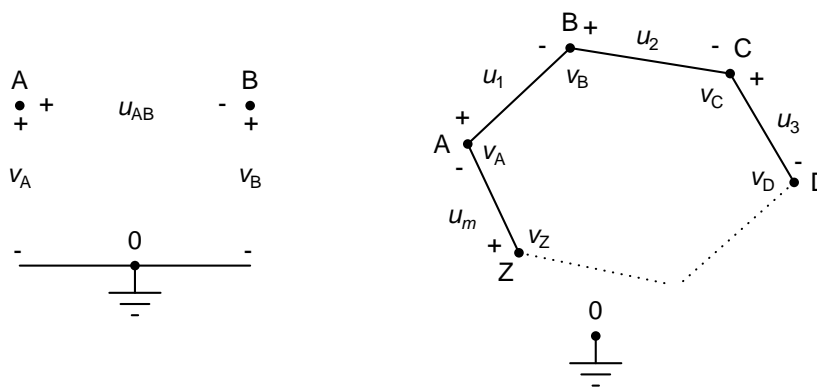
$$u_{R_1} + u_{R_2} - u_{R_E} - u_{CE} - u_{R_C} = 0. \quad (3.13)$$

Če seštejemo enačbi (3.7) in (3.8) in upoštevamo, da je  $U_{CE} = u_{BE} - u_{BC}$ , dobimo enačbo (3.13). Enačba (3.13) ne prinaša nobene nove informacije v sistem enačb, ker je linearno odvisna od enačb (3.7) in (3.8).  $\triangle$

Na srečo obstaja pristop, ki pisanje enačb močno poenostavi in nam prihrani iskanje neodvisnih sklenjenih poti. Oglevali si ga bomo v poglavju 3.2.

## 3.2 Vozliščne enačbe

Vidimo, da je težji del pisanja enačb vezja povezan z drugim Kirchoffovim zakonom. Poleg tega število neznanek v vezju ( $2(M - 1)$ ) raste raste s številom elementov. Da vse skupaj nekoliko poenostavimo, vpeljemo pojem **potenciala vozlišča** oziroma **vozliščnega potenciala**, ki je napetost med vozliščem in referenčnim vozliščem. Vozliščne potenciale bomo označevali s črko  $v$ .



Slika 3.4: Potenciala vozlišč A in B ter napetost med vozliščema (levo) in sklenjena pot skozi vezje (desno). Referenčno vozlišče je označeno z 0 in ozemljeno.

Potencial referenčnega vozlišča si lahko poljubno izberemo. Praviloma izberemo 0V. Sedaj lahko napetost med poljubnima vozliščema A in B izrazimo kot razliko vozliščnih potencialov  $v_A$  in  $v_B$  (slika 3.4, levo).

$$u_{AB} = v_A - v_B. \quad (3.14)$$

Z vpeljavo vozliščnih potencialov smo zadostili drugemu Kirchoffovemu zakonu. Če izberemo poljubno sklenjeno pot na kateri nastopajo napetosti  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , ki se začne in konča v vozlišču A (slika 3.4, desno), lahko za vsoto napetosti na tej poti pišemo

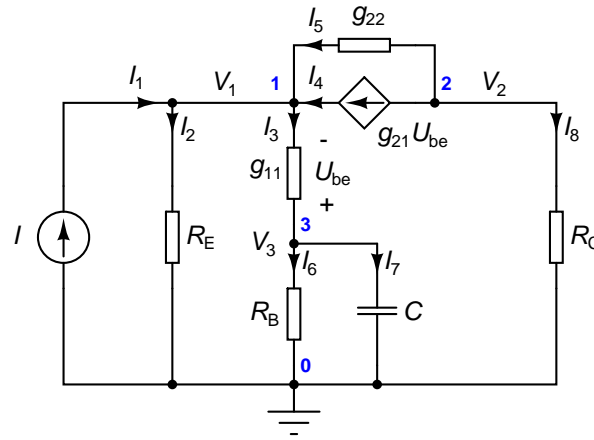
$$u_1 + u_2 + \dots + u_m = (v_A - v_B) + (v_B - v_C) + \dots + (v_Z - v_A). \quad (3.15)$$

Vidimo, da vsak vozliščni potencial nastopa dvakrat, enkrat s pozitivnim in enkrat z negativnim predznakom. Oba prispevka se tako izničita in vsota z vozliščnimi potenciali izraženih napetosti je na sklenjeni poti zmeraj enaka 0.

Vsem enačbam drugega Kirchofovega zakona zadostimo, če napetosti v vezju izrazimo z vozliščnimi potenciali. V vezju z  $n$  vozlišči imamo tako  $n - 1$  vozliščnih potencialov. **Eno od vozlišč je referenčno vozlišče, katerega potencial je enak 0V.** Namesto  $\sum_{k=1}^{N_E} (M_k - 1)$  napetosti imamo sedaj  $n - 1$  vozliščnih potencialov s katerimi lahko izrazimo poljubno napetost v vezju.

V nadaljevanju bomo predpostavili, da lahko vse tokove, ki tečejo v priključke elementov, izrazimo z vhodnimi napetostmi elementov in zato tudi z vozliščnimi potenciali. To sicer ne drži za nekatere elemente, kot naprimer napetostne vire in tokovno krmiljene odvisne vire. Njihovo vključitev v enačbe vezja si bomo ogledali v poglavju 3.6.

Če lahko vse tokove elementov izrazimo z vozliščnimi potenciali, nam kot neznanke ostanejo samo še vozliščni potenciali. Teh je  $n - 1$ , kar pomeni, da potrebujemo  $n - 1$  enačb, ki pa jih dobimo s pomočjo prvega Kirchoffovega zakona. Ta nam za vsako vozlišče da po eno enačbo.



Slika 3.5: Primer vezja. Vozlišča so oštevilčena s števili od 0 do 3. Referenčno vozlišče je oštevilčeno z 0.

**Primer 3.6:** Poglejmo si pisanje vozliščnih enačb za vezje na sliki 3.5. Enačbe bomo zapisali v frekvenčnem prostoru, zato bodo vsi tokovi in napetosti predstavljeni s kompleksorji. Vezje ima štiri vozlišča, od katerih eno izberemo za referenčno vozlišče (ozemljeno na sliki). Vozliščem pripadajo vozliščni potenciali  $V_1$ ,  $V_2$  in  $V_3$ . Izrazimo najprej vse tokove z vozliščnimi potenciali.

$$I_1 = I, \quad (3.16)$$

$$I_2 = \frac{V_1}{R_E}, \quad (3.17)$$

$$I_3 = g_{11}(V_1 - V_3), \quad (3.18)$$

$$I_4 = g_{21}U_{be} = g_{21}(V_3 - V_1), \quad (3.19)$$

$$I_5 = g_{22}(V_2 - V_1), \quad (3.20)$$

$$I_6 = \frac{V_3}{R_B}, \quad (3.21)$$

$$I_7 = j\omega CV_3, \quad (3.22)$$

$$I_8 = \frac{V_2}{R_C}. \quad (3.23)$$

Prvi Kirchoffov zakon nam da tri enačbe (za vozlišča, ki jim pripadajo potenciali  $V_1$ ,  $V_2$  in  $V_3$ ).

$$-I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0, \quad (3.24)$$

$$I_4 + I_5 + I_8 = 0, \quad (3.25)$$

$$-I_3 + I_6 + I_7 = 0. \quad (3.26)$$

Po vstavitvi izrazov (3.16)-(3.23) v enačbe (3.24)-(3.26) dobimo

$$\left(\frac{1}{R_E} + g_{11} + g_{21} + g_{22}\right) V_1 - g_{22} V_2 - (g_{11} + g_{21}) V_3 = I, \quad (3.27)$$

$$-(g_{21} + g_{22}) V_1 + \left(\frac{1}{R_C} + g_{22}\right) V_2 + g_{21} V_3 = 0, \quad (3.28)$$

$$-g_{11} V_1 + \left(\frac{1}{R_B} + g_{11} + j\omega C\right) V_3 = 0, \quad (3.29)$$

ki jih lahko lepše zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_E} + g_{11} + g_{21} + g_{22} & -g_{22} & -(g_{11} + g_{21}) \\ -(g_{21} + g_{22}) & \frac{1}{R_C} + g_{22} & g_{21} \\ -g_{11} & 0 & \frac{1}{R_B} + g_{11} + j\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

△

Matriki tako dobljenega sistema enačb pravimo tudi **vozliščna admitančna matrika vezja**. Sistemu enačb pravimo **vozliščne enačbe**, opisanemu pristopu k analizi vezja pa **vozliščna metoda**. Iz primera 3.6 vidimo, da se prispevki neodvisnih virov ( $I$ ) pojavijo na desnih straneh enačb.

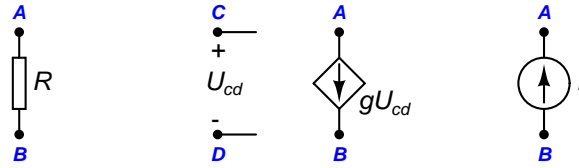
### 3.3 Hitro sestavljanje sistema vozliščnih enačb

Vozliščna admitančna matrika ima  $n - 1$  vrstic in stolpcev, kjer je  $n$  število vozlišč. Pri tem vsak stolpec ustreza enemu vozliščnemu potencialu, vsaka vrstica pa enačbi tokovnega ravnovesja v enem od vozlišč. Pri tem referenčnemu vozlišču ne ustreza nobena neznanka (stolpec) niti nobena enačba (vrstica) v matriki.

Vozliščno admitančno matriko in s tem tudi sistem enačb lahko zgradimo brez, da bi morali enačbe prej zapisati. Začnemo tako, da ustvarimo prazno matriko  $(n - 1) \times (n - 1)$  in v njej oštevilčimo vrstice in stolpce s številkami vozlišč, pri čemer izpustimo referenčno vozlišče. Pripravimo si tudi vektor neznank, ki vsebuje vozliščne napetosti od  $V_1$  do  $V_{n-1}$  ter vektor desnih strani enačb, ki ima  $n - 1$  praznih mest.

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Vsak element vezja prispeva določene člene v matriko in na desno stran. Te člene lahko hitro določimo in vpišemo v prazna mesta v matriki samo s pogledom na shemo vezja.



Slika 3.6: Gradniki linearnih vezij, ki jih dovoljuje vozliščna metoda. Prevodnost  $G$  (levo), napetostno krmiljeni tokovni vir s transkonduktanco  $g$  (na sredini) in neodvisni tokovni vir  $I$  (desno).

**Upor s prevodnostjo  $G$  in upornostjo  $R = 1/G$ , ki je priključena med vozlišči A in B** (slika 3.6, levo), prispeva člene samo v vozliščno admitančno matriko.

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 \vdots \\
 A \\
 \vdots \\
 B \\
 \vdots \\
 n-1
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & \cdots & A & \cdots & B & \cdots & n-1 \\
 \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \cdots & +G & \cdots & -G & \cdots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \cdots & -G & \cdots & +G & \cdots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot
 \end{bmatrix}
 \quad (3.32)$$

V primeru, da je katero od vozlišč A ali B referenčno vozlišče, pripadajočega stolpca in vrstice ni v prispevku. Tako naprimer, če je vozlišče B referenčno, je prispevek upora v vozliščni admitančni matriki enak

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 \vdots \\
 A \\
 \vdots \\
 n-1
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & \cdots & A & \cdots & n-1 \\
 \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \cdots & +G & \cdots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot
 \end{bmatrix}
 \quad (3.33)$$

Podobno, kot upor, lahko obravnavamo vse admitance, le da v prispevku namesto prevodnosti  $G$  pišemo admitanco  $Y$ .

**Napetostno krmiljeni tokovni vir s transkonduktanco  $g$ , ki je priključen med vozlišči A in B, krmili pa ga napetost med vozliščema C in D** (slika 3.6, na sredini), prav tako prispeva člene samo v vozliščno admitančno matriko.

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 \vdots \\
 A \\
 \vdots \\
 B \\
 \vdots \\
 n-1
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & \cdots & C & \cdots & D & \cdots & n-1 \\
 \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \cdots & +g & \cdots & -g & \cdots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \cdots & -g & \cdots & +g & \cdots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot
 \end{bmatrix}
 \quad (3.34)$$

Če je katero od vozlišč A, B, C ali D referenčno vozlišče izpustimo pripadajoči stolpec oziroma vrstico iz prispevka. Tako naprimer, če je vozlišče B referenčno, je prispevek napetostno krmiljenega tokovnega vira enak

$$\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ A \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \dots & C & \dots & D & \dots & n-1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \dots & +g & \dots & -g & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Če je tudi vozlišče C referenčno, je prispevek še enostavnejši

$$\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ A \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \dots & D & \dots & n-1 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \dots & -g & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

**neodvisen tokovni vir s tokom  $I$ , ki je priključen med vozlišči A in B** (slika 3.6, desno), prispeva člene samo na desno stran sistema vozliščnih enačb. Pozorni moramo biti na polariteto vira, ki daje tok v vozlišče A in ga vleče iz vozlišča B.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ A \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \begin{bmatrix} \cdot \\ \vdots \\ +I \\ \vdots \\ -I \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Če je katero od vozlišč A ali B referenčno, pripadajočo vrstico v prispevku izpustimo. Tako naprimer, če je vozlišče A referenčno, je prispevek enak

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ B \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \begin{bmatrix} \cdot \\ \vdots \\ -I \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

na koncu vsa prazna mesta (kjer nismo zapisali nobenega prispevka) zapolnimo z ničlami in dobimo sistem vozliščnih enačb za vezje.

**Primer 3.7:** Poglejmo si hitro sestavljanje vozliščnih enačb za vezje na sliki 3.5. Upori  $R_E$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  in prevodnosti  $g_{11}$  in  $g_{22}$  prispevajo v vozliščno admitančno matriko

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{R_E} + g_{11} + g_{22} & -g_{22} & -g_{11} \\ -g_{22} & \frac{1}{R_C} + g_{22} & 0 \\ -g_{11} & 0 & \frac{1}{R_B} + g_{11} \end{array} \right] \end{array} \quad (3.39)$$

Kondenzator s kapacitivnostjo  $C$  obravnavamo enako, le da namesto prevodnosti pišemo admitanco  $j\omega C$ . Njen prispevek k vozliščni admitančni matriki znaša

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j\omega C \end{array} \right]. \end{array} \quad (3.40)$$

Napetostno krmiljen tokovni vir  $g_{21}$  je priključen med vozlišči 2 in 1, krmili pa ga napetost med vozliščema 3 in 1. Prispevek k vozliščni admitančni matriki je tako enak

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} g_{21} & 0 & -g_{21} \\ -g_{21} & 0 & g_{21} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{array} \quad (3.41)$$

Neodvisen tokovni vir  $I$  je priključen med vozlišči 1 in 0 in prispeva samo na desno stran vozliščnih enačb.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} I \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]. \end{array} \quad (3.42)$$

Če seštejemo prispevke (3.39)-(3.40), dobimo vozliščno admitančno matriko. Skupaj z desno stranjo (3.42) tvorita sistem vozliščnih enačb (3.30).

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{R_E} + g_{11} + g_{21} + g_{22} & -g_{22} & -(g_{11} + g_{21}) \\ -(g_{21} + g_{22}) & \frac{1}{R_C} + g_{22} & g_{21} \\ -g_{11} & 0 & \frac{1}{R_B} + g_{11} + j\omega C \end{array} \right] \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \right] = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left[ \begin{array}{c} I \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]. \end{array} \quad (3.43)$$

△

### 3.4 Linearni tropoli

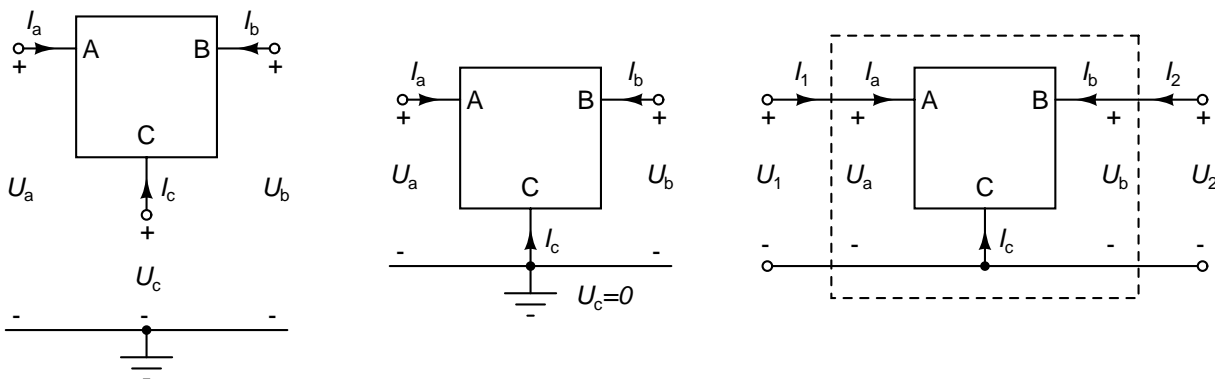
Linearni tropoli so linearna vezja s tremi priključki (slika 3.7, levo). Opišemo jih z nedoločeno admitančno matriko  $[Y_N]$ , ki podaja zveze med napetotmi in tokovi na vhodih tropola.

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} I_a \\ I_b \\ I_c \end{array} \right] = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \left[ \begin{array}{ccc} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} U_a \\ U_b \\ U_c \end{array} \right] = [Y_N] \left[ \begin{array}{c} U_a \\ U_b \\ U_c \end{array} \right]. \end{array} \quad (3.44)$$

Indeksi 1, 2 in 3 elementov matrike ustrezajo priključkom A, B in C tropola. Zaradi ohranitve naboja velja

$$I_a + I_b + I_c = 0 \quad (3.45)$$

V poglavju 1.6 smo videli, da zahteva (3.45) pravzaprav pomeni, da mora biti vsota elementov poljubnega stolpca nedoločene admitančne matrike enaka 0.



Slika 3.7: Tropol s priključki A, B in C (levo), tropol v orientaciji s skupno sponko C (na sredini) in tropol v orientaciji s skupno sponko C v vlogi dvovhodnega vezja (desno), pri čemer sponka A prevzame vlogo vhoda 1, sponka B pa vlogo vhoda 2.

Izberimo sedaj  $U_c = 0$ , kar pravzaprav pomeni, da postavimo tropol v orientacijo s skupno sponko C (slika 3.7, na sredini). Sistem enačb (3.44) se zato poenostavi v

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \end{bmatrix} = [Y_C] \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

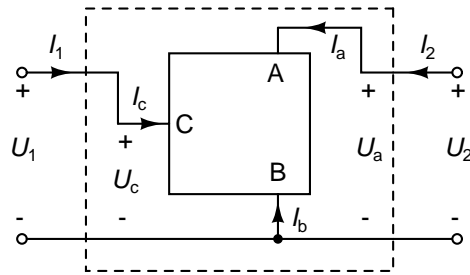
Matrika  $[Y_C]$  povezuje napetosti  $U_a$  in  $U_b$  s tokovoma  $I_a$  in  $I_b$  kadar je tropol vezan v orientaciji s skupno sponko C. Tropol v orientaciji s skupno sponko C lahko uporabimo tudi v vlogi dvovhodnega vezja, pri čemer je ena od sponk tropola skupna obema vhodoma dvovhodnega vezja. Na sliki 3.7 (desno) je sponka C v vlogi skupne sponke, sponki A in B pa v vlogi vhodov 1 in 2. Ker velja  $I_1 = I_a$ ,  $I_2 = I_b$ ,  $U_1 = U_a$ ,  $U_2 = U_b$  in  $U_c = 0$ , je enačba (3.46) enaka enačbi (2.4), ki opisuje dvovhodno vezje z admitančnimi parametri zbranimi v matriki  $[Y]$ . Vidimo, da je admitančna matrika tropola v orientaciji s skupno sponko C enaka matriki admitančnih parametrov dvovhodnega vezja ( $[Y]$ ), ki je prikazano na sliki 3.7 (desno).

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [Y_C] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

**Primer 3.8:** Recimo, da imamo podano admitančno matriko tropola za orientacijo s skupno sponko C, potrebujemo pa matriko admitančnih parametrov za tropol v orientaciji s skupno sponko B, pri čemer sponka C nastopa kot vhod 1, sponka A pa kot vhod 2 dvovhodnega vezja (slika 3.8). Vhodni podatek je torej admitančna matrika za orientacijo s skupno sponko C

$$[Y_C] = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.48)$$





Slika 3.8: Tropol v orientaciji s skupno sponko B v vlogi dvovhodnega vezja, pri čemer sponka C prevzame vlogo vhoda 1, sponka A pa vlogo vhoda 2.

Da dobimo nedoločeno admitančno matriko, moramo dodati še vrstico in stolpec za priključek C. Njene elemente izračunamo z upoštevanjem dejstva, da mora biti vsota elementov v vsaki vrstici in vsakem stolpcu nedoločene admitančne matrike enaka 0.

$$[Y_N] = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) \\ y_{21} & y_{22} & -(y_{21} + y_{22}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & -(y_{12} + y_{22}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.49)$$

Admitančno matriko za orientacijo s skupno sponko B dobimo s črtanjem vrstice in stolpca, ki pripadata tej sponki. Črtanje stolpca ustreza zahtevi  $U_b = 0$ , črtanje vrstice pa odstranitvi odvečne enačbe za tok  $I_b$ .

$$[Y_B] = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & -(y_{11} + y_{12}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.50)$$

Sistem enačb, ki opisujejo tropol v orientaciji s skupno sponko B (za  $U_b = 0$ ), je torej

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{matrix} A \\ C \end{matrix} \begin{bmatrix} y_{11} & -(y_{11} + y_{12}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ U_C \end{bmatrix} = [Y_B] \begin{bmatrix} U_A \\ U_C \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Ker je  $I_1 = I_c$ ,  $I_2 = I_a$ ,  $U_1 = U_c$  in  $U_2 = U_a$ , moramo zamenjati vrstni red napetosti v vektorju napetosti. To pomeni, da se morata zamenjata tudi stolpca matrike  $[Y_B]$ . Zaradi drugega vrstnega reda tokov, moramo zamenjati vrstni red enačb v sistemu, kar za sabo potegne medsebojno zamenjavo obeh vrstic v matriki  $[Y_B]$ . Dobimo

$$\begin{bmatrix} I_c \\ I_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} C(1) \\ A(2) \end{matrix} \begin{bmatrix} y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} & -(y_{11} + y_{21}) \\ -(y_{11} + y_{12}) & y_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_c \\ U_a \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Matrika admitančnih parametrov dvovhodnega vezja na sliki 3.8 je torej enaka

$$[Y] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} & -(y_{11} + y_{21}) \\ -(y_{11} + y_{12}) & y_{11} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.53)$$

△

**Primer 3.9:** Pokažimo, da je Masonova invarianta  $U$  neodvisna od orientacije tropola.

Recimo, da imamo podano matriko admitančnih parametrov za skupno sponko C (3.48). Matrika za orientacijo s skupno sponko B je enaka

$$[Y_B] = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11B} & y_{12B} \\ y_{21B} & y_{22B} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & -(y_{11} + y_{12}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.54)$$

V imenovalcu  $U$  imamo pri orientaciji s skupno sponko B izraz

$$g_{11B}g_{22B} - g_{12B}g_{21B} = g_{11}(g_{11} + g_{12} + g_{21} + g_{22}) - (g_{11} + g_{12})(g_{11} + g_{21}) = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}, \quad (3.55)$$

v števcu pa

$$|y_{12B} - y_{21B}|^2 = |-(y_{11} + y_{12}) + (y_{11} + y_{21})|^2 = |-y_{12} + y_{21}|^2 = |y_{12} - y_{21}|^2. \quad (3.56)$$

Masonova invarianta za orientacijo s skupno sponko B je enaka

$$U = \frac{|y_{12B} - y_{21B}|^2}{4(g_{11B}g_{22B} - g_{12B}g_{21B})} = \frac{|y_{12} - y_{21}|^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}, \quad (3.57)$$

kar je enak izraz, kot bi ga dobili pri orientaciji s skupno sponko C. Dokaz za orientacijo s skupno sponko A poteka enako.  $\triangle$

### 3.5 Vključitev tropolov v vozliščne enačbe vezja

Poglejmo si pisanje enačb za vezja, ki vsebujejo tropole, na dveh primerih.

**Primer 3.10:** Na sliki 3.9 (desno) je vezje, ki vsebuje tropol (slika 3.9, levo) v orientaciji s skupno sponko C. Tropol je podan z admitančno matriko za orientacijo s skupno sponko E.

$$\begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} U_b \\ U_c \end{bmatrix} = [Y_E] \begin{bmatrix} U_b \\ U_c \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

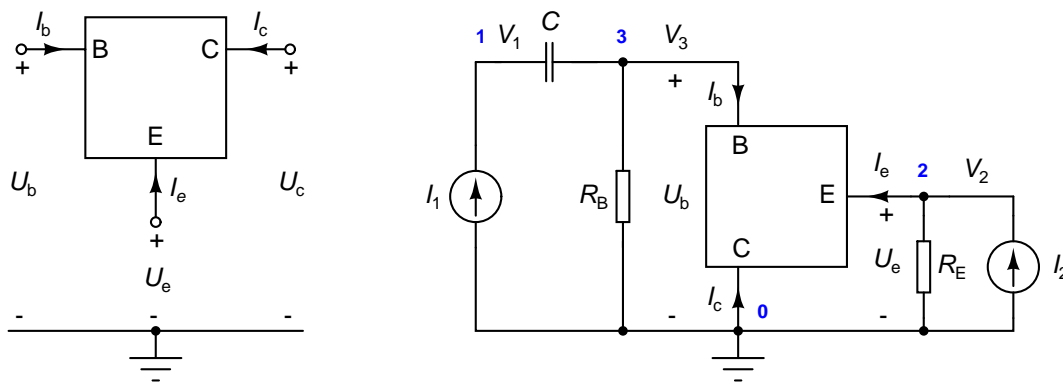
Določimo vozliščne enačbe vezja.

Ker tropol v vezju nastopa s skupno sponko C, zgradimo najprej nedoločeno admitančno matriko

$$[Y_N] = \begin{matrix} & \begin{matrix} B & C & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} B \\ C \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) \\ y_{21} & y_{22} & -(y_{21} + y_{22}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & -(y_{12} + y_{22}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.59)$$

v kateri prečrtamo vrstico in stolpec, ki pripadata skupni sponki (C). Dobimo admitančno matriko za orientacijo s skupno sponko C.

$$[Y_C] = \begin{matrix} & \begin{matrix} B & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} B \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & -(y_{11} + y_{12}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.60)$$



Slika 3.9: Trojpol s priključki B, C in E (levo) ter vezje s trojpolom v orientaciji s skupno sponko C (desno). Vozlišča so oštevilčena s števili od 0 do 3. Referenčno vozlišče nosi oznako 0.

Vezje ima 3 vozlišča, ki jim pripadajo vozliščni potenciali  $V_1$ ,  $V_2$  in  $V_3$ . Preskočimo zapisovanje posameznih tokov v vezju in kar takoj zapišemo vozliščne enačbe.

$$j\omega C(V_1 - V_3) - I_1 = 0, \quad (3.61)$$

$$\frac{1}{R_E}V_2 + I_e - I_2 = 0, \quad (3.62)$$

$$\frac{1}{R_B}V_3 + j\omega C(V_3 - V_1) + I_b = 0. \quad (3.63)$$

S pomočjo admitančen matrike za orientacijo s skupno sponko C lahko izrazimo tokova  $I_b$  in  $I_e$ .

$$\begin{bmatrix} I_b \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{B} & \text{E} \\ \text{E} & \text{E} \end{matrix} \begin{bmatrix} y_{11} & -(y_{11} + y_{12}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b \\ U_e \end{bmatrix} = [Y_C] \begin{bmatrix} U_b \\ U_e \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Napetosti  $U_b$  in  $U_e$  sta enaki vozliščnima potencialoma  $V_3$  in  $V_2$ . Tako lahko tokova  $I_b$  in  $I_e$  s pomočjo enačbe (3.64) zapišemo kot

$$I_b = y_{11}V_3 - (y_{11} + y_{12})V_2, \quad (3.65)$$

$$I_e = -(y_{11} + y_{21})V_3 + (y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22})V_2. \quad (3.66)$$

$$(3.67)$$

Izraza (3.65) in (3.66) vstavimo v enačbe (3.61)-(3.63), preuredimo, in dobimo vozliščne enačbe

$$j\omega CV_1 - j\omega CV_3 = I_1, \quad (3.68)$$

$$\left(\frac{1}{R_E} + y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22}\right)V_2 - (y_{11} + y_{21})V_3 = I_2, \quad (3.69)$$

$$-j\omega CV_1 - (y_{11} + y_{12})V_2 + \left(\frac{1}{R_B} + j\omega C + y_{11}\right)V_3 = 0. \quad (3.70)$$

Enačbe zapišimo še v matrični obliki.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} j\omega C & 0 & -j\omega C \\ 0 & \frac{1}{R_E} + y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} & -(y_{11} + y_{21}) \\ -j\omega C & -(y_{11} + y_{12}) & \frac{1}{R_B} + j\omega C + y_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Enačbo (3.71) bi lahko sestavili neposredno. V skladu s povedanim v poglavju 3.3 elementi  $C$ ,  $R_B$  in  $R_E$  prispevajo v vozliščno admitančno matriko.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} j\omega C & 0 & -j\omega C \\ 0 & \frac{1}{R_E} & 0 \\ -j\omega C & 0 & \frac{1}{R_B} + j\omega C \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Da določimo prispevek tropola vzamemo admitančno matriko za orientacijo s skupno sponko C (3.60) in zamenjamo indeksa B in E z indeksoma pripadajočih vozlišč 3 in 2.

$$\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} y_{11} & -(y_{11} + y_{12}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Ker v (3.73) nastopata vozlišči 3 in 2 v napačnem vrstnem redu, zamenjamo obe vrstici in oba stolpca.

$$\begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} & -(y_{11} + y_{21}) \\ -(y_{11} + y_{12}) & y_{11} \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Matriko dopolnimo še s stolpcem in vrstico za vozlišče 1, ki vsebujeta same ničle. Dobimo prispevek tropola v vozliščno admitančno matriko.

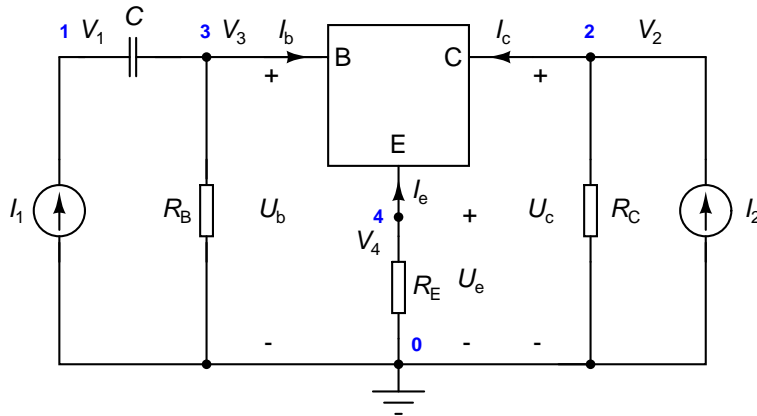
$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} & -(y_{11} + y_{21}) \\ 0 & -(y_{11} + y_{12}) & y_{11} \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Da dobimo vozliščno admitančno matriko, seštejemo prispevka (3.72) in (3.75). Na desno stran sistema enačb prispevata le tokovna vira  $I_1$  in  $I_2$ , tako kot je bilo to povedano v poglavju 3.3. Ko vse to združimo, dobimo sistem enačb (3.71).  $\triangle$

**Primer 3.11:** Na sliki 3.10 je vezje za katero je trolpol podan z admitančno matriko za orientacijo s skupno sponko E (3.58). Določimo vozliščne enačbe vezja.

Tokrat nobena od sponk tropola ni vezana na referenčno vozlišče, zato ga moramo opisati z nedoločeno admitančno matriko (3.59). Po preimenovanju indeksov B, C in E v pripadajoča imena vozlišč 3, 2 in 4, dobimo matriko

$$\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) \\ y_{21} & y_{22} & -(y_{21} + y_{22}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & -(y_{12} + y_{22}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$



Slika 3.10: Tropol s slike 3.9 (levo) v vezavi, ko nobena od spenk tropola ni vezana na referenčno vozlišče. Vozlišča so oštevilčena s števili od 0 do 4. Referenčno vozlišče nosi oznako 0.

ker bo vrstni red vozlišč v vozliščni admitančni matriki 1, 2, 3 in 4, zamenjamo prva dva stolpca in prvi dve vrstici ter dobljeno matriko dopolnimo s stolpcem in vrstico za vozlišče 1, ki oba vsebujeta same ničle. Dobimo prispevek tropola v vozliščno admitančno matriko, ki je sedaj velika  $4 \times 4$  elemente saj ima vezje 5 vozlišč, od katerih je eno referenčno.

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{22} & y_{21} & -(y_{21} + y_{22}) \\ 0 & y_{12} & y_{11} & -(y_{11} + y_{12}) \\ 0 & -(y_{12} + y_{22}) & -(y_{11} + y_{21}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.77)$$

Elementi  $C$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  in  $R_E$  prispevajo v vozliščno admitančno matriko

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} j\omega C & 0 & -j\omega C & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_C} & 0 & 0 \\ -j\omega C & 0 & \frac{1}{R_B} + j\omega C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_E} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.78)$$

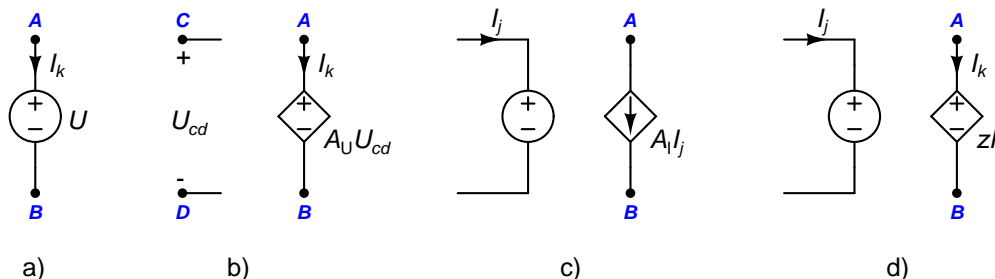
Ko seštejemo prispevka (3.77) in (3.78), dobimo vozliščno admitančno matriko. Če k temu dodamo še prispevka tokovnih virov  $I_1$  in  $I_2$ , dobimo sistem vozliščnih enačb

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} j\omega C & 0 & -j\omega C & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_C} + y_{22} & y_{21} & -(y_{21} + y_{22}) \\ -j\omega C & y_{12} & \frac{1}{R_B} + j\omega C + y_{11} & -(y_{11} + y_{12}) \\ 0 & -(y_{12} + y_{22}) & -(y_{11} + y_{21}) & \frac{1}{R_E} + y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.79) \quad \Delta$$

Vse kar smo povedali v tem poglavju o vključevanju tropolov v sistem enačb vezja lahko uporabimo tudi za poljubna  $n$ -polna vezja. Edina razlika je, da so tedaj nedoločene admitančne matrike velike  $n \times n$  elementov.

### 3.6 Napetostni viri in tokovno krmiljeni viri v vozliščnih enačbah

Ko smo vpeljali vozliščne enačbe in vozliščno analizo vezja v poglavju 3.2, smo povedali, da morajo biti vsi tokovi elementov izrazljivi z vozliščnimi napetostmi. Pomemben element vezja, za katerega to ni mogoče, je **neodvisen napetostni vir** (slika 3.11a). Tok skozi tak vir določa vezje, ki je priklopljeno nanj.



Slika 3.11: Od leve proti desni: a) neodvisen napetostni vir, b) napetostno krmiljen napetostni vir z ojačenjem  $A_U$ , c) tokovno krmiljen tokovni vir z ojačenjem  $A_I$  in d) tokovno krmiljen napetostni vir s transimpedanco  $z$ . Pri tokovno krmiljenih virih je krmilna veličina tok, ki teče skozi poljuben (neodvisen ali krmiljen) napetostni vir.

Da lahko tok takega vira vstavimo v vozliščno enačbo njegovih priključnih vozlišč (A in B), moramo v sistem enačb poleg vozliščnih napetosti dodati še novo neznanko – tok  $I$  neodvisnega napetostnega vira. Ker imamo sedaj eno neznanko več, potrebujemo še dodatno enačbo, ki bo enolično določila rešitev sistema. To je enačba napetosti med priključnima vozliščema A in B.

$$V_a - V_b = U \quad (3.80)$$

Vsak neodvisen napetostni vir prispeva dodatno neznanko in dodatno enačbo v sistem enačb. Njegov prispevek se pojavi tako v matriki koeficientov sistema enačb, kot tudi na desni strani. Za vezje z  $n$  vozlišči in  $m$  (neodvisnimi in krmiljenimi) napetostnimi viri, je prispevek napetostnega vira z indeksom  $k$  v sistem enačb enak

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ A \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc}
 1 & \dots & A & \dots & B & \dots & n-1 \\
 \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot
 \end{array} \right] \left| \begin{array}{cccccc}
 1 & \dots & k & \dots & m \\
 \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \dots & 1 & \dots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \dots & -1 & \dots & \cdot \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot
 \end{array} \right] \begin{array}{c}
 V_1 \\
 \vdots \\
 V_a \\
 \vdots \\
 V_b \\
 \vdots \\
 V_{n-1} \\
 I_1 \\
 \vdots \\
 I_k \\
 \vdots \\
 I_m
 \end{array} = \begin{array}{c}
 \cdot \\
 \vdots \\
 \cdot \\
 \vdots \\
 \cdot \\
 \vdots \\
 \cdot \\
 U \\
 \vdots \\
 \cdot
 \end{array} \quad (3.81)
 \end{array}$$

Za **napetostno krmiljeni napetostni vir** (slika 3.11b) velja podobno, le da je dodatna enačba v sistemu enaka

$$V_a - V_b = A_U(V_c - V_d), \quad (3.82)$$

ki jo preoblikujemo v

$$V_a - V_b - A_U V_c + A_U V_d = 0. \quad (3.83)$$

Tudi napetostno krmiljen napetostni vir prispeva dodatno neznanko in dodatno enačbo v sistem enačb. Njegov prispevek se pojavi samo v matriki koeficientov sistema enačb. Za vezje z  $n$  vozlišči in  $m$  (neodvisnimi in krmiljenimi) napetostnimi viri, je prispevek napetostno krmiljenjega napetostnega vira z indeksom  $k$  v matriko koeficientov enak

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ A \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccccccccc|cccc} 1 & \dots & A & \dots & B & \dots & C & \dots & D & \dots & n-1 & & 1 & \dots & k & \dots & m \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & 1 & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & -1 & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{array} \right] \cdot \quad (3.84) \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ m \end{array} \left[ \begin{array}{cccccccccccc|cccc} \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \dots & 1 & \dots & -1 & \dots & -A_U & \dots & A_U & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{array} \right] \cdot \end{array}$$

Tok **tokovno krmiljenega tokovnega vira** (slika 3.11c) lahko enostavno izrazimo z ostalimi neznankami v sistemu enačb, če je krmilna veličina tok, ki teče skozi  $j$ -ti (neodvisen ali odvisen) napetostni vir.

$$I = A_I I_j, \quad (3.85)$$

Ta vir ne prispeva dodatnih neznank v sistem enačb. Njegov prispevek se pojavi samo v matriki koeficientov.

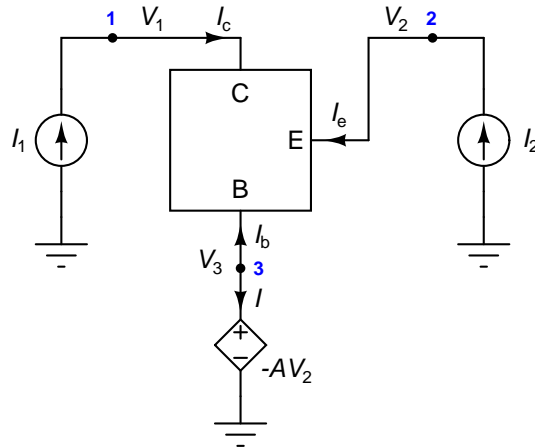
$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ A \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccccc|cccc} 1 & \dots & A & \dots & B & \dots & n-1 & & 1 & \dots & j & \dots & m \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & A_I & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & -A_I & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{array} \right] \cdot \quad (3.86) \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ m \end{array} \left[ \begin{array}{cccccccc|cccc} \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ m & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{array} \right] \cdot \end{array}$$

**Tokovno krmiljeni napetostni vir** (slika 3.11d) vnaša dodatno neznanko (tok) in enačbo v sistem enačb. Enačba vira se glasi

$$V_a - V_b = z I_j. \quad (3.87)$$







Slika 3.12: Vezje s trolpom (glej sliko 3.9, levo) in napetostno krmiljenim napetostnim virom.

**Primer 3.12:** Določimo sistem enačb za vezje na sliki 3.12. Vezje ima  $n = 4$  vozlišča (od katerih je eno referenčno) in  $m = 1$  napetostni vir, ki prinese eno dodatno neznanko (tok) v sistem enačb. Imamo tri neznanke, ki izvirajo iz vozliščnih napetosti vozlišč 1, 2 in 3:  $V_1$ ,  $V_2$  in  $V_3$ .

Nobena od sponk trolpa ni referenčna, zato izhajamo iz nedoločene admitančne matrike (3.59) v kateri preimenujemo indekse B, C in E v pripadajoče indekse vozlišč 3, 1 in 2.

$$\begin{matrix} & & 3 & & 1 & & 2 \\ \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccc} y_{11} & y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) \\ y_{21} & y_{22} & -(y_{21} + y_{22}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & -(y_{12} + y_{22}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} \end{array} \right] & & & & 
 \end{matrix} \quad (3.91)$$

Preuredimo vrstni red indeksov v 1, 2 in 3 ter dodamo stolpec in vrstico, ki predstavljata dodatno neznanko in enačbo, ki ju prinese v sistem napetostno krmiljen napetostni vir.

$$\begin{matrix} & & 1 & & 2 & & 3 & & I \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ I \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccc|c} y_{22} & -(y_{21} + y_{22}) & y_{21} & 0 \\ -(y_{12} + y_{22}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} & -(y_{11} + y_{21}) & 0 \\ y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) & y_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & & & & 
 \end{matrix} \quad (3.92)$$

Dodamo še prispevek napetostno krmiljenega napetostnega vira ter obeh tokovnih virov in dobimo sistem enačb

$$\begin{matrix} & & 1 & & 2 & & 3 & & I \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ I \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccc|c} y_{22} & -(y_{21} + y_{22}) & y_{21} & 0 \\ -(y_{12} + y_{22}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} & -(y_{11} + y_{21}) & 0 \\ y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) & y_{11} & 1 \\ 0 & A & 1 & 0 \end{array} \right] & \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & & \triangle
 \end{matrix} \quad (3.93)$$

### 3.7 Eliminacija notranjih neznank

V linearni elektroniki imamo opravka z linearnimi sistemi enačb oblike (3.90), ki opisujejo vezje. Reševanje takih sistemov enačb je dokaj enostavno. Postopku pravimo **Gaussova eliminacija** [7]. Za sistem  $n$  enačb z  $n$

neznankami

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

postopek poteka tako, da iz ene izmed enačb (ponavadi  $n$ -te) izrazimo eno izmed neznank (ponavadi  $n$ -to)

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{n(n-1)}}{a_{nn}}x_{n-1}. \quad (3.95)$$

Dobljeni izraz vstavimo v vsako od preostalih  $n - 1$  enačb in dobimo sistem  $n - 1$  enačb z  $n - 1$  neznankami

$$\begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1(n-1)}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2(n-1)}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-1)1}^1 & a_{(n-1)2}^1 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ \vdots \\ b_{n-1}^1 \end{bmatrix}, \quad (3.96)$$

s koeficienti

$$a_{ij}^1 = a_{ij} - \frac{a_{nj}a_{in}}{a_{nn}} \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.97)$$

$$b_i^1 = b_i - \frac{b_n a_{in}}{a_{nn}} \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.98)$$

na katerem lahko postopek ponovimo. Za  $k$ -ti korak eliminacije lahko zapišemo

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - \frac{a_{(n-k+1)j}^{k-1} a_{i(n-k+1)}^{k-1}}{a_{(n-k+1)(n-k+1)}^{k-1}} \quad i, j = 1, 2, \dots, n-k, \quad (3.99)$$

$$b_i^k = b_i^{k-1} - \frac{b_{n-k+1}^{k-1} a_{i(n-k+1)}^{k-1}}{a_{(n-k+1)(n-k+1)}^{k-1}} \quad i = 1, 2, \dots, n-k. \quad (3.100)$$

Pri tem števila zapisana nad koeficienti  $a$  in  $b$  ne predstavljajo eksponentov, ampak zaporedno številko koraka Gaussove eliminacije. Postopek ponavljamo, dokler nam ne ostane samo ena enačba z eno neznanko

$$a_{11}^{n-1} x_1 = b_1^{n-1}, \quad (3.101)$$

ki jo zlahka rešimo. Nato dobljeni rezultat vstavljamo v obratnem vrstnem redu v izraze za  $x_2, x_3, \dots, x_n$  in dobimo še vrednosti za preostalih  $n - 1$  neznank (postopku pravimo **substitucija**).

Gaussovo eliminacijo v praksi pogosto izvajamo z zapisom, ki je krajši in bolj prikladen za računanje, pri čemer sistem enačb zapišemo z **razširjeno matriko sistema enačb**, ki ima  $n + 1$  stolpcev in  $n$  vrstic. V prvih  $n$  stolpcev zapišemo koeficiente sistema enačb ( $a_{ij}$ ), v zadnji stolpec pa komponente vektorja desnih strani ( $b_i$ ).

$$\begin{array}{cccc|c} & 1 & 2 & \cdots & n & \\ 1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}. \quad (3.102)$$

Gaussovo eliminacijo sedaj izvajamo tako, da vzamemo  $n$ -to vrstico, jo pomnožimo z ustreznim faktorjem in prištejemo k vrstici  $n - 1$ . Faktor izberemo tako, da po seštevanju postane element v vrstici  $n - 1$  in stolpcu  $n$  enak 0. Postopek ponovimo za vse vrstice do vključno prve s čimer smo opravili prvi korak Gaussove eliminacije. Dobimo razširjeno matriko oblike

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & \\ a_{11}^1 & a_{12}^1 & \cdots & a_{1(n-1)}^1 & 0 & b_1^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2(n-1)}^1 & 0 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1}^1 & a_{(n-1)2}^1 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}^1 & 0 & b_{n-1}^1 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} & b_n \end{array} \right]. \quad (3.103)$$

Po opravljenih  $n - 1$  korakih Gaussove eliminacije postanejo vsi elementi nad glavno diagonalo v prvih  $n$  stolpcih razširjene matrike enaki 0.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & \\ a_{11}^{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1^{n-1} \\ a_{21}^{n-2} & a_{22}^{n-2} & \cdots & 0 & 0 & b_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1}^1 & a_{(n-1)2}^1 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)}^1 & 0 & b_{n-1}^1 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} & b_n \end{array} \right] \quad (3.104)$$

Iz razširjene matrike (3.104) vidimo, da je prva enačba po eliminaciji enaka (3.101). Iz nje določimo  $x_1$ . Druga enačba je oblike

$$a_{21}^{n-2}x_1 + a_{22}^{n-2}x_2 = b_2^{n-2} \quad (3.105)$$

in nam služi, za določitev  $x_2$  s prvim korakom substitucije

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}^{n-2}}(b_2^{n-2} - a_{21}^{n-2}x_1). \quad (3.106)$$

S postopkom substitucije in enačbami, ki pripadajo vrsticam 3,  $\dots$ ,  $n$  matrike (3.104), dobimo vrednosti neznank  $x_3, \dots, x_n$ .

**Primer 3.13:** Imejmo sistem enačb

$$14x_1 + 15x_2 + 6x_3 = 79 \quad (3.107)$$

$$4x_1 - 1x_2 - 2x_3 = 3 \quad (3.108)$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 18 \quad (3.109)$$

za katerega določimo rešitev z Gaussovo eliminacijo. Razširjena matrika sistema se glasi

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 14 & 15 & 6 & 79 \\ 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 18 \end{array} \right]. \quad (3.110)$$

V prvem koraku eliminacije tretjo vrstico pomnoženo z 1 prištejemo k drugi vrstici, pomnoženo z  $-3$  pa k prvi vrstici. Dobimo

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 14 & 15 & 6 & 79 \\ 4 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 18 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 14 & 15 & 6 & 79 \\ 6 & 3 & 0 & 21 \\ 2 & 4 & 2 & 18 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 8 & 3 & 0 & 25 \\ 6 & 3 & 0 & 21 \\ 2 & 4 & 2 & 18 \end{array} \right] \quad (3.111)$$

V drugem koraku vzamemo drugo vrstico in jo pomnoženo z  $-1$  prištejemo k prvi. Dobimo

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 21 \\ 2 & 4 & 2 & 18 \end{array} \right]. \quad (3.112)$$

Iz prve vrstice lahko sedaj določimo  $x_1$  kot

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2 \quad (3.113)$$

Sledi substitucija s pomočjo katere določimo  $x_2$  in  $x_3$ .

$$x_2 = \frac{1}{3}(21 - 6x_1) = \frac{1}{3}(21 - 6 \cdot 2) = \frac{9}{3} = 3 \quad (3.114)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(18 - 2x_1 - 4x_2) = \frac{1}{2}(18 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 3) = \frac{2}{2} = 1 \quad (3.115)$$

△

Včasih eliminacija ni mogoča, ker je diagonalni element razširjene matrike enak 0. Tako naprimer prvi korak Gaussove eliminacije ni izvedljiv za razširjeno matriko

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 8 & 15 \\ 6 & 3 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 19 \end{array} \right]. \quad (3.116)$$

Element  $a_{33}$  je enak nič zato s prvim korakom Gaussove eliminacije ne moremo ustvariti ničel v tretjem stolpcu. Rešitev problema je v zamenjavi vrstic matrike. Ta ustreza zamenjavi vrstnega reda enačb, kar pa ne spremeni rešitve sistema enačb. Tako naprimer, če zamenjamo drugo in tretjo vrstico (enačbo), dobimo razširjeno matriko

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 8 & 15 \\ 2 & 4 & 0 & 19 \\ 6 & 3 & 1 & 12 \end{array} \right] \quad (3.117)$$

na kateri pa lahko izvedemo prvi korak Gaussove eliminacije. Kadar izvajamo Gaussovo eliminacijo numerično (z računalnikom), menjavamo vrstice tako, da je absolutna vrednost diagonalnega elementa, ki ga uporabimo v postopku eliminacije, čim večja. Takemu menjavanju vrstic pravimo **delno pivotiranje** in v večini primerov prepreči pretirano velike numerične napake v končnem rezultatu. Pri delnem pivotiranju bi v razširjeni matriki (3.116) zamenjali prvo in tretjo vrstico in eliminacijo začeli z

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 19 \\ 6 & 3 & 1 & 12 \\ 2 & 5 & 8 & 15 \end{array} \right]. \quad (3.118)$$

Če se primeri, da kljub menjavanju vrstic ne moremo dobiti od nič različnega diagonalnega elementa je sistem bodisi nerešljiv ali pa ima neskončno mnogo rešitev.

Gaussova eliminacija je orodje s katerim pridemo od sistema enačb do rešitve, ki nam v primeru sistema (3.90) da vrednosti vozliščnih potencialov in tokov skozi napetostne vire. **Marsikdaj pa sistema ne želimo rešiti do konca, ampak se želimo le znebiti nekaterih neznank** (vozliščnih potencialov in tokov). Tem neznankam bomo rekli **notranje neznanke**. Gaussove eliminacije tako ne izvedemo do konca, ampak jo predčasno zaključimo. Postopku pravimo **redukcija sistema enačb**.

Z vsako eliminirano enznanko se sistem enačb zmanjša za eno enačbo. Enačbe, ki jih bomo „žrtvovali“, postavimo na konec sistema enačb, neznanke, ki jih želimo eliminirati, pa postavimo na konec vektorja neznank. Za eliminacijo  $k$  neznank opravimo prvih  $k$  korakov Gaussove eliminacije.

Po končanem postopku elementi v prvih  $n - k$  vrsticah in stolpcih razširjene matrike predstavljajo koeficiente za  $n - k$  enačb reduciranega sistema. Pripadajoče desne strani najdemo v prvih  $n - k$  vrsticah zadnjega stolpca razširjene matrike.

**Primer 3.14:** Vzemimo sistem enačb (3.30), ki opisuje vezje na sliki 3.5. Vezje ima štiri vozlišča ( $n = 4$ ) in ne vsebuje nobenega napetostnega vira ( $m = 0$ ). Sistem enačb zato vsebuje  $n - 1 + m = 3$  neznanke (vozliščne potenciale), ki so po vrsti  $V_1$   $V_2$  in  $V_3$ . recimo, da želimo iz sistema enačb eliminirati vozliščni potencial  $V_3$  in za to žrtvovati pripadajočo tretjo enačbo sistema (vozliščno enačbo vozlišča, ki mu pripada  $V_3$ ). Ker nastopata  $V_3$  in tretja enačba kot zadnja neznanka v vektorju neznank oziroma zadnja enačba v sistemu enačb, preurejanje sistema ni potrebno. Da se znebimo notranje neznanke  $V_3$ , bomo izvedli en korak Gaussove eliminacije na razširjeni matriki

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{R_E} + g_{11} + g_{21} + g_{22} & -g_{22} & -(g_{11} + g_{21}) & I \\ -(g_{21} + g_{22}) & \frac{1}{R_C} + g_{22} & g_{21} & 0 \\ -g_{11} & 0 & \frac{1}{R_B} + g_{11} + j\omega C & 0 \end{array} \right]. \quad (3.119)$$

Najprej tretjo vrstico pomnožimo z  $A = -g_{21}/(\frac{1}{R_B} + g_{11} + j\omega C)$  in jo prištejemo k drugi vrstici. Dobimo

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{R_E} + g_{11} + g_{21} + g_{22} & -g_{22} & -(g_{11} + g_{21}) & I \\ -(g_{21} + g_{22} + Ag_{11}) & \frac{1}{R_C} + g_{22} & 0 & 0 \\ -g_{11} & 0 & \frac{1}{R_B} + g_{11} + j\omega C & 0 \end{array} \right]. \quad (3.120)$$

Nato tretjo vrstico pomnoženo z  $B = (g_{11} + g_{21})/(\frac{1}{R_B} + g_{11} + j\omega C)$  prištejemo k prvi vrstici in dobimo

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{R_E} + (1 - B)g_{11} + g_{21} + g_{22} & -g_{22} & 0 & I \\ -(g_{21} + g_{22} + Ag_{11}) & \frac{1}{R_C} + g_{22} & 0 & 0 \\ -g_{11} & 0 & \frac{1}{R_B} + g_{11} + j\omega C & 0 \end{array} \right]. \quad (3.121)$$

Sedaj lahko v razširjeni matriki (3.121) brišemo tretjo vrstico (enačbo) in tretji stolpec (koeficiente, ki pripadajo neznanki  $V_3$ ). Dobimo

$$\left[ \begin{array}{cc|c} \frac{1}{R_E} + (1 - B)g_{11} + g_{21} + g_{22} & -g_{22} & I \\ -(g_{21} + g_{22} + Ag_{11}) & \frac{1}{R_C} + g_{22} & 0 \end{array} \right]. \quad (3.122)$$

Razširjena matrika (3.122) predstavlja sistem enačb

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{R_E} + (1 - B)g_{11} + g_{21} + g_{22} & -g_{22} \\ -(g_{21} + g_{22} + Ag_{11}) & \frac{1}{R_C} + g_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.123)$$

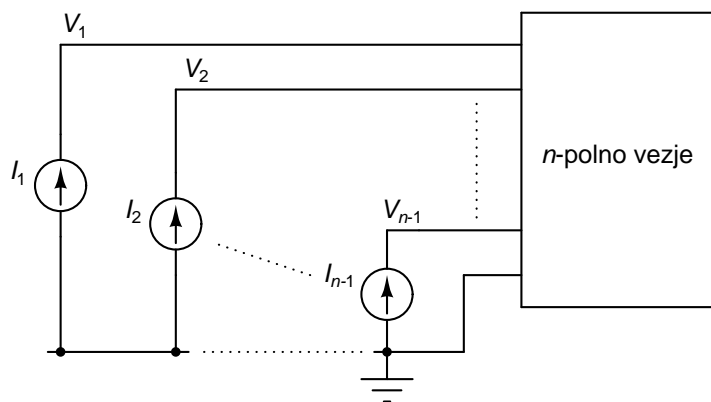
Sistem enačb (3.123) še vedno opisuje vezje na sliki 3.5, le da v njem ni omenjena neznanka  $V_3$ , ki smo jo kot notranjo neznanko eliminirali iz sistema enačb.  $\triangle$

### 3.8 Hitro določanje admitančne matrike $n$ -polnega vezja

Recimo, da želimo določiti admitančno matriko za  $n$ -polno vezje v orientaciji s skupno  $n$ -to sponko. Admitančna matrika opisuje linearno  $n$ -polno vezje, če slednje ne vsebuje neodvisnih virov. V poglavju 1.6 smo videli, da koeficiente  $y_{kl}$   $l$ -tega stolpca admitančne matrike določimo z miselnim eksperimentom, pri katerem vse priključke vezja vežemo na referenčno vozlišče, vezje vzbujaemo na  $l$ -tem vходу z neodvisnim napetostnim virom  $U$ , in pomerimo tokove  $I_k$  v prvih  $n - 1$  sponk vezja. Koeficienti  $j$ -tega stolpca admitančne matrike so tako enaki

$$y_{ij} = \frac{I_k}{U} \quad (3.124)$$

$n - 1$  takih miselnih eksperimentov nam da  $n - 1$  stolpcev admitančne matrike. Vsak tak miselni eksperiment terja, da rešimo eno vezje. Vidimo, da je naloga precej obsežna. Obstaja pa bližnjica, pri kateri uporabimo eliminacijo notranjih neznanek, ki smo jo spoznali v poglavju 3.7.



Slika 3.13: Priklp  $n$ -polnega vezja v orientaciji s skupno  $n$ -to sponko za hitro določanje admitančne matrike.

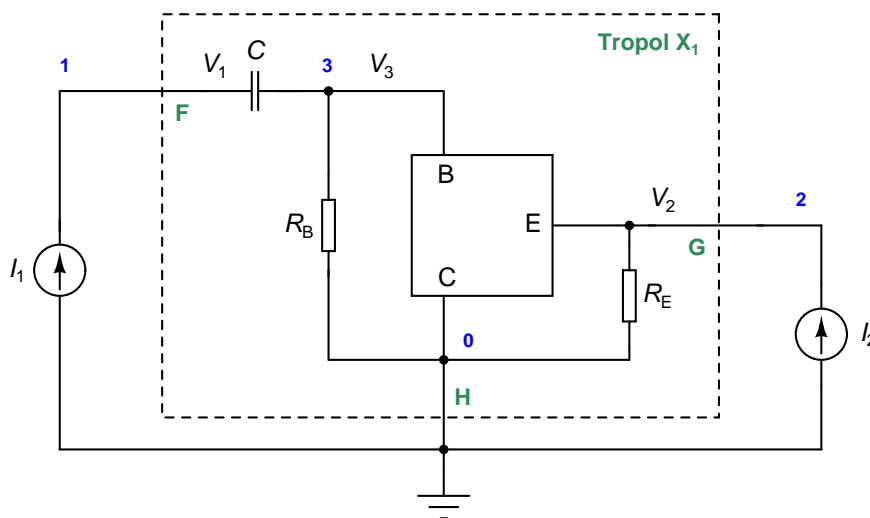
Najprej na prvih  $n - 1$  sponk  $n$ -polnega vezja priključimo neodvisne tokovne vire  $I_1, \dots, I_{n-1}$  kot kaže slika 3.13. Pri tem vhodne napetosti  $U_1, \dots, U_{n-1}$  postanejo vozliščni potenciali  $V_1, \dots, V_{n-1}$ .  $n$ -ta priključna sponka je referenčna in ustreza vozliščnemu potencialu  $0V$ . Poleg zunanjih priključkov ima vezje še  $N$  notranjih vozlišč z vozliščnimi potenciali  $V_1^{\text{int}}, \dots, V_N^{\text{int}}$  in  $m$  krmiljenih napetostnih virov, katerih tokove označimo z  $I_1^{\text{int}}, \dots, I_m^{\text{int}}$ . Vsega skupaj imamo torej  $n + N$  vozlišč, od katerih je eno referenčno ( $n$ -ta priključna sponka) in  $m$  napetostnih virov. Modificiran sistem vozliščnih enačb se glasi

$$\begin{array}{c|cc} & 1 \dots n+N-1 & 1 \dots m \\ \hline 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & [Y] & [A] \\ n+N-1 & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & [B] & [C] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m & \vdots & \vdots \end{array} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_1^{\text{int}} \\ \vdots \\ V_N^{\text{int}} \\ I_1^{\text{int}} \\ \vdots \\ I_m^{\text{int}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

Če enačbo (3.125) primerjamo z enačbo

$$\begin{matrix} & 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \left[ \begin{array}{ccc} y_{11} & \cdots & y_{1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{(n-1)1} & \cdots & y_{(n-1)(n-1)} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{array} \right] & = & \left[ \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{n-1} \end{array} \right], \end{matrix} \quad (3.126)$$

ki opisuje  $n$ -pol v orientaciji s skupno  $n$ -to sponko, vidimo, da dobimo enačbo (3.126), če v enačbi (3.125) eliminiramo zadnjih  $N+m$  enačb in  $N+m$  neznank (t.j.  $V_1^{\text{int}}, \dots, V_N^{\text{int}}$  in  $I_1^{\text{int}}, \dots, I_m^{\text{int}}$ ). Izvedemo torej prvih  $N+m$  korakov Gaussove eliminacije. Po končani eliminaciji brišemo zadnjih  $N+m$  vrstic ter stolpce od vključno  $n$ -tega do  $n+N-1$ -tega. Kar ostane v prvih  $n-1$  stolpcih tako reducirane razširjene matrike, predstavlja admitančno matriko  $n$ -polnega vezja.



Slika 3.14: Določanje admitančnih parametrov za tropol  $X_1$  s priključki F, G in H (obdan s črtkano črto) v orientaciji s skupno sponko H. Vezje je enako vezju na sliki 3.9 (desno).

**Primer 3.15:** Določimo admitančne parametre za tropol  $X_1$  na sliki 3.14 (obdan s črtkano črto). Priključke tropola bomo imenovali F, G in H. Admitančne parametre bomo določili za orientacijo s skupno sponko H. Vezje na sliki 3.14 ima  $n=4$  vozlišča, od katerih je eno notranje ( $N = 1$ ). Notranje vozlišče je označeno z oznako 3. Če pobrskamo po primerih v prejšnjih poglavjih, vidimo, da smo enačbe vezja na sliki 3.14 že zapisali v poglavju 3.5 kot sistem enačb (3.71). Prepišimo ga še enkrat v obliki razširjene matrike.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} j\omega C & 0 & -j\omega C & I_1 \\ 0 & \frac{1}{R_E} + y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} & -(y_{11} + y_{21}) & I_2 \\ -j\omega C & -(y_{11} + y_{12}) & \frac{1}{R_B} + j\omega C + y_{11} & 0 \end{array} \right]. \quad (3.127)$$

Želimo eliminirati tretjo enačbo in vozliščni potencial  $V_3$ . Tako tretja enačba kot tudi neznanka  $V_3$  nastopata zadnja v sistemu. Preurejanje sistema zato ni potrebno in lahko takoj izvedemo korak Gaussove eliminacije. Tretjo vrstico najprej pomnožimo z  $A = (y_{11} + y_{21}) / (\frac{1}{R_B} + j\omega C + y_{11})$  in jo prištejemo k drugi vrstici. Nato tretjo vrstico pomnožimo z  $B = j\omega C / (\frac{1}{R_B} + j\omega C + y_{11})$  in jo prištejemo k prvi vrstici. Dobimo sistem enačb

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} (1-B)j\omega C & -B(y_{11} + y_{12}) & 0 & I_1 \\ -Aj\omega C & \frac{1}{R_E} + (1-A)(y_{11} + y_{12}) + y_{21} + y_{22} & 0 & I_2 \\ -j\omega C & -(y_{11} + y_{12}) & \frac{1}{R_B} + j\omega C + y_{11} & 0 \end{array} \right]. \quad (3.128)$$

Po brisanju tretje vrstice in stolpca dobimo reduciran sistem enačb

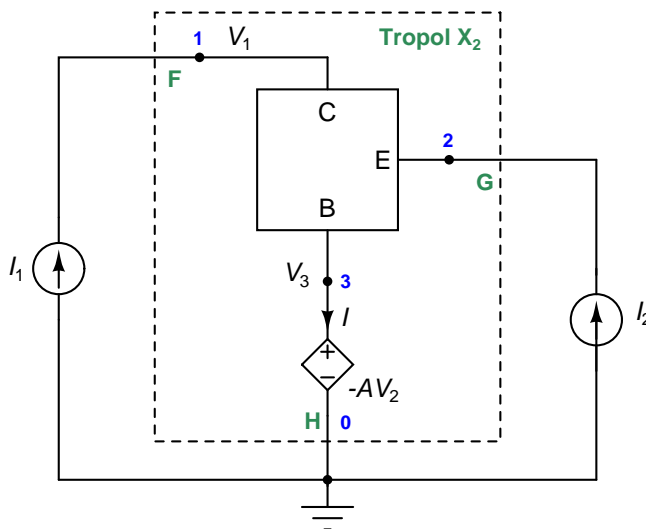
$$\begin{bmatrix} (1-B)j\omega C & -B(y_{11} + y_{12}) \\ -Aj\omega C & \frac{1}{R_E} + (1-A)(y_{11} + y_{12}) + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad (3.129)$$

ki ga v matrični obliki zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} (1-B)j\omega C & -B(y_{11} + y_{12}) \\ -Aj\omega C & \frac{1}{R_E} + (1-A)(y_{11} + y_{12}) + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (3.130)$$

Ker sta  $I_1$  in  $I_2$  vhodna tokova,  $V_1$  in  $V_2$  pa vhodni napetosti, ki pripadata priključkoma F in G tropola  $X_1$ , je admitančna matrika tropola  $X_1$  v orientaciji s skupno sponko H enaka

$$[Y_H] = \begin{bmatrix} y_{11H} & y_{12H} \\ y_{21H} & y_{22H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-B)j\omega C & -B(y_{11} + y_{12}) \\ -Aj\omega C & \frac{1}{R_E} + (1-A)(y_{11} + y_{12}) + y_{21} + y_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.131)$$



Slika 3.15: Določanje admitančnih parametrov za tropol  $X_2$  s priključki F, G in H (obdan s črtkano črto) v orientaciji s skupno sponko H. Vezje je enako vezju na sliki 3.12.

**Primer 3.16:** Poglejmo si še, kako določimo admitančno matriko, če so v vezju prisotni krmiljeni napetostni viri. Primer takega vezja je na sliki 3.15. Določiti moramo admitančno matriko tropola  $X_2$  s priključki F, G in H v orientaciji s skupno sponko H. Vezje ima  $n = 4$  vozlišča, od tega eno notranje ( $N = 1$ ), in en napetostni vir ( $m = 1$ ). Imamo torej  $n + m - 1 = 4$  enačbe. Ker je vezje na sliki 3.15 enako kot vezje na sliki 3.12, lahko povzamemo enačbe vezja iz (3.93) in jih zapišemo v obliki razširjene matrike.

$$\begin{bmatrix} y_{22} & -(y_{21} + y_{22}) & y_{21} & 0 \\ -(y_{12} + y_{22}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} & -(y_{11} + y_{21}) & 0 \\ y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) & y_{11} & 1 \\ 0 & A & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.132)$$

Eliminirati želimo notranji neznanki  $V_3$  in  $I$ , ki nastopata kot zadnji v vektorju neznank. Pri eliminaciji bomo žrtvovali zadnji dve enačbi (vozliščno enačbo vozlišča 3 in enačbo krmiljenega napetostnega vira). Naredili bomo



torej prva dva koraka Gaussove eliminacije. Ker je diagonalni element v 4. vrstici matrike enak nič, pred začetkom eliminacije zamenjamo 3. in 4. vrstico.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} y_{22} & -(y_{21} + y_{22}) & y_{21} & 0 & I_1 \\ -(y_{12} + y_{22}) & y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} & -(y_{11} + y_{21}) & 0 & I_2 \\ 0 & A & 1 & 0 & 0 \\ y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) & y_{11} & 1 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.133)$$

Prvi korak Gaussove eliminacije ni potreben, saj imamo v 4. stolpcu povsod ničle, razen na diagonalni (v 4. vrstici). V drugem koraku pomnožimo 3. vrstico z  $y_{11} + y_{21}$  in jo prištejemo k drugi vrstici. Nato tretjo vrstico pomnožimo z  $-y_{21}$  in jo prištejemo k prvi vrstici. Dobimo

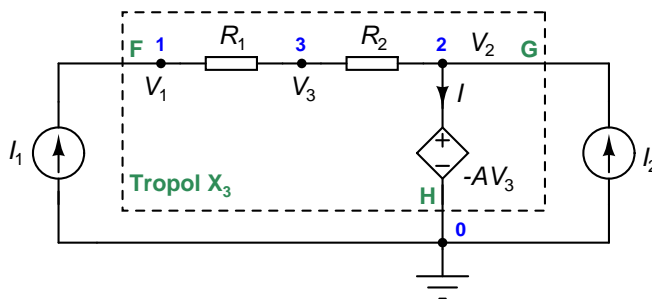
$$\left[ \begin{array}{cccc|c} y_{22} & -((1 + A)y_{21} + y_{22}) & 0 & 0 & I_1 \\ -(y_{12} + y_{22}) & (1 + A)(y_{11} + y_{21}) + y_{12} + y_{22} & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & A & 1 & 0 & 0 \\ y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) & y_{11} & 1 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.134)$$

Črtamo vrstico in stolpca 3-4 ter dobimo sistem enačb, ki ga v matrični obliki lahko zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} y_{22} & -((1 + A)y_{21} + y_{22}) \\ -(y_{12} + y_{22}) & (1 + A)(y_{11} + y_{21}) + y_{12} + y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (3.135)$$

Ker sta  $I_1$  in  $I_2$  vhodna tokova,  $V_1$  in  $V_2$  pa vhodni napetosti, ki pripadata priključkoma F in G tropola  $X_2$ , je admitančna matrika tropola  $X_2$  v orientaciji s skupno sponko H enaka

$$[Y_H] = \begin{bmatrix} y_{11H} & y_{12H} \\ y_{21H} & y_{22H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{22} & -((1 + A)y_{21} + y_{22}) \\ -(y_{12} + y_{22}) & (1 + A)(y_{11} + y_{21}) + y_{12} + y_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.136)$$



Slika 3.16: Določanje admitančnih parametrov za tropol  $X_3$  s priključki F, G in H (obdan s črtkano črto) v orientaciji s skupno sponko H.

**Primer 3.17:** Vseh linearnih  $n$ -polnih vezij, ki ne vsebujejo neodvisnih virov, ne moremo opisati z admitančno matriko. Primer takega vezja je na sliki 3.16. Poglejmo si, kako razpoznamo v postopku eliminacije notranjih neznank, da vezja ne moremo opisati z admitančno matriko.

Vežje na sliki 3.16 ima  $n = 4$  vozlišča, eno notranje vozlišče ( $N = 1$ ) in en napetostni vir ( $m = 1$ ). Imamo torej  $n + m - 1 = 4$  enačbe, ki jih v matrični obliki zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & -G_1 & 0 \\ 0 & G_2 & -G_2 & 1 \\ -G_1 & -G_2 & G_1 + G_2 & 0 \\ 0 & 1 & A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.137)$$

pri čemer je  $G_1 = 1/R_1$  in  $G_2 = 1/R_2$ . Zapišimo sistem enačb v obliki razširjene matrike.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} G_1 & 0 & -G_1 & 0 & I_1 \\ 0 & G_2 & -G_2 & 1 & I_2 \\ -G_1 & -G_2 & G_1 + G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.138)$$

ker se želimo znebiti zadnjih dveh neznank ( $V_3$  in  $I$ ), bomo naredili prva dva koraka Gaussove eliminacije. Pred začetkom eliminacije zamenjamo 2. in 4. vrstico.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} G_1 & 0 & -G_1 & 0 & I_1 \\ -G_1 & -G_2 & G_1 + G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & -G_2 & 1 & I_2 \end{array} \right]. \quad (3.139)$$

Prvi korak eliminacije ni potreben (v 4. stolpcu imamo že ničle). Po opravljenem drugem koraku dobimo razširjeno matriko

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc} G_1 & A^{-1}G_1 & 0 & 0 & I_1 \\ -G_1 & -(A^{-1}G_1 + (1 + A^{-1})G_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & -G_2 & 1 & I_2 \end{array} \right] \quad (3.140)$$

v kateri brišemo vrstici in stolpca 3-4. Sistem enačb zapišemo v matrični obliki

$$\left[ \begin{array}{cc} G_1 & A^{-1}G_1 \\ -G_1 & -(A^{-1}G_1 + (1 + A^{-1})G_2) \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.141)$$

Če upoštevamo, da sta  $I_1$  in  $I_2$  vhodna tokova,  $V_1$  in  $V_2$  pa vhodni napetosti, ki pripadata sponkama F in G tropola  $X_3$ , vidimo, da sistem enačb (3.141) po obliki ni enak definiciji admitančnih parametrov tropola za orientacijo s skupno sponko H, ki je podana z enačbo

$$[Y_H] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11H} & y_{12H} \\ y_{21H} & y_{22H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (3.142)$$

Manjka tok  $I_2$  na desni strani enačb. Do izginotja toka pride med redukcijo sistema enačb. Vzrok tiči v napetostno krmiljenem napetostnem viru priključenem na izhodno sponko tropola  $X_3$ . Vir določa izhodno napetost tropola  $V_2$ , ki zato postane neodvisna od toka  $I_2$ . To ima za posledico, da tok neodvisnega vira  $I_2$  ne nastopa v enačbah.

Ker se sistem enačb (3.141), ki smo ga dobili z redukcijo modificiranega sistema vozliščnih enačb (3.137) ne ujema z definicijo admitančnih parametrov tropola v orientaciji s skupno sponko H (3.142), tropola ne moremo opisati z admitančnimi parametri.  $\triangle$

## 4

# Enosmerne karakteristike nelinearnih elementov

Čeprav so glavna tema te knjige linearna vezja, pa se praktične izvedbe teh vezij poslužujejo nelinearnih elementov, kot so diode, tranzistorji, ipd. Čeprav so karakteristike teh elementov močno nelinearne, pa jih lahko v okolici neke delovne točke – to je za majhna odstopanja tokov od delovne točke – obravnavamo kot linearna. Pozneje bomo pokazali, da se območje linearnosti lahko močno razširi, če uporabimo negativno povratno vezavo.

Za obravnavo nelinearnih elementov v okviru linearne elektronike potrebujemo matematična orodja, ki jih predstavimo v obliki nadomestnih vezij elementov za majhne signale. V tem poglavju bomo prehodili pot od nelinearnih karakteristik elementov do pripadajočih nadomestnih vezij za majhne signale.

Poudariti velja še, da so (enosmerne) karakteristike, ki jih bomo spoznali v tem poglavju, veljavne samo, če se signali spreminjajo dovolj počasi. V tem primeru so tokovi elementov odvisni samo od trenutnih vrednosti napetosti na sponkah. Pri večjih hitrostih spreminjanja signalov (višjih frekvencah) moramo upoštevati tudi naboj, ki ga nelinearni elementi hranijo. S slednjim se bomo ukvarjali v poglavju 5.

## 4.1 Polprevodniška dioda

Tok in napetost polprevodniške diode (slika 4.1, levo) podaja zveza [8]

$$i_D = I_S \left( e^{\frac{u_D}{V_T}} - 1 \right). \quad (4.1)$$

$I_S$  je tok nasičenja in je tipično v območju od  $10^{-9}$  A do  $10^{-15}$  A. Termično napetost  $V_T$  izračunamo po formuli

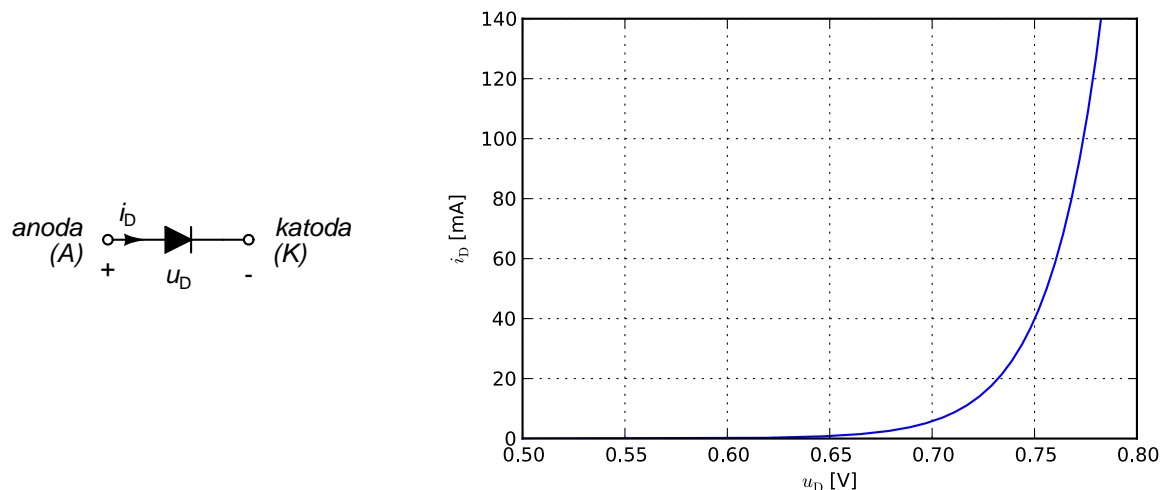
$$V_T = \frac{kT}{q}, \quad (4.2)$$

kjer je  $k$  Boltzmannova konstanta ( $1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K) in  $q$  naboj elektrona ( $1,60 \cdot 10^{-19}$  As). Pri temperaturi  $T = 300$  K ( $27^\circ$  C) znaša termična napetost 25,85 mV. Karakteristiko polprevodniške diode prikazuje slika 4.1 (desno). Vidimo, da se večina dogajanja odvije, ko je napetost na diodi med 0,6 V in 0,8 V. Pri višjih napetostih so tokovi tako veliki, da lahko poškodujejo diodo, pri nižjih napetostih pa dioda praktično ne prevaja.

Recimo, da imamo na diodi napetost, ki je sestavljena iz enosmerne napetosti  $U_D$  in odstopanja  $u_d$ . Odstopanje napetosti povzroči odstopanje toka  $i_d$  od vrednosti v delovni točki  $I_D$ . Velja

$$u_D = U_D + u_d, \quad (4.3)$$

$$i_D = I_D + i_d. \quad (4.4)$$



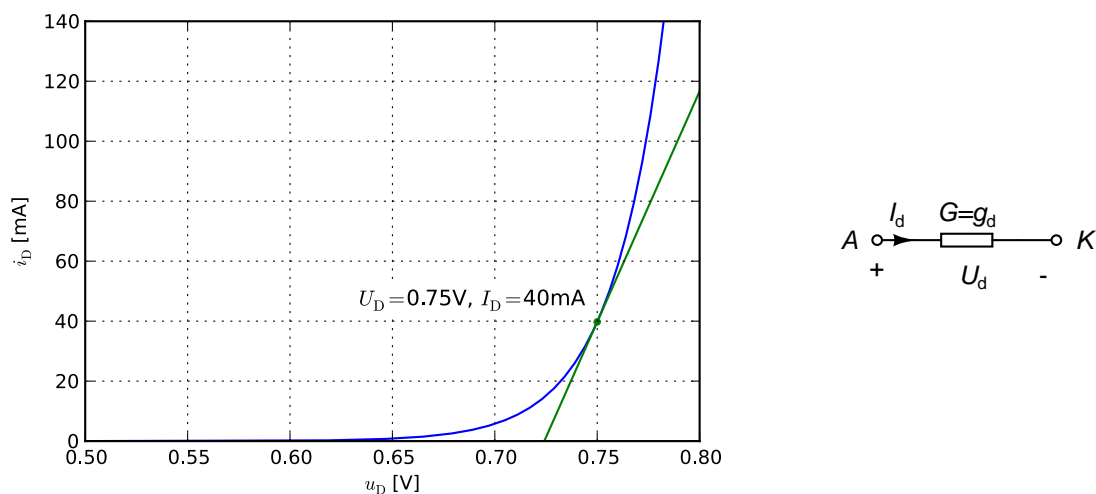
Slika 4.1: Simbol polprevodniške diode (levo) in njena karakteristika pri toku nasičenja  $I_S = 0,01\text{pA}$  in temperaturi  $T = 300\text{K}$  (desno).

Če je odstopanje majhno, lahko tok diode zapišemo s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto, v kateri zanemarimo člene z višjimi odvodi

$$i_D = i_D|_{u_D=U_D} + \left. \frac{di_D}{du_D} \right|_{u_D=U_D} \cdot u_d = I_D + i_d. \quad (4.5)$$

Zvezo med  $U_D$  in  $I_D = i_D|_{u_D=U_D}$ , ki jima pravimo tudi **delovna točka diode**, podaja nelinearna karakteristika diode (4.1). Delovna točka diode je določena bodisi s tokom diode  $I_D$  ali napetostjo na diodi  $U_D$ . Ko poznamo eno, lahko drugo določimo s pomočjo relacije (4.1). Zveza med majhnim odstopanjem napetosti  $u_d$  in toka  $i_d$  od delovne točke je linearna in jo lahko pišemo kot

$$i_d = g_d u_d. \quad (4.6)$$



Slika 4.2: Linearizacije karakteristike diode v delovni točki  $U_D = 0,75\text{V}$  (levo) in model diode za majhne signale (desno).

Sorazmernostni faktor  $g_d$  je odvisen od delovne točke in ima enoto prevodnosti (A/V). Imenujemo ga **diferencialna prevodnost**.

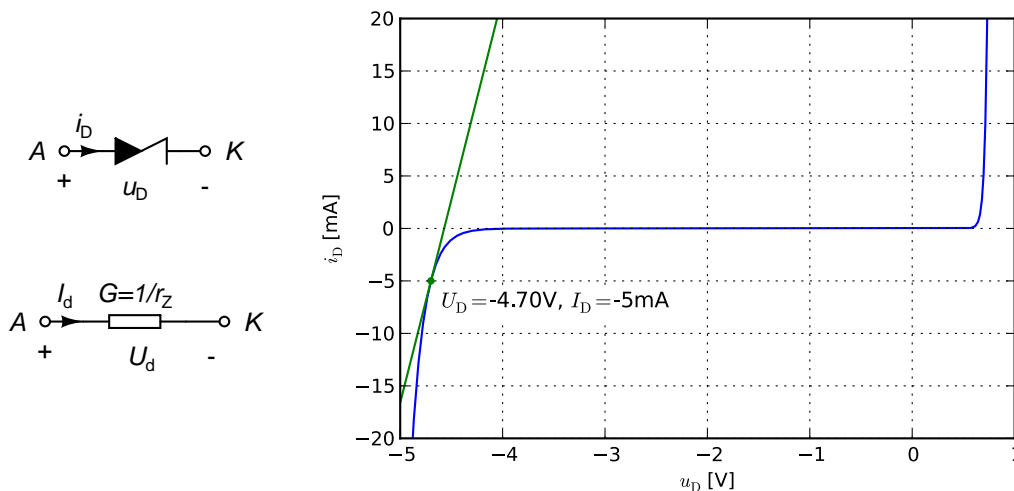
$$g_d = \left. \frac{di_D}{du_D} \right|_{u_D=U_D} = \frac{I_S}{V_T} e^{\frac{u_D}{V_T}} \approx \frac{I_D}{V_T}. \quad (4.7)$$

Poenostavitev  $\frac{I_D}{V_T}$  lahko vpeljemo, če je eksponentni člen v enačbi (4.1) mnogo večji od 1, kar se zgodi pri  $u_D > 6V_T$  (pri temperaturi 300K je to malo več kot 155mV). Tedaj je napaka zaradi poenostavitve manjša od 0,25%. Če sta majhna signala  $i_d(t)$  in  $u_d(t)$  izmenična, ju lahko predstavimo s kompleksorjema  $I_d$  in  $U_d$ . Tudi med kompleksorjema imamo linearno zvezo

$$I_d = g_d U_d. \quad (4.8)$$

Z zvezo (4.5) smo nelinearno karakteristiko diode (4.1) zamenjali s tangento na karakteristiko v delovni točki (slika 4.2, levo). Ta poenostavitev, ki ji pravimo tudi **linearizacija modela**, je smiselna, če tokovi in napetosti le malo odstopajo od delovne točke. Strmina tangente je enaka diferencialni prevodnosti diode  $g_d$ . Ker je zveza med odstopanjem toka in odstopanjem napetosti od delovne točke (4.6) linearna, jo lahko predstavimo v obliki **nadomestnega vezja za majhne signale** (slika 4.2, desno).

## 4.2 Zenerjeva dioda

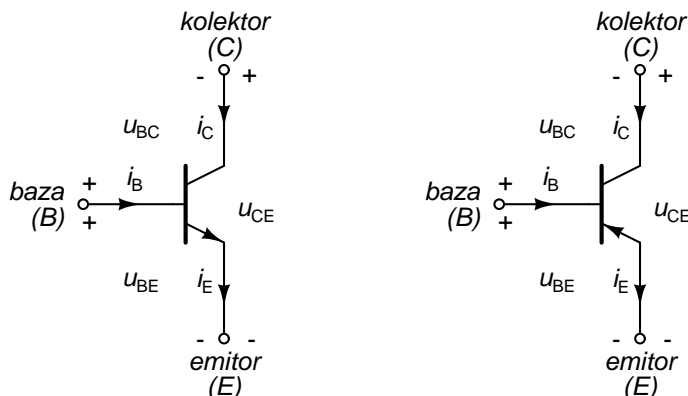


Slika 4.3: Simbol za Zenerjevo diodo (levo zgoraj), nadomestno vezje za majhne signale v točki preboja (levo spodaj) in karakteristika z vrisano tangento v točki preboja  $U_D = -U_Z = -4.7V$  (desno). Strmina tangente je enaka  $1/r_Z$ .

Zenerjeva dioda (slika 4.3, levo zgoraj) je po karakteristiki enaka navadni diodi. V slednji se pri dovolj visoki negativni napetosti  $u_D$  zgodi preboj, ki je nezaželen pojav. Za Zenerjeve diode je napetost preboja  $u_D = -U_Z$  zelo natančno določena (slika 4.3, desno). To lastnost izkoriščamo za izvedbo natančnih napetostnih virov.

Proizvajalci za Zenerjeve diode podajajo **prebojno (Zenerjevo) napetost**  $U_Z$ , pripadajoč tok  $I_Z$  in diferencialno **Zenerjevo upornost**  $r_Z$ . Zenerjeva upornost je obratna vrednost diferencialne prevodnosti v točki preboja, ko je  $U_D = -U_Z$  in  $I_D = -I_Z$ . Ponavadi je podan tudi temperaturni koeficient Zenerjeve napetosti, saj je temperaturna stabilnost napetostne reference pomemben podatek pri načrtovanju vezja. Nadomestno vezje Zenerjeve diode za majhne signale v točki preboja je enako nadomestnemu vezju diode, kjer upoštevamo  $g_d = 1/r_Z$  (slika 4.3, levo spodaj).

### 4.3 Bipolarni tranzistor



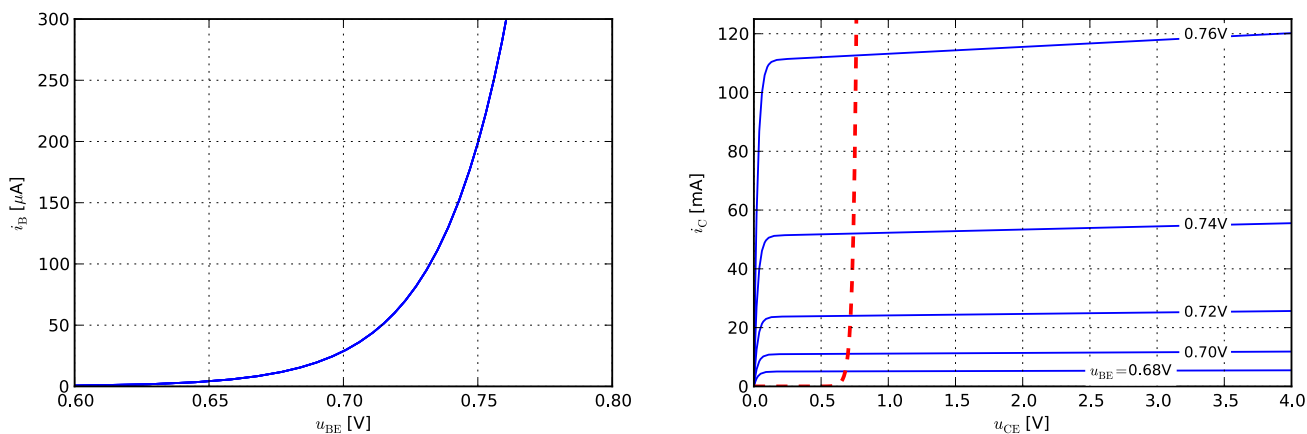
Slika 4.4: Simbol za bipolarni tranzistor tipa NPN (levo) in PNP (desno).

Odvisnost baznega ( $i_B$ ) in kolektorskega ( $i_C$ ) toka od napetosti  $u_{BE}$  in  $u_{BC}$  bipolarnega tranzistorja tipa NPN (slika 4.4, levo) lahko opišemo s pomočjo razširjenega modela Ebersa in Molla, ki je enak osnovnemu modelu [9] z nekaterimi dodatki povzetimi iz podrobnejšega modela Gummela in Poona [10]. Model je podan z enačbama

$$i_B = \frac{I_S}{\beta_F} \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) + \frac{I_S}{\beta_R} \left( e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \right), \quad (4.9)$$

$$i_C = -\frac{I_S}{\beta_R} \left( e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \right) + \left( I_S \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) - I_S \left( e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \right) \right) \left( 1 - \frac{u_{BE}}{V_{AR}} - \frac{u_{BC}}{V_{AF}} \right), \quad (4.10)$$

Pri tem sta  $\beta_F$  in  $\beta_R$  kratkostična tokovna ojačevalna faktorja za orientacijo s skupnim emitorjem v smeri naprej in nazaj.  $\beta_F$  je tipično reda velikosti 100,  $\beta_R$  pa 10.  $I_S$  je tok nasičenja in je tipično v območju od  $10^{-9}$  A do  $10^{-15}$  A.  $V_{AF}$  in  $V_{AR}$  sta Early-jevi napetosti za prevajanje v smeri naprej oziroma nazaj. Njuna vrednost je med 10V in nekaj 100V. Termično napetost  $V_T$  določimo po formuli (4.2).



Slika 4.5: Karakteristike NPN tranzistorja s parametri  $I_S = 0,02\text{pA}$ ,  $\beta_F = 400$ ,  $\beta_R = 50$ ,  $V_{AF} = 50\text{V}$  in  $V_{AR} = 20\text{V}$  pri temperaturi  $T = 300\text{K}$ . Odvisnost  $i_B(u_{BE})$  za vrednosti  $u_{CE}$  od 1V do 8V (levo) in odvisnost  $i_C(u_{CE})$  za vrednosti  $u_{BE}$  od 0,68V do 0,76V (desno). Črtna krivulja razmejuje področje nasičenja na levi strani od aktivnega področja na desni.

Primer karakteristik bipolarnega tranzistorja tipa NPN je na sliki 4.5. Pri tem smo upoštevali, da je  $u_{CE} = u_{BE} - u_{BC}$ . Vidimo, da je tok  $i_B$  eksponentno odvisen od napetosti  $u_{BE}$ . Karakteristike  $i_B(u_{BE})$  so skoraj neodvisne od napetosti  $u_{CE}$ . Polje karakteristik  $i_C(u_{CE})$  je pri pozitivnih  $u_{BE}$  razdeljeno v levi del, ki ga imenujemo **področje nasičenja**, in desni del ali **aktivno področje**. V področju nasičenja velja  $u_{BC} > 0$ , v aktivnem področju pa  $u_{BC} < 0$ . V področju nasičenja tok  $i_C$  hitro raste z napetostjo  $u_{CE}$ , nakar se v aktivnem področju ustali in je le malo odvisen od  $u_{CE}$ . Vrednost, pri kateri se  $i_C$  ustali v aktivnem področju, eksponentno raste z večanjem  $u_{BE}$ .

Meja med področjem nasičenja in aktivnim področjem poteka po krivulji, ki jo dobimo, če predpostavimo  $u_{BC} = 0$  oziroma  $u_{BE} = u_{CE}$ . Opisuje jo enačba

$$i_C = I_S \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{u_{BE}}{V_{AR}} \right) = I_S \left( e^{\frac{u_{CE}}{V_T}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{u_{CE}}{V_{AR}} \right), \quad (4.11)$$

ki je pri dovolj veliki vrednosti  $V_{AR}$  približno enaka karakteristiki diode s tokom nasičenja  $I_S$ .

Vidimo, da so karakteristike tranzistorja  $i_B(u_{BE})$  praktično neodvisne od napetosti  $u_{CE}$ . Večina dogajanja se odvije pri napetostih  $u_{BE}$  med 0,6V in 0,8V. Pri nižjih napetostih je tranzistor praktično zaprt ( $i_C = 0$ ), pri višjih napetostih pa je kolektorski tok že blizu zgornji meji nad katero poškodujemo tranzistor.

Zaradi tki. Earlyjevega pojava so karakteristike  $i_C(u_{CE})$  v aktivnem področju nagnjene, tako da kolektorki tok rahlo narašča z večanjem napetosti  $u_{CE}$ . Pojav je bolj izrazit pri večjih kolektorskih tokovih. Opisuje ga parameter  $V_{AF}$ . Early-jev pojav opazimo tudi v reverznem aktivnem področju ( $u_{BE} < 0$  in  $u_{BC} > 0$ ). V tem primeru ga opisuje parameter  $V_{AR}$ .

Če ne upoštevamo Early-jevega pojava ( $V_{AF} \rightarrow \infty$  in  $V_{AR} \rightarrow \infty$ ), dobimo osnovni model Ebersa in Molla

$$i_B = \frac{I_S}{\beta_F} \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) + \frac{I_S}{\beta_R} \left( e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \right), \quad (4.12)$$

$$i_C = -\frac{I_S}{\beta_R} \left( e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \right) + I_S \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) - I_S \left( e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \right), \quad (4.13)$$

ki ga z upoštevanjem zvez

$$i_E = i_B + i_C, \quad (4.14)$$

$$1 + \frac{1}{\beta_F} = \frac{1}{\alpha_F}, \quad (4.15)$$

$$1 + \frac{1}{\beta_R} = \frac{1}{\alpha_R}, \quad (4.16)$$

$$I_S = \alpha_R I_{SC} = \alpha_F I_{SE}, \quad (4.17)$$

lahko prevedemo v bolj prepoznavno obliko

$$i_E = \left( 1 + \frac{1}{\beta_F} \right) I_S \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) - I_S \left( e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \right) = I_{SE} \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) - \alpha_R I_{SC} \left( e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \right), \quad (4.18)$$

$$i_C = I_S \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) - \left( 1 + \frac{1}{\beta_R} \right) I_S \left( e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \right) = \alpha_F I_{SE} \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) - I_{SC} \left( e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \right). \quad (4.19)$$

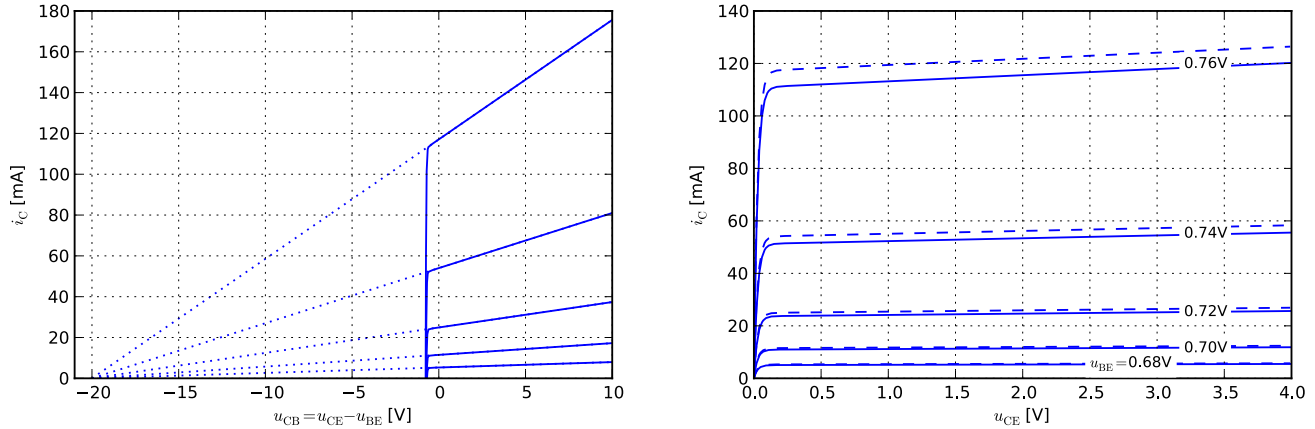
**Ker pri večini vezij linearne elektronike bipolarni tranzistor deluje v aktivnem področju**, kjer velja  $u_{BE} \geq 0$  in  $u_{BC} \leq 0$ , bomo izhajali iz poenostavljenih enačb. Pri  $-u_{BC} > 6V_T$  (pri temperaturi 300K je to malo več kot 155mV) lahko poenostavimo člene

$$e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \approx -1 \quad (4.20)$$

Model (4.9)-(4.10) se v aktivnem področju poenostavi v

$$i_B = \frac{I_S}{\beta_F} \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) - \frac{I_S}{\beta_R}, \quad (4.21)$$

$$i_C = \frac{I_S}{\beta_R} + \left( I_S \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) + I_S \right) \left( 1 - \frac{U_{BE}}{V_{AR}} - \frac{u_{BC}}{V_{AF}} \right), \quad (4.22)$$



Slika 4.6: Podaljški karakteristik  $i_C(u_{CB}) = i_C(U_{CE} - u_{BE})$  v aktivnem področju se sekajo pri  $u_{CB} = -V_{AF}$ , če je  $V_{AR} = \infty$  - slika za  $V_{AF} = 20V$  (levo). Vpliv poenostavitve (4.23) (črtkana črta) na karakteristike tranzistorja (desno).

Vpliv parametra  $V_{AF}$  na karakteristike tranzistorja prikazuje slika 4.6 (levo). Podaljški karakteristik v aktivnem področju se sekajo pri  $u_{CB} = u_{CE} - u_{BE} = -V_{AF}$ . To velja le, če je  $V_{AR} = \infty$ .  $V_{AR} < \infty$  povzroči, da podaljški rahlo zgrešijo skupno presečišče. Če upoštevamo tipične vrednosti napetosti  $u_{BE}$ , ki so precej manjše od  $u_{CE}$  in  $V_{AR}$ , velja  $-u_{BC} \approx u_{CE}$  in

$$1 - \frac{u_{BE}}{V_{AR}} - \frac{u_{BC}}{V_{AF}} \approx 1 + \frac{u_{CE}}{V_{AF}}. \quad (4.23)$$

Poenostavitev (4.23) vnese nekaj napake. Slika 4.6 (desno) prikazuje odstopanja, ki jih povzroči. Kolektorski tok v aktivnem področju se tako poenostavi v

$$i_C = \frac{I_S}{\beta_R} + \left( I_S \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) + I_S \right) \left( 1 + \frac{u_{CE}}{V_{AF}} \right) \quad (4.24)$$

$$= \beta_F i_B \left( 1 + \frac{u_{CE}}{V_{AF}} \right) + I_S \left( \frac{1}{\beta_R} + \left( \frac{\beta_F}{\beta_R} + 1 \right) \left( 1 + \frac{u_{CE}}{V_{AF}} \right) \right) \quad (4.25)$$

$$= \beta_F i_B \left( 1 + \frac{u_{CE}}{V_{AF}} \right) + I_{CEO}(u_{CE}). \quad (4.26)$$

Člen  $I_{CEO}(u_{CE})$  predstavlja kolektorski tok, ki teče tudi, če ni baznega toka (odprta baza).  $I_{CEO}$  le malo prispeva h kolektorskemu toku v primerjavi prvim členom v enačbi (4.26), pa tudi kvocient  $\frac{u_{CE}}{V_{AF}}$  je ponavadi precej manjši od ena. Zato  $I_{CEO}$  pogosto obravnavamo kot neodvisnega od  $u_{CE}$ .

$$I_{CEO} \approx I_S \left( \frac{1 + \beta_F}{\beta_R} + 1 \right). \quad (4.27)$$

Podatkovni listi tranzistorjev ponavadi navajajo  $I_{CBO}$ , ki je enak toku  $i_C$  pri  $u_{BC} < 0$  in odprti emitorski sponki ( $i_E = 0$ ). Če zanemarimo vpliv  $V_{AF}$  in  $V_{AR}$  ( $V_{AF}, V_{AR} \rightarrow \infty$ ), dobimo

$$I_{CEO} = (1 + \beta_F) I_{CBO}. \quad (4.28)$$



Včasih je namesto  $I_{CBO}$  podan  $I_{CES}$ , ki je enak toku  $i_C$  pri  $u_{CE} > 0$  in kratkem stiku med bazo in emitorjem ( $u_{BE} = 0$ ). Ob zanemaritvi vpliva  $V_{AF}$  in  $V_{AR}$  sledi iz modela tranzistorja (4.9)-(4.10) zveza

$$I_{CEO} = (1 + \beta_F)(1 - \alpha_F \alpha_R) I_{CES} = \frac{1 + \beta_F + \beta_R}{1 + \beta_R} I_{CES}. \quad (4.29)$$

Ker je tok nasičenja ( $I_S$ ) majhen, drugi člen v enačbi (4.21) zanemarimo. Tako dobimo **poenostavljen model bipolarnega tranzistorja za aktivno področje**

$$i_B = i_B(u_{BE}, u_{CE}) = \frac{I_S}{\beta_F} \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right), \quad (4.30)$$

$$i_C = i_C(u_{BE}, u_{CE}) = \beta_F i_B \left( 1 + \frac{u_{CE}}{V_{AF}} \right) + I_{CEO}, \quad (4.31)$$

pri čemer so  $I_S$ ,  $\beta_F$ ,  $V_{AF}$ ,  $I_{CEO}$  in  $V_T$  konstante.

**Delovno točko bipolarnega tranzistorja** podamo z dvema izmed štirih veličin:  $u_{BE}$ ,  $u_{CE}$ ,  $i_B$  in  $i_C$ . Preostali dve veličini lahko izračunamo s pomočjo modela tranzistorja (4.9)-(4.10). V praksi delovno točko ponavadi podajamo z napetostjo  $u_{CE}$  in tokom  $i_C$ . Za namene izpeljav si bomo raje izbrali napetosti  $u_{BE}$  in  $u_{CE}$ .

Ob predpostavki, da se nahajamo v aktivnem področju delovanja, napetosti  $u_{BE} = U_{BE}$  in  $u_{CE} = U_{CE}$  poženeta tokova

$$I_B = \frac{I_S}{\beta_F} \left( e^{\frac{U_{BE}}{V_T}} - 1 \right), \quad (4.32)$$

$$I_C = \beta_F I_B \left( 1 + \frac{U_{CE}}{V_{AF}} \right) + I_{CEO}. \quad (4.33)$$

Recimo, da sta napetosti  $u_{BE}$  in  $u_{CE}$  sestavljeni iz enosmernega dela, ki predstavlja delovno točko tranzistorja ( $U_{BE}$ ,  $U_{CE}$ ), in majhnega odstopanja ( $u_{be}$ ,  $u_{ce}$ ).

$$u_{BE} = U_{BE} + u_{be}, \quad (4.34)$$

$$u_{CE} = U_{CE} + u_{ce}. \quad (4.35)$$

Tokova  $i_B$  in  $i_C$ , ki sta posledica  $u_{BE}$  in  $u_{CE}$ , odstopata od svojih vrednosti v delovni točki

$$i_B = I_B + i_b, \quad (4.36)$$

$$i_C = I_C + i_c. \quad (4.37)$$

Če sta odstopanji  $u_{be}$  in  $u_{ce}$  majhni, lahko izraza (4.30) in (4.31) razvijemo v Taylorjevo vrsto in zanemarimo člene z višjimi odvodi. Tako iz enačb (4.36) in (4.37) dobimo naslednji zvezi

$$i_b = \left. \frac{di_B}{du_{BE}} \right|_{\substack{u_{BE}=U_{BE} \\ u_{CE}=U_{CE}}} u_{be} + \left. \frac{di_B}{du_{CE}} \right|_{\substack{u_{BE}=U_{BE} \\ u_{CE}=U_{CE}}} u_{ce} = g_{11} u_{be} + g_{12} u_{ce}, \quad (4.38)$$

$$i_c = \left. \frac{di_C}{du_{BE}} \right|_{\substack{u_{BE}=U_{BE} \\ u_{CE}=U_{CE}}} u_{be} + \left. \frac{di_C}{du_{CE}} \right|_{\substack{u_{BE}=U_{BE} \\ u_{CE}=U_{CE}}} u_{ce} = g_{21} u_{be} + g_{22} u_{ce} \quad (4.39)$$

Med odstopanji od delovne točke veljata linearni zvezi (4.38) in (4.39). Parametre  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{21}$  in  $g_{22}$  imenujemo **admitančni parametri bipolarnega tranzistorja v orientaciji s skupnim emitorjem**. O orientaciji s skupnim

emitorjem govorimo, ker sta obe vhodni napetosti  $u_{be}$  in  $u_{ce}$  merjeni proti skupni referenčni točki – emitorju. S podobnim sklepanjem, kot pri diodi, dobimo

$$g_{11} = \left. \frac{di_B}{du_{BE}} \right|_{\substack{u_{BE}=U_{BE} \\ u_{CE}=U_{CE}}} = \frac{I_S}{\beta_F V_T} e^{\frac{U_{BE}}{V_T}} \approx \frac{I_B}{V_T}. \quad (4.40)$$

Ker je bazni tok v poenostavljenem modelu (4.30)-(4.31) neodvisen od napetosti  $u_{CE}$ , velja

$$g_{12} = \left. \frac{di_B}{du_{CE}} \right|_{\substack{u_{BE}=U_{BE} \\ u_{CE}=U_{CE}}} = 0. \quad (4.41)$$

Podobno kot  $g_{11}$  lahko določimo tudi

$$g_{21} = \left. \frac{di_C}{du_{BE}} \right|_{\substack{u_{BE}=U_{BE} \\ u_{CE}=U_{CE}}} = \frac{\beta_F I_B}{V_T} \left( 1 + \frac{U_{CEQ}}{V_{AF}} \right) \approx \frac{I_C}{V_T}. \quad (4.42)$$

Poenostavitev  $\frac{I_C}{V_T}$  dobimo, če zanemarimo  $I_{CEO}$ . Nazadnje določimo še  $g_{22}$ .

$$g_{22} = \left. \frac{di_C}{du_{CE}} \right|_{\substack{u_{BE}=U_{BE} \\ u_{CE}=U_{CE}}} = \frac{\beta_F I_B}{V_{AF}} = \frac{\beta_F I_B}{U_{CE} + V_{AF}} \frac{U_{CE} + V_{AF}}{V_{AF}} \approx \frac{I_C}{U_{CE} + V_{AF}}. \quad (4.43)$$

Tudi tokrat smo pri poenostavitvi zanemarili  $I_{CEO}$ . V izpeljavah bomo pogosto uporabljali  $\beta$ , ki ga definiramo kot

$$\beta = \frac{g_{21}}{g_{11}} = \beta_F \left( 1 + \frac{U_{CE}}{V_{AF}} \right). \quad (4.44)$$

Če je kvocient  $\frac{U_{CE}}{V_{AF}}$  mnogo manjši od 1, smemo smatrati, da velja  $\beta = \beta_F$ . Odvisnost parametrov  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{21}$  in  $g_{22}$  od delovne točke je grafično ponazorjena na sliki 4.7. Črtkane črte predstavljajo vrednosti dobljene s poenostavljenim modelom (4.30)-(4.31) in enačbami (4.40)-(4.43). Vidimo, da se zaradi poenostavljenega modela pojavijo manjša odstopanja le pri parametru  $g_{21}$ , ter da je parameter  $g_{12}$  zanemarljiv v primerjavi z ostalimi tremi.

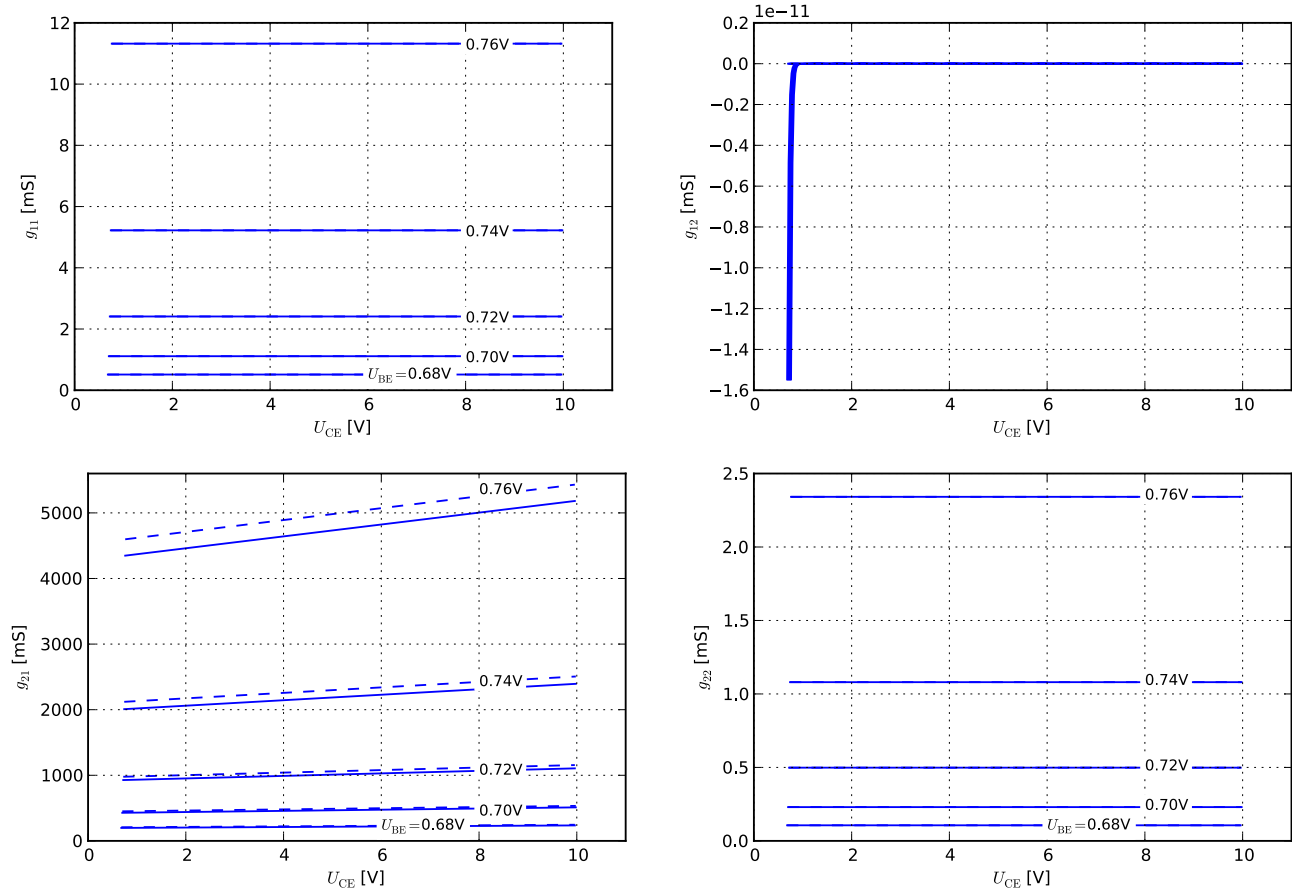
Zvezi (4.38) in (4.39) med  $i_b$ ,  $i_c$ ,  $u_{be}$  in  $u_{ce}$  lahko zapišemo v matrični obliki.

$$\begin{bmatrix} i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{be} \\ u_{ce} \end{bmatrix} = [Y_E] \begin{bmatrix} u_{be} \\ u_{ce} \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Pri tem je  $[Y_E]$  **matrika admitančnih parametrov bipolarnega tranzistorja v orientaciji s skupnim emitorjem**. Zvezo (4.45) lahko prevedemo v frekvenčni prostor. Veličine  $i_b$ ,  $i_c$ ,  $u_{be}$  in  $u_{ce}$  sedaj nadomestijo kompleksorji  $I_b$ ,  $I_c$ ,  $U_{be}$  in  $U_{ce}$ , ki predstavljajo majhne odmike od delovne točke s sinusnim časovnim potekom.

$$\begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{be} \\ U_{ce} \end{bmatrix} = [Y_E] \begin{bmatrix} U_{be} \\ U_{ce} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Vidimo, da se za majhne odmike od delovne točke bipolarni tranzistor obnaša kot linearno vezje, ki ga opisuje admitančna matrika  $[Y_E]$ . Elementi te matrike so realna števila in so odvisni od delovne točke tranzistorja. Iz enačbe (4.46) sledi **nadomestno vezje za majhne signale** (slika 4.8), ki povezuje odmike od delovne točke ( $I_b$ ,  $I_c$ ,  $U_{be}$  in  $U_{ce}$ ). To vezje je linearno. V njem pogosto izpustimo tokovni vir  $g_{12}U_{ce}$ , ker je parameter  $g_{12}$  ponavadi zanemarljivo majhen.



Slika 4.7: Odvisnost admitančnih parametrov od delovne točke v aktivnem področju za bipolarni tranzistor karakteristikami na sliki 4.5. Črtkane črte predstavljajo vrednosti dobljene s poenostavljenim modelom (4.30)-(4.31) in enačbami (4.40)-(4.43).

Včasih vseeno potrebujemo vrednost parametra  $g_{12}$ , ki ga zaradi preveč enostavnega modela tranzistorja (4.21)-(4.22) ne moremo izračunati. V podatkovnih listih proizvajalci pogosto podajajo admitančne parametre za eno ali več izbranih delovnih točk tranzistorja. Včasih so namesto admitančnih parametrov podani hibridni  $h$  parametri za orientacijo s skupnim emitorjem z nekoliko spremenjenimi imeni:  $h_{ie} = h_{11}$ ,  $h_{fe} = h_{21}$ ,  $h_{re} = h_{12}$  in  $h_{oe} = h_{22}$ . Parameter  $g_{12}$  določimo po formuli za pretvorbo  $h$  parametrov v  $y$  parametre (2.36).

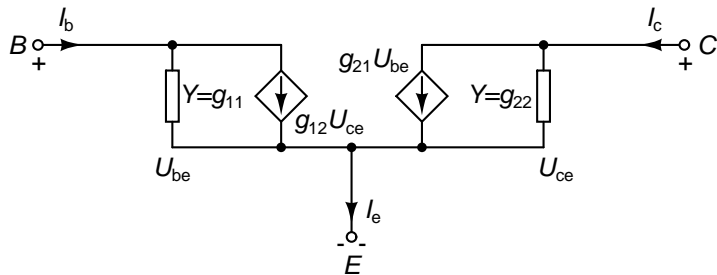
$$g_{12} = -\frac{h_{12}}{h_{11}} = -\frac{h_{re}}{h_{ie}}. \quad (4.47)$$

**Primer 4.1:** Za NPN tranzistor BC238B najdemo podatek, da sta v delovni točki  $I_{CQ} = 2\text{mA}$ ,  $U_{CEQ} = 5\text{V}$  hibridna parametra  $h_{re}$  in  $h_{ie}$  enaka  $2.0 \cdot 10^{-4}$  in  $4.5\text{k}\Omega$ . Parameter  $g_{12}$  je zato enak

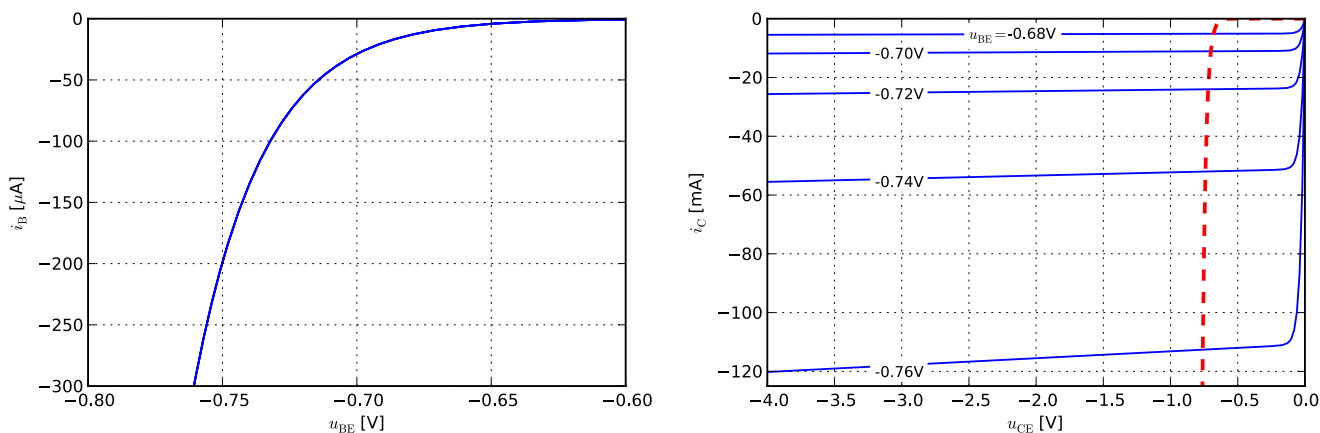
$$g_{12} = -\frac{h_{re}}{h_{ie}} = -44\text{nS}. \quad (4.48)$$

Če upoštevamo še podatka, da je v omenjeni delovni točki  $h_{fe} = 330$  in  $h_{oe} = 30\mu\text{S}$ , dobimo  $g_{11} = \frac{1}{h_{ie}} = 0.22\text{mS}$ ,  $g_{21} = \frac{h_{fe}}{h_{ie}} = 73\text{mS}$  in  $g_{22} = \frac{h_{ie}h_{oe} - h_{re}h_{fe}}{h_{ie}} = 15\mu\text{S}$ . Vidimo, da je parameter  $g_{12}$  res zanemrljiv v primerjavi s preostalimi tremi.  $\triangle$

**Za tranzistor tipa PNP** (slika 4.4, desno) v aktivnem področju velja, da so tokovi  $i_B$ ,  $i_C$ ,  $i_E$  in napetost  $u_{BE}$  negativni, napetost  $u_{BC}$  pa pozitivna. Karakteristike PNP tranzistorja so na sliki 4.9. Delovanje tranzistorja še



Slika 4.8: Nadomestno vezje bipolarnega tranzistorja za majhne signale.



Slika 4.9: Karakteristike PNP tranzistorja s parametri navedenimi na sliki 4.5. Odvisnost  $i_B(u_{BE})$  za vrednosti  $u_{CE}$  od  $-1\text{V}$  do  $-8\text{V}$  (levo) in odvisnost  $i_C(u_{CE})$  za vrednosti  $u_{BE}$  od  $-0,68\text{V}$  do  $-0,76\text{V}$  (desno). Črtna krivulja razmejuje aktivno področje na levi strani od področja nasičenja na desni.

vedno opisujejo enačbe (4.9)-(4.33), le da moramo vse tokove in napetosti ( $i_B$ ,  $i_C$ ,  $i_E$ ,  $I_{CEO}$ ,  $u_{BE}$ ,  $u_{CE}$  in  $u_{BC}$ ) opremiti z negativnim predznakom. Veličine  $I_S$ ,  $V_T$ ,  $\beta_F$ ,  $I_{CEO}$  in  $V_{AF}$  so še vedno pozitivne konstante (kot pri tranzistorju tipa NPN). Tako se poenostavljeni model PNP tranzistorja v aktivnem področju glasi

$$-i_B = \frac{I_S}{\beta_F} \left( e^{-\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right), \quad (4.49)$$

$$-i_C = \beta_F i_B \left( 1 - \frac{u_{CE}}{V_{AF}} \right) - I_{CEO}. \quad (4.50)$$

Predznak odstopanj od delovne točke ( $i_b$ ,  $i_c$ ,  $u_{be}$  in  $u_{ce}$ ) in pripadajočih kompleksorjev ( $I_b$ ,  $I_c$ ,  $U_{be}$  in  $U_{ce}$ ) v enačbah (4.34)-(4.46) ostane nespremenjen. Posledično je nadomestno vezje PNP tranzistorja za majhne signale enako, kot za NPN tranzistor (slika 4.8). Se pa spremeni predznak veličin  $I_B$ ,  $I_C$ ,  $U_{BE}$  in  $U_{CE}$  v enačbah za izračun admitančnih parametrov tranzistorja za orientacijo s skupnim emitorjem (enačbe (4.40)-(4.44)), ki se v aktivnem

področju glasijo

$$g_{11} = \frac{I_S}{\beta_F V_T} e^{-\frac{U_{BE}}{V_T}} \approx -\frac{I_B}{V_T}. \quad (4.51)$$

$$g_{12} = 0, \quad (4.52)$$

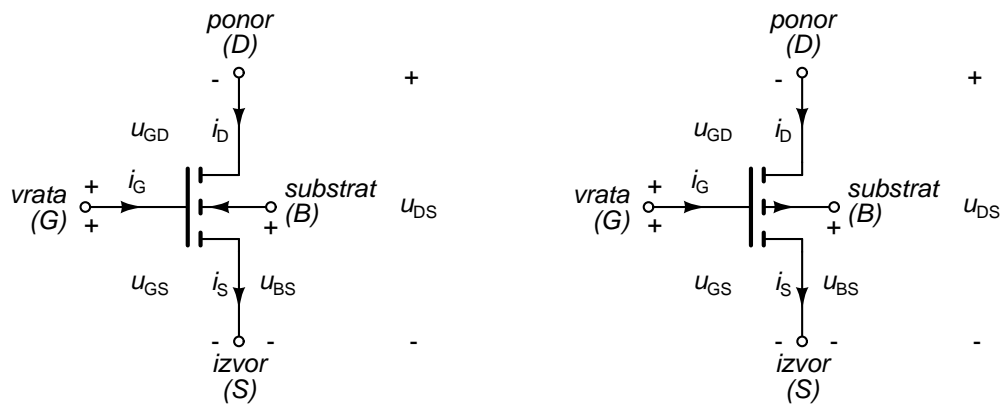
$$g_{21} = -\frac{\beta_F I_B}{V_T} \left(1 - \frac{U_{CE}}{V_{AF}}\right) \approx -\frac{I_C}{V_T}, \quad (4.53)$$

$$g_{22} = -\frac{\beta_F I_B}{V_{AF}} \approx \frac{-I_C}{-U_{CE} + V_{AF}}, \quad (4.54)$$

$$\beta = \frac{g_{21}}{g_{11}} = \beta_F \left(1 - \frac{U_{CE}}{V_{AF}}\right). \quad (4.55)$$

Vrednosti admitančnih parametrov, ki pripadajo delovnim točkam v aktivnem področju, so še vedno pozitivne za  $g_{11}$ ,  $g_{21}$  in  $g_{22}$  ter negativne za  $g_{12}$ .

#### 4.4 MOSFET z induciranim kanalom



Slika 4.10: Simbol za MOSFET z induciranim kanalom tipa n (levo) in tipa p (desno).

MOSFET (ali kar MOS) tranzistor z induciranim kanalom tipa n (slika 4.10, levo) opisuje model Shichmana in Hodgesa [11], ki ga lahko zapišemo kot

$$i_D = \begin{cases} 0, & u_{GS} < U_T \\ \frac{K}{2} (2(u_{GS} - U_T) - u_{DS}) u_{DS} (1 + \lambda u_{DS}), & u_{GS} \geq U_T, \quad u_{DS} < u_{GS} - U_T \\ \frac{K}{2} (u_{GS} - U_T)^2 (1 + \lambda u_{DS}), & u_{GS} \geq U_T, \quad u_{DS} \geq u_{GS} - U_T \end{cases}. \quad (4.56)$$

Pri tem smo predpostavili, da je substrat (B) vezan na izvor (S), oziroma, da je napetost  $u_{BS} = 0$ . Ker so vrata (G) izolirana od kanala, velja

$$i_G = 0, \quad (4.57)$$

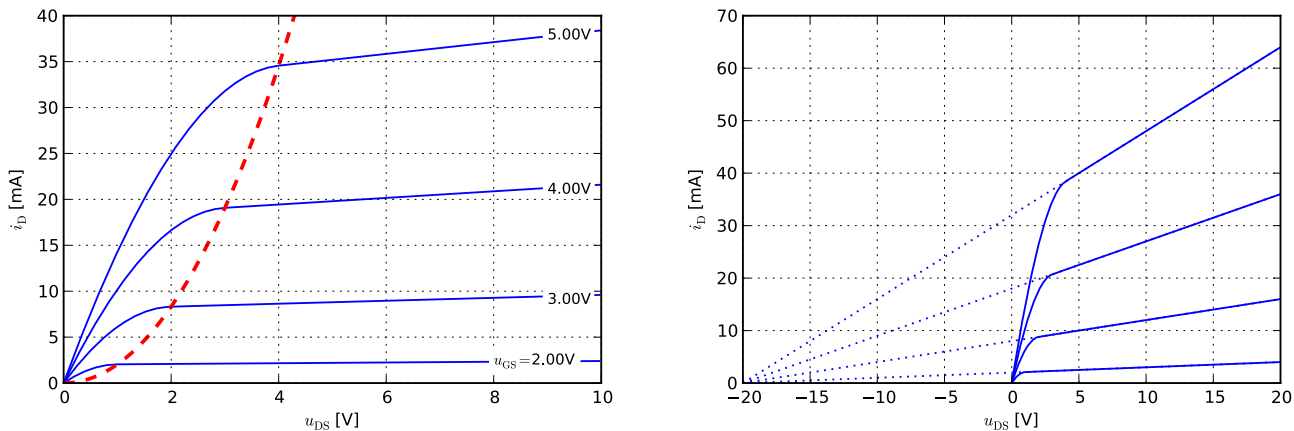
$$i_S = i_D. \quad (4.58)$$

Parameter  $K$  ima enoto  $A/V^2$  in opisuje ojačevalne sposobnosti tranzistorja.  $\lambda$  z enoto  $V^{-1}$  določa nagib karakteristik v področju nasičenja. Pri  $\lambda = 0$  so karakteristike v področju nasičenja vodoravne. Pragovna napetost  $U_T$

je odvisna od potenciala substrata, ki ga določa napetost  $u_{BS}$ . Zaradi tega bi v (4.56) morali namesto  $U_T$  pisati  $U_T(u_{BS})$ . Velja

$$U_T(u_{BS}) = U_{T0} + \gamma \left( \sqrt{2\phi - u_{BS}} - \sqrt{2\phi} \right). \quad (4.59)$$

$U_{T0}$  je pragovna napetost tranzistorja pri  $u_{BS} = 0$ .  $\gamma$  in  $\phi$  sta pozitivni konstanti z enoto  $V^{\frac{1}{2}}$  oziroma V. **Ker bomo v nadaljevanju predpostavljali, da je substrat vezan na izvor ( $u_{BS} = 0$ ), bomo pragovno napetost smatrali kot konstantno in zato enako  $U_{T0}$ .**



Slika 4.11: Karakteristike MOS tranzistorja z induciranim kanalom tipa n pri  $u_{BS} = 0$  za vrednosti parametrov  $K = 4\text{mA/V}^2$ ,  $U_T = 1\text{V}$  in  $\lambda = 0.02\text{V}^{-1}$  (levo). Podaljški karakteristik iz področja nasičenja se sekajo v točki  $(u_{DS}, i_D) = (-\frac{1}{\lambda}, 0)$ . Slika (desno) prikazuje primer za  $\lambda = 0.05\text{V}^{-1}$ .

Karakteristike MOS tranzistorja z induciranim kanalom tipa n so na sliki 4.11 (levo). Črtna črta ločuje **linearno področje** na levi ( $u_{GS} \geq U_T$ ,  $u_{DS} < u_{GS} - U_T$ ) od **področja nasičenja** na desni ( $u_{GS} \geq U_T$ ,  $u_{DS} \geq u_{GS} - U_T$ ). Meja med obema področjema poteka po krivulji, ki jo dobimo, če vzamemo  $u_{DS} = u_{GS} - U_T$ . Opisuje jo enačba

$$i_D = \frac{K}{2} u_{DS}^2 (1 + \lambda u_{DS}). \quad (4.60)$$

V linearnem področju se MOS tranzistor z induciranim kanalom tipa n obnaša podobno kot NPN tranzistor. Tok  $i_D$  hitro raste z naraščanjem napetosti  $u_{DS}$ . V tem pogledu je linearno področje MOS tranzistorja podobno področju nasičenja pri bipolarnem tranzistorju. Beseda „linearno“ ne pomeni, da se tranzistor v tem področju obnaša kot linearen element za poljubne signale. Več izvemo, če določimo odvisnost toka  $i_D$  od napetosti  $u_{GS}$  pri konstantni vrednosti  $u_{DS}$ .

$$i_D = K u_{DS} (1 + \lambda u_{DS}) u_{GS} - \frac{K}{2} (2U_T + u_{DS}) (1 + \lambda u_{DS}) u_{DS}. \quad (4.61)$$

Vidimo, da je v linearnem področju odvisnost  $i_D(u_{GS})$  linearna s sorazmernostnim faktorjem  $K u_{DS} (1 + \lambda u_{DS})$ . V področju nasičenja se tok  $i_D$  ustali in je le malo odvisen od  $u_{DS}$ . To področje delovanja MOS tranzistorjev je podobno aktivnemu področju bipolarnih tranzistorjev. Če je napetost  $u_{GS}$  nižja od pragovne napetosti  $U_T$ , tok  $i_D$  ne teče. Pravimo da deluje tranzistor pod pragom. Dejansko tudi pod pragom teče nek majhen tok  $i_D$ , vendar ga model (4.56) ne opisuje. Vrednost, pri kateri se tok  $i_D$  ustali v področju nasičenja, raste s kvadratom razlike  $u_{GS} - U_T$ .

**Večina MOS tranzistorjev v linearnih vezjih deluje v področju nasičenja**, kjer je  $u_{GS} \geq U_T$  in  $u_{DS} \geq u_{GS} - U_T$ . Tedaj je tok ponora enak

$$i_D = \frac{K}{2} (u_{GS} - U_T)^2 (1 + \lambda u_{DS}). \quad (4.62)$$

**Delovna točka MOS tranzistorja** je določena z dvema izmed treh veličin  $u_{GS}$ ,  $u_{DS}$  in  $i_D$ . Tretjo lahko zmeraj izračunamo s pomočjo modela (4.56). V praksi delovno točko ponavadi podajamo z napetostjo  $u_{DS}$  in tokom  $i_D$ . Za namene izpeljave si bomo raje izbrali napetosti  $u_{GS}$  in  $u_{DS}$ . Če se nahajamo v področju nasičenja, napetosti  $u_{GS} = U_{GS}$  in  $u_{DS} = U_{DS}$  poženeta tok

$$I_D = \frac{K}{2} (U_{GS} - U_T)^2 (1 + \lambda U_{DS}). \quad (4.63)$$

Če spet vpeljemo majhni odstopanji od delovne točke ( $u_{gs}$ ,  $u_{ds}$ ), lahko za napetosti  $u_{GS}$  in  $u_{DS}$  pišemo

$$u_{GS} = U_{GS} + u_{gs}, \quad (4.64)$$

$$u_{DS} = U_{DS} + u_{ds}. \quad (4.65)$$

Tok  $i_D$ , ki je posledica  $U_{GS}$  in  $U_{DS}$ , odstopa od svoje vrednosti v delovni točki

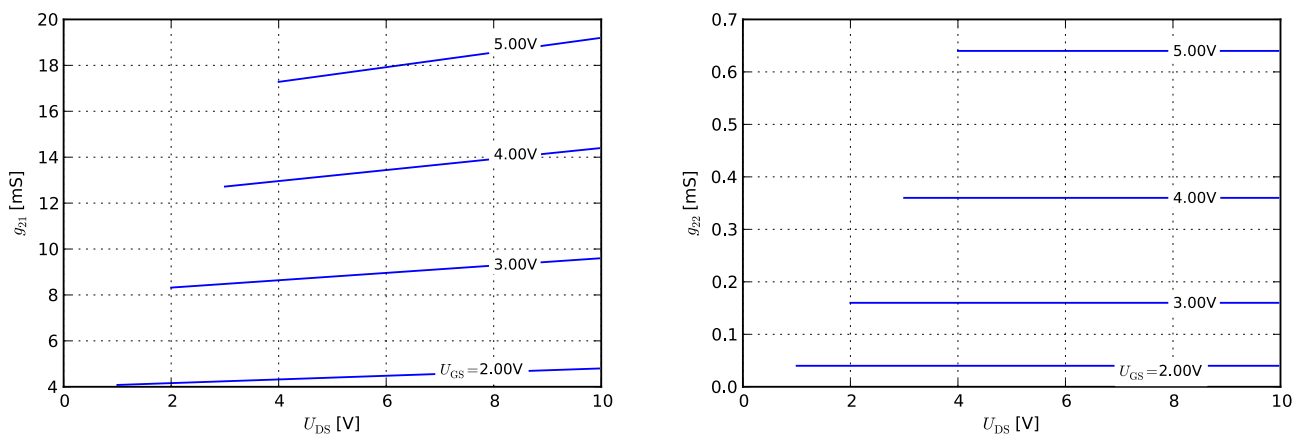
$$i_D = I_D + i_d. \quad (4.66)$$

Ker je tok vrat ( $i_G$ ) enak 0, je takšno tudi njegovo odstopanje od vrednosti v delovni točki, in lahko pišemo

$$i_g = g_{11}u_{gs} + g_{12}u_{ds} = 0. \quad (4.67)$$

Če sta odstopanji  $u_{gs}$ ,  $u_{ds}$  majhni, lahko izraz (4.63) razvijemo v Taylorjevo vrsto in zanemarimo člene z višjimi odvodi. Tako iz enačbe (4.66) dobimo

$$i_d = \left. \frac{di_D}{du_{GS}} \right|_{\substack{u_{GS}=U_{GS} \\ u_{DS}=U_{DS}}} u_{gs} + \left. \frac{di_D}{du_{DS}} \right|_{\substack{u_{GS}=U_{GS} \\ u_{DS}=U_{DS}}} u_{ds} = g_{21}u_{gs} + g_{22}u_{ds} \quad (4.68)$$



Slika 4.12: Odvisnost admitančnih parametrov  $g_{21}$  in  $g_{22}$  v področju nasičenja od delovne točke za MOS tranzistor s karakteristikami na sliki 4.11.

Tudi pri MOS tranzistorju vidimo, da sta zvezi (4.67)-(4.68) med majhnimi odstopanji od delovne točke linearni. Parametre  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{21}$  in  $g_{22}$  imenujemo **admitančni parametri MOS tranzistorja v orientaciji s skupnim izvorom**. O orientaciji s skupnim izvorom govorimo, ker sta obe vhodni napetosti  $u_{gs}$  in  $u_{ds}$  merjeni proti skupni referenčni točki – izvoru. Iz enačbe (4.67) sledi

$$g_{11} = 0, \quad (4.69)$$

$$g_{12} = 0. \quad (4.70)$$

Z odvajanjem karakteristike  $I_D(U_{GS}, U_{DS})$  dobimo še

$$g_{21} = \left. \frac{di_D}{du_{GS}} \right|_{\substack{u_{GS}=U_{GS} \\ u_{DS}=U_{DS}}} = K(U_{GS} - U_T)(1 + \lambda U_{DS}) = \frac{2I_D}{U_{GS} - U_T} \quad (4.71)$$

in

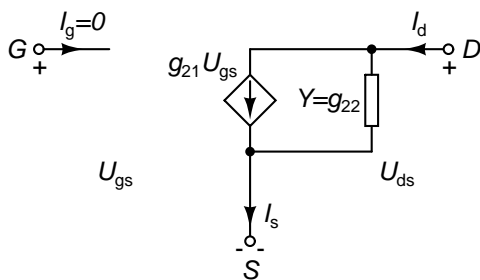
$$g_{22} = \left. \frac{di_D}{du_{DS}} \right|_{\substack{u_{GS}=U_{GS} \\ u_{DS}=U_{DS}}} = \frac{K}{2}(U_{GS} - U_T)^2 \lambda = \frac{\lambda I_D}{1 + \lambda U_{DS}}. \quad (4.72)$$

Odvisnost parametrov  $g_{21}$  in  $g_{22}$  od delovne točke je grafično ponazorjena na sliki 4.12. Zvezi (4.67) in (4.68) med  $i_g$ ,  $i_d$ ,  $u_{gs}$  in  $u_{ds}$  lahko zapišemo v matrični obliki.

$$\begin{bmatrix} i_g \\ i_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{gs} \\ u_{ds} \end{bmatrix} = [Y_S] \begin{bmatrix} u_{gs} \\ u_{ds} \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Pri tem je  $[Y_S]$  **matrika admitančnih parametrov MOS tranzistorja v orientaciji s skupnim izvorom**. Zvezo (4.73) lahko prevedemo v frekvenčni prostor. Veličine  $i_g$ ,  $i_d$ ,  $u_{gs}$  in  $u_{ds}$  sedaj nadomestijo kompleksorji  $I_g$ ,  $I_d$ ,  $U_{gs}$  in  $U_{ds}$ , ki predstavljajo majhne odmike od delovne točke s sinusnim časovnim potekom.

$$\begin{bmatrix} I_g \\ I_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{gs} \\ U_{ds} \end{bmatrix} = [Y_S] \begin{bmatrix} U_{gs} \\ U_{ds} \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

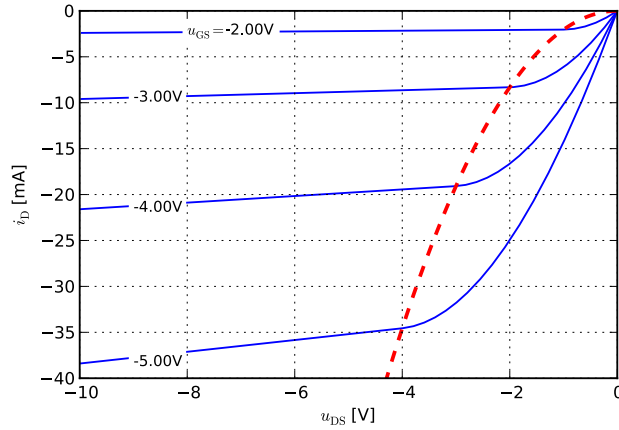


Slika 4.13: Nadomestno vezje MOS tranzistorja za majhne signale.

Vidimo, da se za majhne odmike od delovne točke MOS tranzistor obnaša kot linearno vezje, ki ga opisuje admitančna matrika  $[Y_S]$ . Elementi te matrike so realna števila in so odvisni od delovne točke tranzistorja. Iz enačbe (4.74) sledi **nadomestno vezje za majhne signale** (slika 4.13), ki povezuje odmike od delovne točke ( $I_g$ ,  $I_d$ ,  $U_{gs}$  in  $U_{ds}$ ).

**Za MOS tranzistor z induciranim kanalom tipa p** (slika 4.10, desno) so ob normalnem delovanju veličine  $i_G$ ,  $i_D$ ,  $i_S$ ,  $u_{GS}$  in  $u_{DS}$  negativne. Delovanje tranzistorja še vedno opisujejo enačbe (4.56)-(4.63), le da moramo veličine  $i_G$ ,  $i_D$ ,  $i_S$ ,  $u_{GS}$ ,  $u_{DS}$  in  $u_{BS}$  opremiti z negativnim predznakom. Pragovna napetost ostane pozitivna





Slika 4.14: Karakteristike MOS tranzistorja z induciranim kanalom tipa p pri  $U_{BS} = 0$  za vrednosti parametrov na sliki 4.11. Črtna črta ločuje področje nasičenja (levo) od linearnega področja (desno).

(tranzistor deluje pod pragom, če velja  $-u_{GS} < U_T$ , oziroma  $u_{GS} > -U_T$ ). Karakteristike MOS tranzistorja z induciranim kanalom tipa p so na sliki 4.14. Model tranzistorja se tako glasi

$$i_G = 0, \quad (4.75)$$

$$-i_D = \begin{cases} 0, & -u_{GS} < U_T \\ \frac{K}{2} (2(u_{GS} + U_T) - u_{DS}) u_{DS} (1 - \lambda u_{DS}), & -u_{GS} \geq U_T, \quad -u_{DS} < -u_{GS} - U_T \\ \frac{K}{2} (u_{GS} + U_T)^2 (1 - \lambda u_{DS}), & -u_{GS} \geq U_T, \quad -u_{DS} \geq -u_{GS} - U_T \end{cases} \quad (4.76)$$

Tudi  $\gamma$  in  $\phi$  ostaneta pozitivni konstanti. Vpliv napetosti  $u_{BS}$  na pragovno napetost  $U_T$  je sedaj

$$U_T = U_{T0} + \gamma \left( \sqrt{2\phi + u_{BS}} - \sqrt{2\phi} \right). \quad (4.77)$$

Predznak odstopanj od delovne točke ( $i_g$ ,  $i_d$ ,  $u_{gs}$  in  $u_{ds}$ ) in pripadajočih kompleksorjev ( $I_g$ ,  $I_d$ ,  $U_{gs}$  in  $U_{ds}$ ) v enačbah (4.64)-(4.74) ostane nespremenjen. Posledično je nadomestno vezje za majhne signale enako, kot za MOS tranzistor z induciranim kanalom tipa n (slika 4.13). Se pa spremeni predznak veličin  $I_D$ ,  $U_{GS}$  in  $U_{DS}$  v enačbah za izračun admitančnih parametrov (enačbe (4.69)-(4.72)), ki so za področje nasičenja

$$g_{11} = 0, \quad (4.78)$$

$$g_{12} = 0, \quad (4.79)$$

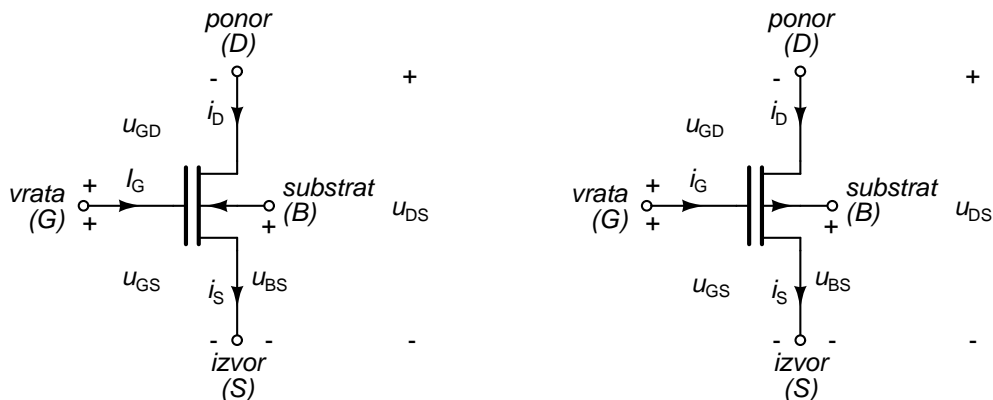
$$g_{21} = -K(U_{GS} + U_T)(1 - \lambda U_{DS}) = \frac{2I_D}{U_{GS} + U_T}, \quad (4.80)$$

$$g_{22} = \frac{K}{2}(U_{GS} + U_T)^2 \lambda = -\frac{\lambda I_D}{1 - \lambda U_{DS}}. \quad (4.81)$$

Vrednosti admitančnih parametrov, ki pripadajo delovnim točkam v področju nasičenja, so še vedno pozitivne za  $g_{21}$  in  $g_{22}$  ter nič za  $g_{11}$  in  $g_{12}$ .

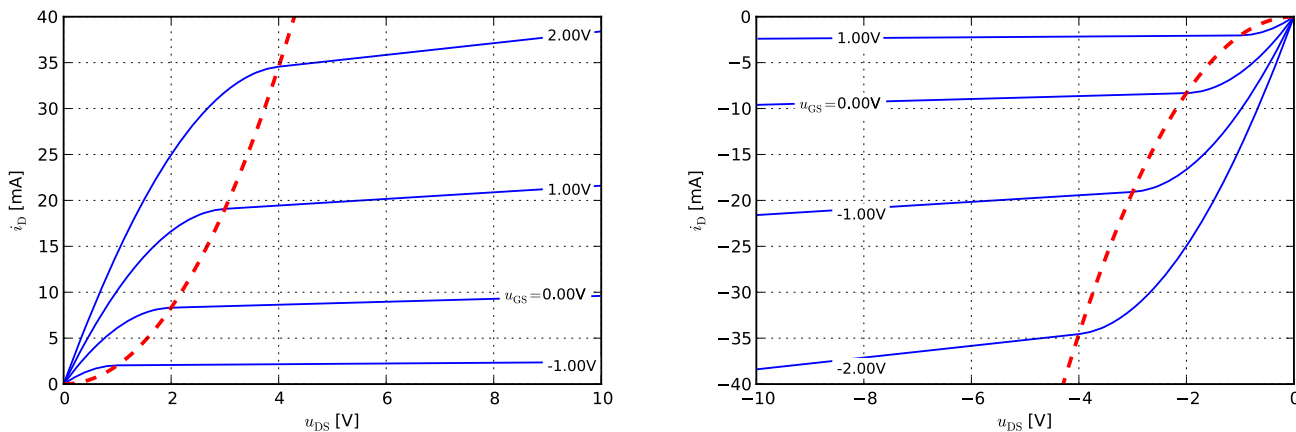
## 4.5 MOSFET z vgrajenim kanalom

MOSFET z vgrajenim kanalom tipa n opisujejo enake enačbe ((4.56)-(4.74)), kot tranzistor z induciranim kanalom. Edina razlika je v tem, da je pragovna napetost tranzistorja z vgrajenim kanalom negativna. Takšen tranzistor



Slika 4.15: Simbol za MOSFET z vgrajenim kanalom tipa n (levo) in tipa p (desno).

prevaja tok  $i_D$  že pri napetosti  $u_{GS} = 0$ . Z negativnimi  $u_{GS}$  tranzistor postopno zapiramo in pri  $u_{GS} \leq U_T < 0$  zapremo.



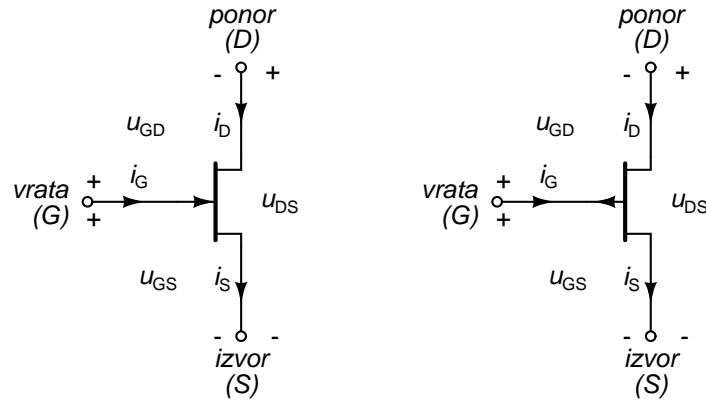
Slika 4.16: Karakteristike MOS tranzistorja z vgrajenim kanalom tipa n (levo) in tipa p (desno) pri  $u_{BS} = 0$ . Vrednosti parametrov tranzistorja so  $K = 4\text{mA/V}^2$ ,  $U_T = -2\text{V}$  in  $\lambda = 0.02\text{V}^{-1}$ . Črtkana črta loči linearno področje od področja nasičenja.

Primer karakteristik za MOS tranzistor z vgrajenim kanalom je na sliki 4.16. MOS tranzistor z vgrajenim kanalom tipa p se obnaša enako, le predznake veličin moramo spremeniti tako, kot smo to storili v enačbah (4.76)-(4.81).

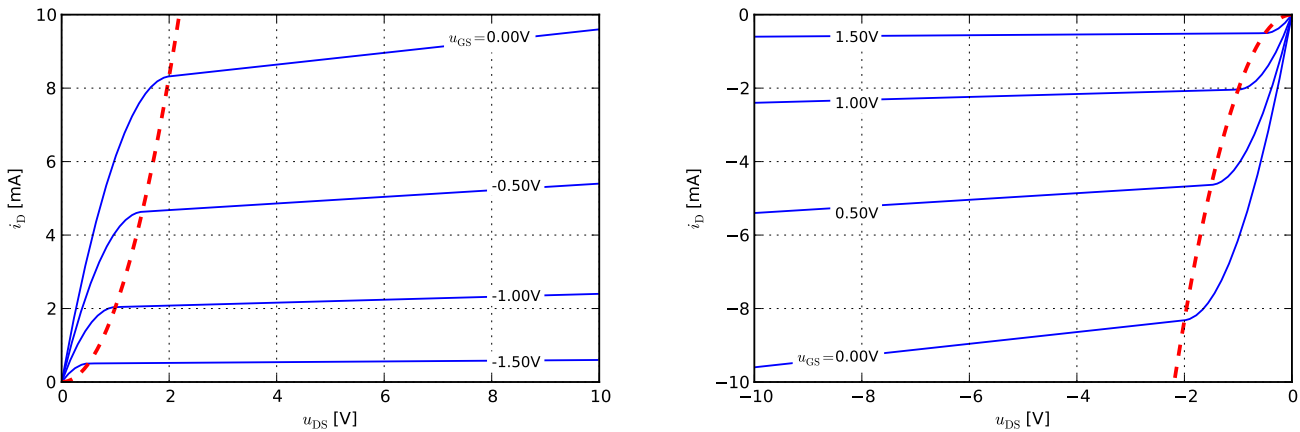
## 4.6 Spojni FET tranzistor (JFET)

Spojni (ang. junction) FET tranzistor ali tudi JFET ima tri priključke, ki imajo enako ime in tudi pomen, kot pri MOS tranzistorju. Delovanje JFET tranzistorja se precej razlikuje od delovanja MOS tranzistorja. Karakteristike JFET tranzistorjev so zelo podobne karakteristikam MOS tranzistorjev z vgrajenim kanalom (slika 4.18).

Vrata (G) JFET tranzistorja skupaj s kanalom tvorijo p-n spoj (polprevodniško diodo). Da tranzistor deluje pravilno, mora biti ta dioda zaporno polarizirana. Za JFET tranzistor s kanalom tipa n to pomeni, da mora biti  $u_{GS} \leq 0$  in  $u_{GD} \leq 0$ . Za JFET tranzistor s kanalom tipa p so zahteve ravno nasprotno ( $u_{GS} \geq 0$  in  $u_{GD} \geq 0$ ). Za razliko od MOS tranzistorja z vgrajenim kanalom, kanala JFET tranzistorja ne moremo „odpreti“ bolj, kot je odprt pri napetosti  $u_{GS} = 0$ . Če bi to vseeno poskusili z  $u_{GS} > 0$ , bi postal p-n spoj med vrati in kanalom prevodno polariziran in v vrata bi stekel tok. Tega si pa ne želimo, saj so vezja z JFET tranzistorji načrtovana z upoštevanjem  $i_G = 0$ .



Slika 4.17: Simbol za JFET tranzistor s kanalom tipa n (levo) in tipa p (desno).



Slika 4.18: Karakteristike JFET tranzistorja s kanalom tipa n (levo) in tipa p (desno).

Vrednosti parametrov tranzistorja so  $K = 4\text{mA/V}^2$ ,  $U_T = -2\text{V}$  in  $\lambda = 0.02\text{V}^{-1}$   
 $(U_P = U_T = -2\text{V}, I_{DSS} = \frac{KU_P^2}{2} = 8\text{mA})$ . Črtkana črta loči linearno področje od področja nasičenja.

JFET tranzistor opišemo z enakimi enačbami kot MOS tranzistor s to razliko, da sedaj nimamo četrtega priključka (substrat, B). V enačbah zato predpostavimo  $u_{BS} = 0$ , kar pomeni, da je pragovna napetost  $U_T$  konstanta. Ponavadi v enačbah JFET tranzistorja namesto pragovne napetosti  $U_T$  srečamo napetost preščipnjenja  $U_P$  (ang. pinch-off), ki je le drugo ime za isto veličino. Kanal JFET tranzistorja tipa n se preščipne pri napetosti  $u_{GS} < U_P < 0$ . Namesto  $\frac{K}{2}$  imamo izraz  $\frac{I_{DSS}}{U_P^2}$ . Parameter  $I_{DSS}$  je približno enak toku ponora v nasičenju pri  $U_{GS} = 0$ . Tako za **JFET tranzistor s kanalom tipa n** dobimo enačbe

$$i_D = \begin{cases} 0, & u_{GS} < U_P \\ \frac{I_{DSS}}{U_P^2} (2(u_{GS} - U_P) - u_{DS}) u_{DS} (1 + \lambda u_{DS}), & u_{GS} \geq U_P, \quad u_{DS} < u_{GS} - U_P \\ \frac{I_{DSS}}{U_P^2} (u_{GS} - U_P)^2 (1 + \lambda u_{DS}), & u_{GS} \geq U_P, \quad u_{DS} \geq u_{GS} - U_P \end{cases}, \quad (4.82)$$

$$i_S = I_D, \quad (4.83)$$

$$i_G = \underbrace{I_S \left( e^{\frac{u_{GD}}{V_T}} - 1 \right)}_{i_{GD}} + \underbrace{I_S \left( e^{\frac{u_{GS}}{V_T}} - 1 \right)}_{i_{GS}}. \quad (4.84)$$

Ker sta pri normalnem delovanju tranzistorja napetosti  $u_{GS}$  in  $u_{GD}$  negativni, je tok v vrata enak vsoti tokov

nasičenja  $I_S$  diod med vrati in ponorom oziroma izvorom ( $i_G \approx -2I_S$ ). Ker je  $I_S$  običajno zanemarljiv, pri  $u_{GS} \leq 0$  in  $u_{GD} \leq 0$  enačbo (4.84) poenostavimo v

$$i_G = 0. \quad (4.85)$$

Admitančne parametre v področju nasičenja dobimo (podobno, kot za MOS tranzistor) z enačbami

$$g_{11} = 0, \quad (4.86)$$

$$g_{12} = 0, \quad (4.87)$$

$$g_{21} = \frac{2I_{DSS}}{U_P^2}(U_{GS} - U_P)(1 + \lambda U_{DS}) = \frac{2I_D}{U_{GS} - U_P}, \quad (4.88)$$

$$g_{22} = \frac{I_{DSS}}{U_P^2}(U_{GS} - U_P)^2 \lambda = \frac{\lambda I_D}{1 + \lambda U_{DS}}. \quad (4.89)$$

Za **JFET tranzistor s kanalom tipa p** dobimo enačbe tako, da spremenimo predznake veličin  $u_{GS}$ ,  $u_{DS}$ ,  $u_{GD}$ ,  $i_D$ ,  $i_S$  in  $i_G$ . Pri tem ostanejo  $I_{DSS}$ ,  $\lambda$  in  $I_S$  pozitivne konstante,  $U_P$  pa negativna konstanta. Kanal JFET tranzistorja tipa p se preščiipne pri napetostih  $-u_{GS} < U_P < 0$  oziroma  $u_{GS} > -U_P > 0$ . Za normalno delovanje mora biti p-n spoj med vrati in kanalom zaporno polariziran ( $u_{GS}, u_{GD} \geq 0$ ).

**Nadomestno vezje za majhne signale** za JFET tranzistor je enako kot za MOS tranzistor (slika 4.13) ne glede na tip kanala (p ali n).

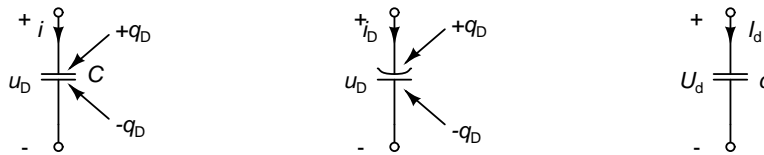
# 5

## Naboj in kapacitivnosti nelinearnih elementov

Pri višjih frekvencah postanejo tokovi nelinearnih elementov odvisni tudi od preteklih potekov napetosti na sponkah elementa. Pravimo tudi, da elementi hranijo naboj. Spreminjanje tega naboja pa dodatno prispeva k tokovom, ki tečejo v sponke elementa.

### 5.1 Nelinearni kondenzator

**Linearen kondenzator** (slika 5.1, levo) ima dve elektrodi, od katerih eno označimo kot pozitivno, drugo pa kot negativno. Napetost med pozitivno in negativno elektrodo označimo z  $u_D$ , tok, ki teče v pozitivno elektrodo pa z  $i_D$ . Pozitivna elektroda hrani naboj  $q_D$ , negativna pa naboj  $-q_D$ . Vsota obeh nabojev je enaka 0. Pozitivna elektroda ne hrani nujno pozitivnega naboja. Če je njen naboj negativen, velja  $q_D < 0$ .



Slika 5.1: Linearen (levo) in nelinearen (desno) kondenzator s pripadajočimi veličinami. Model nelinearnega kondenzatorja za majhne signale v delovni točki  $U_{DQ}$  (desno).

Naboj  $q_D$  je v linearni zvezi z napetostjo med elektrodama  $u_D$ .

$$q_D = C u_D. \quad (5.1)$$

Sorazmernostnemu faktorju  $C$  pravimo tudi kapacitivnost in ima enoto  $F = As/V$ . Tok  $i_D$ , ki teče v pozitivno elektrodo, lahko izrazimo z odvodom naboja  $q_D$ .

$$i_D(t) = \frac{dq_D(t)}{dt} = C \frac{du_D(t)}{dt}. \quad (5.2)$$

Vidimo, da ima  $C$  vlogo sorazmernostnega faktorja med hitrostjo spreminjanja napetosti  $du_D/dt$  in tokom  $i_D$ . **Nelinearni kondenzator** (slika 5.1, na sredini) se od linearnega razlikuje v tem, da je pri njem zveza med nabojem in napetostjo nelinearna. Velja

$$q_D = q_D(u_D), \quad (5.3)$$

kjer je  $q_D$  poljubna zvezna funkcija napetosti  $u_D$ , ki ni odvisna od časa (pravimo tudi, da je **časovno invariantna**). Tok nelinearnega kondenzatorja lahko izrazimo kot

$$i_D(t) = \frac{dq_D(t)}{dt} = \frac{dq_D(u)}{du_D} \frac{du_D(t)}{dt} = c \frac{du_D(t)}{dt}. \quad (5.4)$$

Sorazmernostni faktor  $c$  med hitrostjo spreminjanja napetosti in tokom je sedaj odvisen od napetosti. Imenujemo ga tudi **diferencialna kapacitivnost**. Recimo, da imamo majhno odstopanje napetosti  $u_d$  od delovne točke  $U_D$ . Tedaj tudi naboj  $q_D$  odstopa od naboja v delovni točki  $Q_D$  za nek  $q_d$ . Velja

$$u_D = U_D + u_d, \quad (5.5)$$

$$q_D = Q_D + q_d. \quad (5.6)$$

Zapišimo Taylorjevo vrsto za naboj in zanemarimo člene z višjimi odvodi.

$$q_D = q_D|_{u_D=U_D} + \left. \frac{dq_D}{du_D} \right|_{u_D=U_D} \cdot u_d = Q_D + q_d. \quad (5.7)$$

Podobno, kot smo to naredili pri diferencialni prevodnosti diode (enačba (4.6)), lahko tudi tukaj ugotovimo, da je zveza med majhnim odstopanjem napetosti in naboja od delovne točke linearna.

$$q_d = cu_d. \quad (5.8)$$

Sorazmernostni faktor je kar diferencialna kapacitivnost  $c$  v delovni točki  $U_D$ .

$$c = \left. \frac{dq_D}{du_D} \right|_{u_D=U_D}. \quad (5.9)$$

Vidimo, da se za majhna odstopanja nelinearen kondenzator obnaša enako, kot linearen. Tok v nelinearnem kondenzator v delovni točki je enak 0, saj za enosmerne razmere velja  $du_D/dt = 0$ , od koder sledi  $I_D = 0$ . Tako je odstopanje toka  $i_d$  od vrednosti v delovni točki  $I_D$  kar enako celotnemu toku nelinearnega kondenzatorja  $i_D$ . V časovnem prostoru zato lahko pišemo

$$i_D = i_d = \frac{dq_D(t)}{dt} = c \frac{du_D}{dt}. \quad (5.10)$$

Če je odstopanje napetosti  $u_d$  sinusno, lahko zvezo prenesemo v frekvenčni prostor, kjer se glasi

$$I_d = j\omega c U_d. \quad (5.11)$$

$I_d$  in  $U_d$  sta kompleksorja toka in napetosti. Na osnovi (5.11) lahko zgradimo model nelinearnega kondenzatorja za majhne signale, ki je prikazan na sliki 5.1 (desno).

Tudi nelinearni elementi, kot naprimer tranzistorji lahko hranijo naboj, zaradi česar jim pripišemo eno ali več kapacitivnosti. Ker je ta naboj v splošnem nelinearno odvisen od napetosti na sponkah elementa, bomo v preostanku poglavja pogosto uporabljali pojem **nelinearna kapacitivnost**. Pri tem bomo imeli v mislih diferencialne kapacitivnosti, ki izhajajo iz omenjenih nabojev.

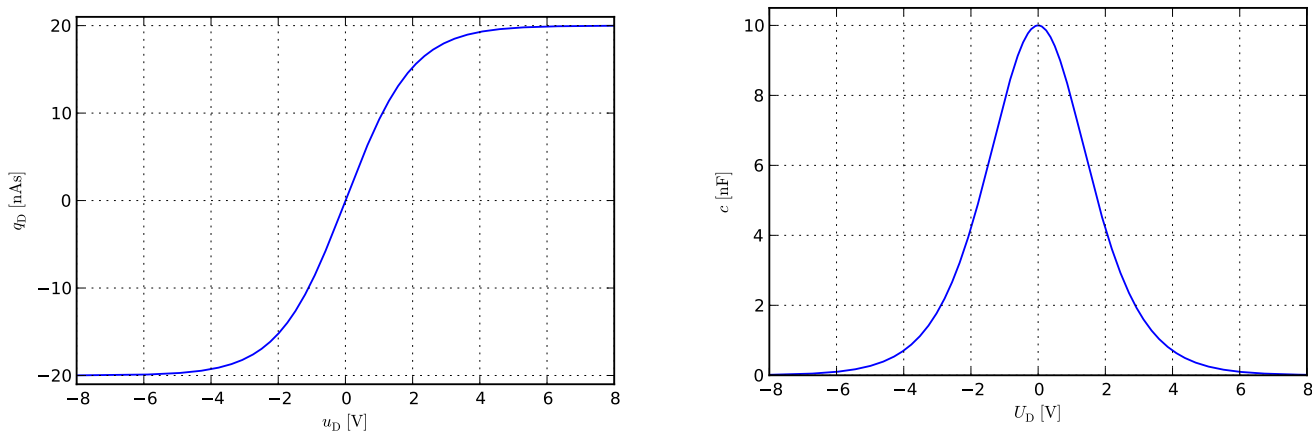
**Primer 5.1:** Imejmo nelinearen kondenzator katerega naboj z napetostjo povezuje enačba

$$q_D = Q_0 \tanh\left(\frac{u_D}{U_0}\right), \quad (5.12)$$

pri čemer je  $Q_0 = 20\text{nAs}$  in  $U_0 = 2\text{V}$ . Diferencialna kapacitivnost v delovni točki  $u_D = U_D$  je enaka

$$c = \left. \frac{dq_D}{du_D} \right|_{u_D=U_D} = \frac{Q_0}{U_0} \cosh^{-2}\left(\frac{U_D}{U_0}\right), \quad (5.13)$$

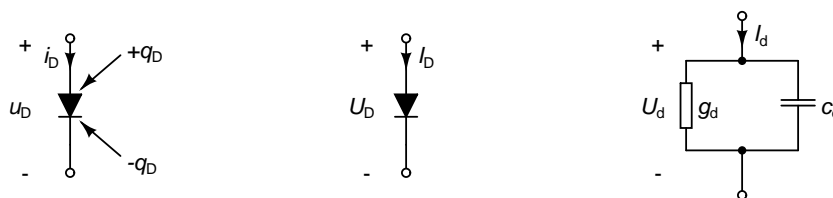
Odvisnosti naboja od napetosti  $u_D$  in diferencialne kapacitivnosti od delovne točke  $U_D$  sta na sliki 5.2.  $\triangle$



Slika 5.2: Naboj (levo) in diferencialna kapacitivnost (desno) za  $q_D = Q_0 \tanh(u_D/U_0)$  pri  $Q_0 = 20\text{nAs}$  in  $U_0 = 2\text{V}$ .

## 5.2 Polprevodniška dioda

Veličine, ki nastopajo pri diodi so prikazane na sliki 5.3 (levo). Dioda hrani naboj v osiromašenem področju okrog p-n spoja. Ta naboj prispeva **spojno kapacitivnost**. H kapacitivnosti diode prispeva tudi kopičenje manjšinskih nosilcev naboja, ko je dioda prevodno polarizirana. Koncentracija teh nosilcev se ne spremeni hipoma, ko se spremeni tok diode. Od tod izvira **difuzijska kapacitivnost**. Obe kapacitivnosti sta nelinearni.



Slika 5.3: Dioda z s pripadajočimi veličinami (levo) in njena enosmerna delovna točka (na sredini). Model diode za majhne signale v delovni točki  $U_D$  (desno).

Spojna kapacitivnost  $c_{\text{dep}}$  (od ang. depletion, oziroma siromašenje) je odvisna od zaporne napetosti delovne točke  $-U_D$  (slika 5.3, na sredini). Naboj v osiromašenem področju raste čedalje počasneje, ko zaporna napetost postaja čedalje večja. To pomeni, da z naraščanjem zaporne napetosti spojna kapacitivnost  $c_{\text{dep}}$  pada. Odvisnost  $c_{\text{dep}}$  od  $U_D$  podaja enačba

$$c_{\text{dep}} = \begin{cases} C_0 \left(1 - \frac{U_D}{V_j}\right)^{-M}, & U_D \leq 0 \\ C_0 \left(1 + M \frac{U_D}{V_j}\right), & U_D > 0 \end{cases}, \quad (5.14)$$

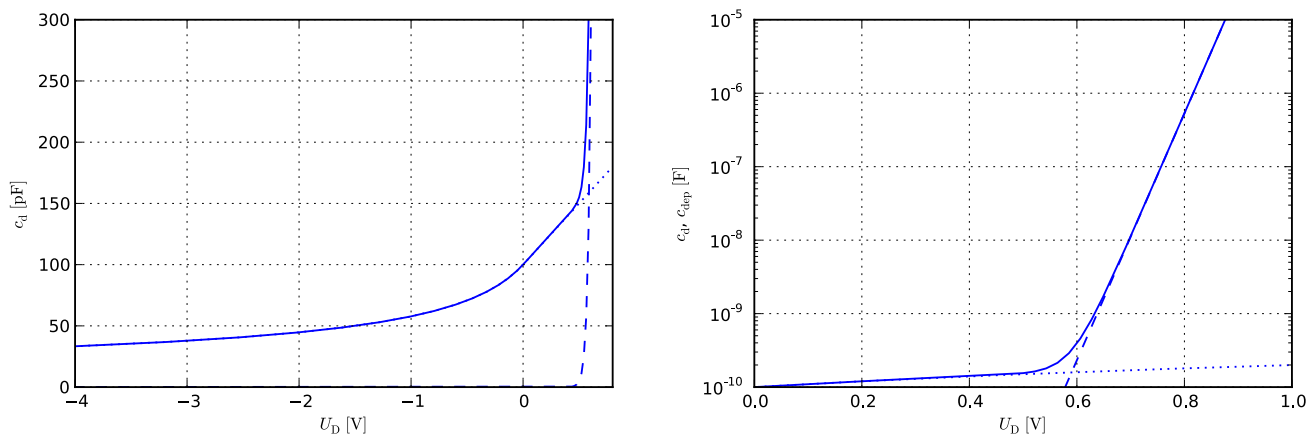
kjer je  $C_0$  diferencialna kapacitivnost pri napetosti  $U_D = 0\text{V}$ ,  $V_j$  in  $M$  pa pozitivni konstanti z enoto V oziroma 1. Za prevodno polarizirano diodo ( $U_D > 0$ ) je potek kapacitivnosti linearen. Spojna kapacitivnost za prevodno polarizirano diodo raste z  $U_D$ . Del zveze (5.14), ki ustreza  $U_D > 0$ , je le matematičen pripomoček, ki njen potek linearno nadaljuje za  $U_D > 0$ . Pri prevodni polarizaciji postane  $c_{\text{dep}}$  kmalu nepomembna, saj difuzijska kapacitivnost  $c_{\text{dif}}$ , eksponentno raste s prevodno napetostjo. Podaja jo enačba

$$c_{\text{dif}} = g_d \tau = \frac{I_S}{V_T} e^{\frac{U_D}{V_T}} \tau \approx \frac{I_D}{V_T} \tau. \quad (5.15)$$

$\tau$  je konstanta z enoto s. Poleg omenjenih nelinearnih kapacitivnosti  $c_{\text{dep}}$  in  $c_{\text{dif}}$  imajo nekatere diode še linearno kapacitivnost  $C_{\text{jo}}$ , ki nastane zaradi **prekrivanja (ang. overlap)**. Celotna diferencialna kapacitivnost diode je v splošnem enaka

$$c_d = c_{\text{dep}} + c_{\text{dif}} + C_{\text{jo}}. \quad (5.16)$$

Na osnovi povedanega lahko model diode za majhne signale dopolnimo z diferencialno kapacitivnostjo diode (slika 5.3, desno).



Slika 5.4: Diferencialna kapacitivnost diode  $c_d$  (polna črta), difuzijska kapacitivnost  $c_{\text{dif}}$  (črtkana črta) in spojna kapacitivnost  $c_{\text{dep}}$  (pikčasta črta) v odvisnosti od delovne točke  $U_D$  pri temperaturi  $T = 300\text{K}$ . Parametri diode so  $I_S = 0,01\text{pF}$ ,  $C_0 = 100\text{pF}$ ,  $V_J = 0,5\text{V}$ ,  $M = 0,5$ ,  $\tau = 50\text{ns}$  in  $C_{\text{jo}} = 0\text{pF}$ .

Primer poteka diferencialne kapacitivnosti diode je na sliki 5.4. Iz slike vidimo, da pri prevodni polarizaciji spojna kapacitivnost (črtkana črta) hitro postane zanemarljivo majhna v primerjavi z difuzijsko kapacitivnostjo. Po drugi strani pri zaporni polarizaciji difuzijska kapacitivnost praktično izgine in ostane samo spojna kapacitivnost.

### 5.3 Bipolarni tranzistor

**Bipolarni tranzistor tipa NPN** ima dva p-n spoja (slika 5.5), ki se obnašata kot diodi in s tem tudi prispevata vsak po eno diferencialno kapacitivnost (5.16). Spoj med bazo in emitorjem (emitorski spoj) prispeva kapacitivnost  $c_{\text{be}}$ , spoj med bazo in kolektorjem (kolektorski spoj) pa kapacitivnost  $c_{\text{bc}}$ .

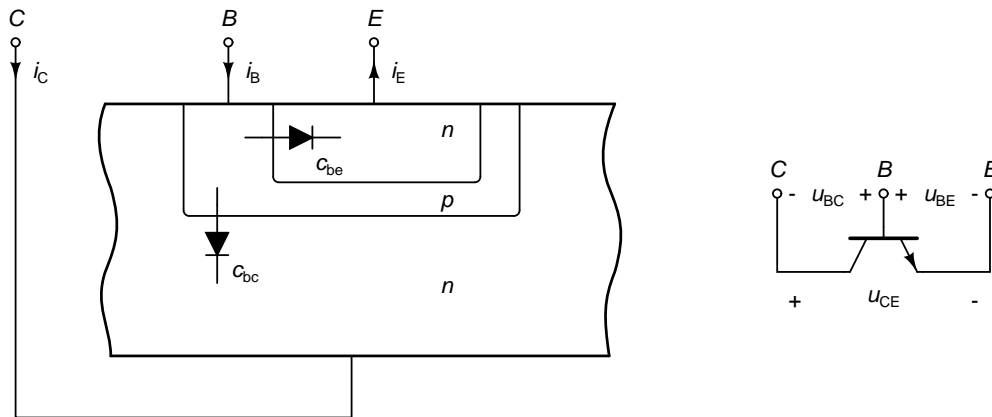
Za napetosti v tranzistorju velja  $u_{\text{BC}} = u_{\text{BE}} - u_{\text{CE}}$ . Spojni kapacitivnosti emitorskega in kolektorskega spoja v delovni točki  $u_{\text{BE}} = U_{\text{BE}}$ ,  $u_{\text{CE}} = U_{\text{CE}}$  podajata enačbi

$$c_{\text{be,dep}} = \begin{cases} C_{\text{E0}} \left(1 - \frac{U_{\text{BE}}}{V_{\text{JE}}}\right)^{-M_{\text{E}}}, & U_{\text{BE}} \leq 0 \\ C_{\text{E0}} \left(1 + M_{\text{E}} \frac{U_{\text{BE}}}{V_{\text{JE}}}\right), & U_{\text{BE}} > 0 \end{cases}, \quad (5.17)$$

$$c_{\text{bc,dep}} = \begin{cases} C_{\text{C0}} \left(1 - \frac{U_{\text{BE}} - U_{\text{CE}}}{V_{\text{JC}}}\right)^{-M_{\text{C}}}, & U_{\text{BE}} \leq U_{\text{CE}} \\ C_{\text{C0}} \left(1 + M_{\text{C}} \frac{U_{\text{BE}} - U_{\text{CE}}}{V_{\text{JC}}}\right), & U_{\text{BE}} > U_{\text{CE}} \end{cases}. \quad (5.18)$$

Pri tem so  $C_{\text{E0}}$ ,  $C_{\text{C0}}$ ,  $V_{\text{JE}}$ ,  $V_{\text{JC}}$ ,  $M_{\text{E}}$  in  $M_{\text{C}}$  konstante s podobnim pomenom, kot so  $C_0$ ,  $V_J$  in  $M$  pri diodi.





Slika 5.5: Presek skozi bipolarni tranzistor tipa NPN (levo) in pripadajoč simbol elementa (desno). Z diodama sta označena oba p-n spoja.

Da lahko določimo difuzijski kapacitivnosti obeh spojev, potrebujemo tok emitorske in kolektorske diode v tranzistorju. Emitorski tok tranzistorja je enak vsoti baznega in kolektorskega toka po enačbah (4.9) in (4.10).

$$i_E = i_C + i_B = \frac{I_S}{\beta_F} \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) + \left( I_S \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) - I_S \left( e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \right) \right) \left( 1 - \frac{u_{BE}}{V_{AR}} - \frac{u_{BC}}{V_{AF}} \right). \quad (5.19)$$

Da dobimo tok emitorske diode, moramo izničiti vse prispevke kolektorske diode. To dosežemo s predpostavko

$$e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 = 0. \quad (5.20)$$

Dobimo

$$i_{DE} = I_S \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) \left( 1 + \frac{1}{\beta_F} - \frac{u_{BE}}{V_{AR}} - \frac{u_{BC}}{V_{AF}} \right). \quad (5.21)$$

Podobno bi z upoštevanjem  $e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 = 0$  dobili tok kolektorske diode iz (4.10). Pri tem bi morali še zamenjati predznak, saj kolektorski tok  $i_C$  teče v zaporni smeri kolektorske diode.

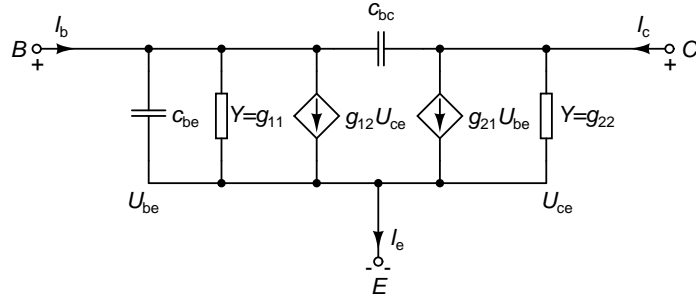
$$i_{DC} = I_S \left( e^{\frac{u_{BC}}{V_T}} - 1 \right) \left( 1 + \frac{1}{\beta_R} - \frac{u_{BE}}{V_{AR}} - \frac{u_{BC}}{V_{AF}} \right). \quad (5.22)$$

Difuzijski kapacitivnosti emitorskega in kolektorskega spoja sta v delovni točki  $u_{BE} = U_{BE}$ ,  $u_{CE} = U_{CE}$  določeni z izrazoma

$$c_{be,dif} = \tau_F \cdot \left. \frac{di_{DE}}{du_{BE}} \right|_{\substack{u_{BE}=U_{BE} \\ u_{BC}=U_{BE}-U_{CE}}}, \quad (5.23)$$

$$c_{bc,dif} = \tau_R \cdot \left. \frac{di_{DC}}{du_{BC}} \right|_{\substack{u_{BE}=U_{BE} \\ u_{BC}=U_{BE}-U_{CE}}}. \quad (5.24)$$

Pri tem imata  $\tau_F$  (za emitorski spoj) in  $\tau_R$  (za kolektorski spoj) enak pomen, kot  $\tau$  za diodo. Poleg spojne in difuzijske kapacitivnosti se pri nekaterih tranzistorjih pojavlja še linearna kapacitivnost, ki nastane zaradi prekrivanja (ang. overlap). Označimo jo s  $C_{beo}$  za emitorski spoj in  $C_{bco}$  za kolektorski spoj.



Slika 5.6: Nadomestno vezje bipolarnega tranzistorja za majhne signale, ki vključuje tudi kapacitivnosti.

Celotno kapacitivnost emitorske in kolektorske diode dobimo, če seštejemo posamezne prispevke.

$$C_{be} = C_{be,dep} + C_{be,dif} + C_{beo}, \quad (5.25)$$

$$C_{bc} = C_{bc,dep} + C_{bc,dif} + C_{bco}. \quad (5.26)$$

Z diferencialnima kapacitivnostima  $C_{be}$  in  $C_{bc}$  lahko sedaj dopolnimo model bipolarnega tranzistorja za majhne signale (slika 4.8). Dobljeno nadomestno vezje (slika 5.6) dobro opisuje bipolarni tranzistor za majhne signale tudi pri visokih frekvencah.

V **aktivnem področju** je kolektorski spoj zaporno polariziran in difuzijska kapacitivnost je zanemarljiva. Ob predpostavki, da je  $C_{bco}$  zanemarljiva, lahko kapacitivnost kolektorske diode izrazimo s spojno kapacitivnostjo.

$$C_{bc} = C_{bc,dep} = C_{C0} \left( 1 - \frac{U_{BE} - U_{CE}}{V_{JC}} \right)^{-M_C}. \quad (5.27)$$

Emitorski spoj je v aktivnem področju prevodno polariziran, kar pomeni, da je difuzijska kapacitivnost mnogo večja od spojne kapacitivnosti. Izpeljimo poenostavimo izraz za difuzijsko kapacitivnost emitorskega spoja. Za začetek lahko v (5.21) zanemarimo člen  $u_{BE}/V_{AR}$ , člen  $u_{BC}/V_{AF}$  pa nadomestimo s približkom  $-u_{CE}/V_{AF}$  (kot smo to storili v poglavju 4.3). Ker je  $\beta_F$  ponavadi velik, zanemarimo še člen  $1/\beta_F$ . Dobimo

$$i_{DE} \approx I_S \left( e^{\frac{u_{BE}}{V_T}} - 1 \right) \left( 1 + \frac{u_{CE}}{V_{AF}} \right). \quad (5.28)$$

Z upoštevanjem izraza za bazni tok v aktivnem področju (4.30) lahko zapišemo

$$i_{DE} \approx \beta_F i_B \left( 1 + \frac{u_{CE}}{V_{AF}} \right). \quad (5.29)$$

Če v izrazu za kolektorski tok v aktivnem področju (4.31) zanemarimo tok  $I_{CEO}$  (ki je ponavadi majhen), lahko zapišemo

$$i_{DE} \approx i_C. \quad (5.30)$$

Iz (5.30), (5.23) in (4.42) sledi poenostavljen izraz za difuzijsko kapacitivnost emitorskega spoja v aktivnem področju.

$$C_{be,dif} \approx \tau_F \cdot \left. \frac{di_C}{du_{BE}} \right|_{\substack{u_{BE}=U_{BE} \\ u_{CE}=U_{CE}}} = \tau_F g_{21}. \quad (5.31)$$

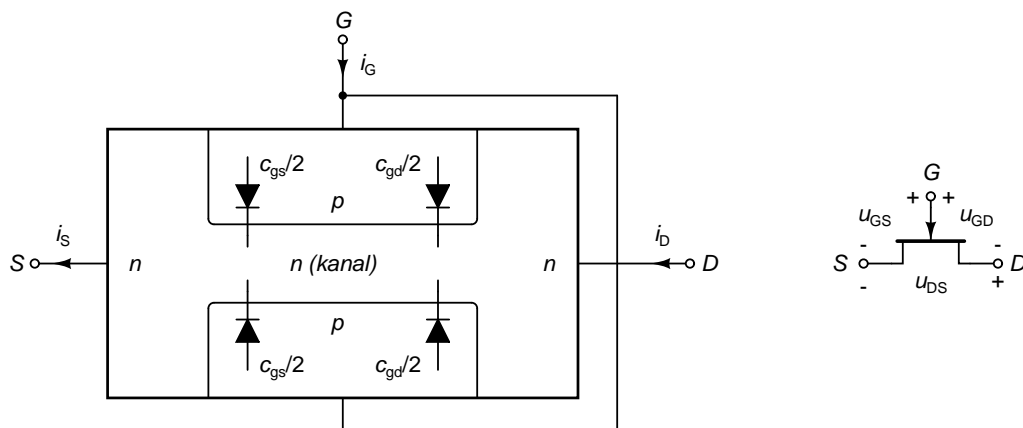
Ker je v aktivnem področju emitorski spoj prevodno polariziran, prevladuje difuzijska kapacitivnost. Ob predpostavki, da je  $C_{beo}$  zanemarljiva, lahko kapacitivnost emitorske diode v aktivnem področju izrazimo kot

$$C_{be} \approx C_{be,dif} \approx \tau_F g_{21}. \quad (5.32)$$

Za **bipolarni tranzistor tipa PNP** prav tako veljajo enačbe (5.17), (5.18) in (5.21)-(5.26) (oziroma v aktivnem področju (5.27) in (5.32)) v katerih pa moramo spremeniti predznake veličin  $u_{BE}$ ,  $u_{CE}$ ,  $u_{BC}$ ,  $U_{BE}$ ,  $U_{CE}$ ,  $U_{BC}$ ,  $i_{DE}$ ,  $i_{DC}$  in  $i_C$ . Pri tem  $C_{E0}$ ,  $C_{C0}$ ,  $V_{JE}$ ,  $V_{JC}$ ,  $M_E$ ,  $M_C$ ,  $\tau_F$  in  $\tau_R$  ostanejo pozitivne konstante. Nadomestno vezje za majhne signale je enako, kot za tranzistor tipa NPN (slika 5.6).

## 5.4 Spojni FET tranzistor (JFET)

**Spojni FET tranzistor (JFET) s kanalom tipa n** ima porazdeljen p-n spoj med vrati in kanalom (slika 5.7), ki ga v prvem približku modeliramo z diodami med vrati in izvorom ter vrati in ponorom (slika 5.7). Diodi med vrati in izvorom prispevata kapacitivnost  $c_{gs}$ , diodi med vrati in ponorom pa kapacitivnost  $c_{gd}$ .



Slika 5.7: Presek skozi JFET tranzistor s kanalom tipa n (levo) in pripadajoč simbol elementa (desno). Z diodama sta označena oba p-n spoja.

Kapacitivnosti obeh diod sta sestavljeni iz spojne in difuzijske kapacitivnosti.

$$c_{gs} = c_{gs,dep} + c_{gs,dif}, \quad (5.33)$$

$$c_{gd} = c_{gd,dep} + c_{gd,dif}. \quad (5.34)$$

Označimo delovno točko tranzistorja z  $u_{GS} = U_{GS}$  in  $u_{DS} = U_{DS}$ . Spojni kapacitivnosti sta tedaj

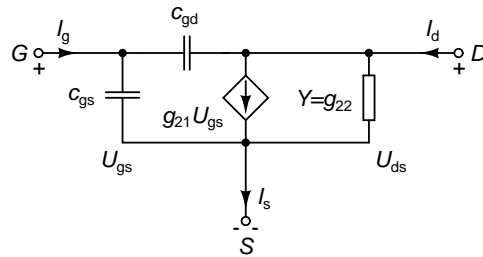
$$c_{gs,dep} = \begin{cases} C_{S0} \left(1 - \frac{U_{GS}}{V_J}\right)^{-M}, & U_{GS} \leq 0 \\ C_{S0} \left(1 + M \frac{U_{GS}}{V_J}\right), & U_{GS} > 0 \end{cases}, \quad (5.35)$$

$$c_{gd,dep} = \begin{cases} C_{D0} \left(1 - \frac{U_{GS} - U_{DS}}{V_J}\right)^{-M}, & U_{GS} \leq U_{DS} \\ C_{C0} \left(1 + M \frac{U_{GS} - U_{DS}}{V_J}\right), & U_{GS} > U_{DS} \end{cases}, \quad (5.36)$$

difuzijski kapacitivnosti pa

$$c_{gs,dif} = \tau \cdot \left. \frac{di_{GS}}{du_{GS}} \right|_{\substack{u_{GS}=U_{GS} \\ u_{GD}=U_{GS}-U_{DS}}} = \tau \cdot \frac{I_S}{V_T} e^{\frac{U_{GS}}{V_T}}, \quad (5.37)$$

$$c_{gd,dif} = \tau \cdot \left. \frac{di_{GD}}{du_{GD}} \right|_{\substack{u_{GS}=U_{GS} \\ u_{GD}=U_{GS}-U_{DS}}} = \tau \cdot \frac{I_S}{V_T} e^{\frac{U_{GS}-U_{DS}}{V_T}}. \quad (5.38)$$



Slika 5.8: Nadomestno vezje JFET tranzistorja za majhne signale, ki vključuje tudi kapacitivnosti.

Tokova  $i_{GS}$  in  $i_{GD}$  sta definirana z enačbo (4.84). Konstanti  $C_{S0}$  in  $C_{D0}$  imata podoben pomen, kot konstanta  $C_0$  pri diodi. Enako velja tudi za  $V_J$ ,  $M$  in  $\tau$ . Nadomestno vezje JFET tranzistorja za majhne signale je na sliki 5.8.

**Med normalnim delovanjem sta oba p-n spoja zaporno polarizirana** ( $u_{GS} < 0$  in  $u_{GD} < 0$ ). Tedaj sta difuzijski kapacitivnosti zanemarljivi in velja

$$c_{gs} = c_{gs,dep} \quad (5.39)$$

$$c_{gd} = c_{gd,dep}. \quad (5.40)$$

Proizvajalci včasih podajajo kapacitivnosti JFET tranzistorjev s podatkom  $c_{iss}$  in  $c_{rss}$ , ki ju s  $c_{gs}$  in  $c_{gd}$  povezujeta enačbi

$$c_{iss} = c_{gs} + c_{gd} \quad (5.41)$$

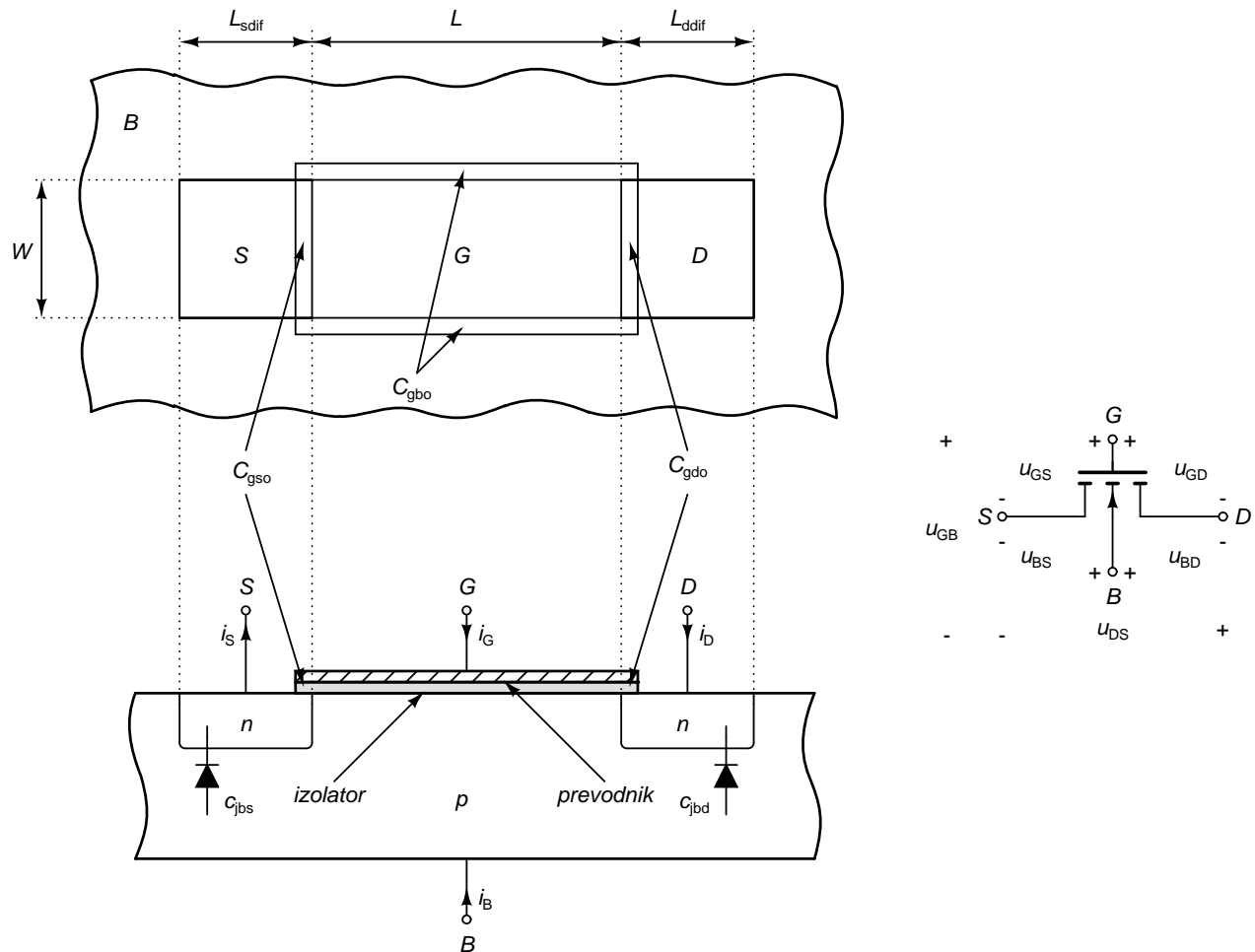
$$c_{rss} = c_{gd}. \quad (5.42)$$

Za **JFET tranzistor s kanalom tipa p** prav tako veljajo enačbe (5.33)-(5.38), v katerih pa moramo spremeniti predznake veličin  $u_{GS}$ ,  $u_{DS}$ ,  $u_{GD}$ ,  $i_{GS}$ ,  $i_{GD}$ ,  $U_{GS}$ ,  $U_{DS}$  in  $U_{GD}$ . Pri tem ostanejo  $C_{S0}$ ,  $C_{D0}$ ,  $V_J$ ,  $M$  in  $\tau$  pozitivne konstante. Nadomestno vezje za majhne signale je enako, kot za JFET tranzistor s kanalom tipa n (slika 5.8).

## 5.5 MOSFET tranzistor

Vse enačbe, ki jih bomo navedli v tem poglavju, se nanašajo na MOS tranzistor s kanalom tipa n. Enačbe za tranzistor s kanalom tipa p so enake, le da moramo v njih spremeniti predznake napetosti med sponkami in tokov sponke tranzistorja.

Kapacitivnosti v MOS tranzistorju delimo glede na njihov izvor na **ekstrinzične**, ki nastanejo zaradi različnih parazitnih pojavov in **intrinzične**, ki so posledica naboja v vratih ( $q_{Gi}$ ), substratu ( $q_{Bi}$ ) in kanalu ( $q_{Di} + q_{Si}$ ). Ti naboji omogočajo delovanje MOS tranzistorju in ne izpadejo iz enačb, tudi če zanemarimo parazitne pojave.



Slika 5.9: Pogled z zgornje strani (levo zgoraj) in presek (levo spodaj) skozi MOS tranzistor z induciranim kanalom tipa n ter njegov simbol (desno).

V nekaterih primerih bomo napetosti v enačbah intrinzičnih kapacitivnosti merili proti vratom tranzistorja. Tedaj se bosta v enačbah pojavili napetosti  $u_{GD}$  in  $u_{GB}$ . Z napetostmi  $u_{GS}$ ,  $u_{DS}$  in  $u_{BS}$  ju lahko izrazimo kot

$$u_{GD} = u_{GS} - u_{DS}, \quad (5.43)$$

$$u_{GB} = u_{GS} - u_{BS}. \quad (5.44)$$

Slika 5.9 (desno) prikazuje napetosti v MOS tranzistorju s kanalom tipa n. Pragovna napetost tranzistorja  $U_T$  ni konstanta. Odvisna je od napetosti  $u_{BS}$  po enačbi (4.59), ki jo na tem mestu ponovimo.

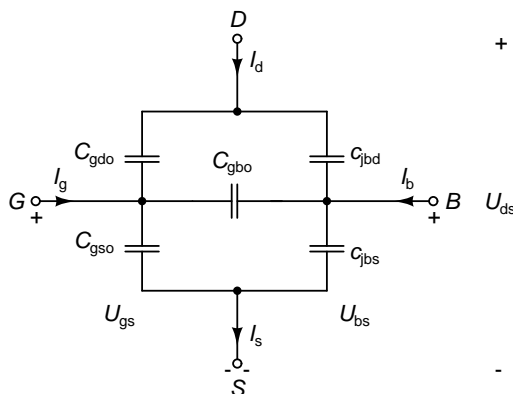
$$U_T = U_{T0} + \gamma \left( \sqrt{2\phi - u_{BS}} - \sqrt{2\phi} \right) = U_{T0} + \gamma \left( \sqrt{2\phi + u_{GB} - u_{GS}} - \sqrt{2\phi} \right). \quad (5.45)$$

Kapacitivnost, ki nastane med vrati in substratom, njen dielektrik pa tvori oksidne plast, bomo označili s  $C_0$ . To je tudi edina intrinzična kapacitivnost v področju akumulacije, ko je napetost  $u_{GB} \leq V_{FB}$ . Pri tem  $V_{FB}$  označuje napetost ravnih energijskih pasov, ko v polprevodniku ni naboja.

### 5.5.1 Parazitne (ekstrinzične) kapacitivnosti

Ekstrinzične kapacitivnosti izvirajo iz dveh parazitnih pojavov v MOS tranzistorju. Prvi je **prekrivanje**, do katerega pride, ker vrata zaradi nenatančnosti izdelave „štrlijo“ iz območja kanala čez izvor, ponor in substrat (slika

5.9, levo zgoraj), drugi pa so parazitne diode na p-n spojih med izvorom, ponorom in substratom.



Slika 5.10: Ekstrinzične kapacitivnosti MOS tranzistorja v modelu za majhne signale.

Kapacitivnosti prekrivanja so linearne in nastanejo med vrati in izvorom ( $C_{gso}$ ), vrati in ponorom ( $C_{gdo}$ ) ter vrati in substratom ( $C_{gbo}$ ).

Izvor in ponor tvorita s substratom dva p-n spoja (slika 5.9, levo spodaj), ki sta med normalnim delovanjem tranzistorja zaporno polarizirana ( $u_{BS} \leq 0$ ,  $u_{BD} \leq 0$ ). Ta spoja vnašata nelinearni diodni kapacitivnosti  $c_{jbs}$  in  $c_{jbd}$ . Pri zaporni polarizaciji sta diferencialni kapacitivnosti obeh diod v delovni točki  $u_{BS} = U_{BS}$  in  $u_{BD} = U_{BS} - U_{DS}$  enaki spojnim kapacitivnostima

$$c_{jbs} = C_{S0} \left( 1 - \frac{U_{BS}}{V_J} \right)^{-M}, \quad (5.46)$$

$$c_{jbd} = C_{D0} \left( 1 - \frac{U_{BS} - U_{DS}}{V_J} \right)^{-M}. \quad (5.47)$$

Ekstrinzične kapacitivnosti v modelu MOS tranzistorja za majhne signale prikazuje slika 5.10.

### 5.5.2 Meyerjev model intrinzičnih kapacitivnosti

Eden najpogosteje uporabljanih modelov intrinzičnih kapacitivnosti MOS tranzistorja je Meyerjev model [12], ki predpostavi  $u_{BS} = 0$ . Pri diskretnih tranzistorjih to ponavadi drži, saj je izvor vezan na substrat. Pogosto pa ne drži za integrirana vezja, kjer so substrati vseh tranzistorjev na enakem potencialu, medtem ko izvori niso. Zaradi konstantne  $u_{BS}$  je konstantna tudi pragovna napetost  $U_T$ .

**V linearnem področju** ( $u_{GS} \geq U_T$ ,  $u_{DS} \leq u_{GS} - U_T$ ) za intrinzične naboje v tranzistorju velja

$$q_{Bi} = -C_0 \gamma \sqrt{2\phi}, \quad (5.48)$$

$$q_{Gi} = C_0 \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{(u_{GD} - U_T)^3 - (u_{GS} - U_T)^3}{(u_{GD} - U_T)^2 - (u_{GS} - U_T)^2} + \gamma \sqrt{2\phi} \right), \quad (5.49)$$

$$(5.50)$$

**V področju nasičenja** ( $u_{GS} \geq U_T$ ,  $u_{DS} > u_{GS} - U_T$ ) je naboj v substratu ( $q_{Bi}$ ) enak, kot v linearnem področju, naboj vrat pa znaša

$$q_{Gi} = C_0 \left( \frac{2}{3} (u_{GS} - U_T) + \gamma \sqrt{2\phi} \right). \quad (5.51)$$

Zaradi nevtralnosti tranzistorja velja

$$q_{Bi} + q_{Gi} + q_{Si} + q_{Di} = 0. \quad (5.52)$$

Na osnovi (5.52) lahko določimo naboj v kanalu ( $q_{Di} + q_{Si}$ ) kot

$$q_{Di} + q_{Si} = -(q_{Gi} + q_{Bi}). \quad (5.53)$$

Model nič ne pove o delitvi naboja v kanalu ( $q_{Di} + q_{Si}$ ) med izvor ( $q_{Si}$ ) in ponor ( $q_{Di}$ ). Predpostavimo, da so intrinzične kapacitivnosti recipročne. To pomeni, da ima sprememba potenciala ponora enak vpliv na naboj vrat, kot sprememba potenciala vrat na naboj ponora. Meyer je zato definiral dve nelinearni intrinzični kapacitivnosti, ki v delovni točki  $u_{GS} = U_{GS}$  in  $u_{GD} = U_{GS} - U_{DS}$  znotraj **linearnega področja** znašata

$$c_{gsi} = \left. \frac{dq_{Gi}}{du_{GS}} \right|_{\substack{u_{GS}=U_{GS} \\ u_{GD}=U_{GS}-U_{DS}}} = \frac{2}{3}C_0 \left( 1 - \frac{(U_{GS} - U_T - U_{DS})^2}{(2(U_{GS} - U_T) - U_{DS})^2} \right), \quad (5.54)$$

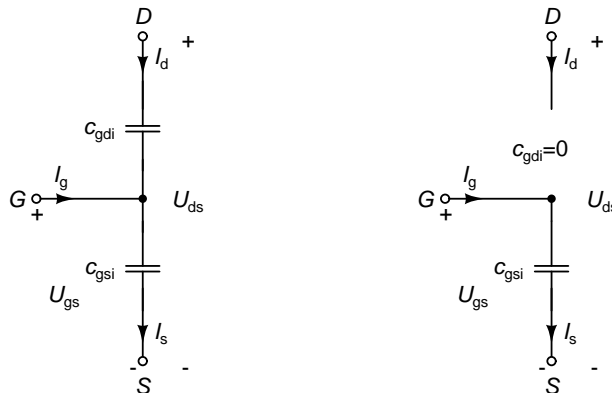
$$c_{gdi} = \left. \frac{dq_{Gi}}{du_{GD}} \right|_{\substack{u_{GS}=U_{GS} \\ u_{GD}=U_{GS}-U_{DS}}} = \frac{2}{3}C_0 \left( 1 - \frac{(U_{GS} - U_T)^2}{(2(U_{GS} - U_T) - U_{DS})^2} \right). \quad (5.55)$$

V **področju nasičenja** sta intrinzične kapacitivnosti enaki

$$c_{gsi} = \frac{2}{3}C_0, \quad (5.56)$$

$$c_{gdi} = 0. \quad (5.57)$$

Vidimo, da kapacitivnost  $c_{gdi}$  postane enaka 0 v področju nasičenja. To pomeni, da je tedaj ves naboj kanala na strani izvora ( $q_{Di} = 0$ ).

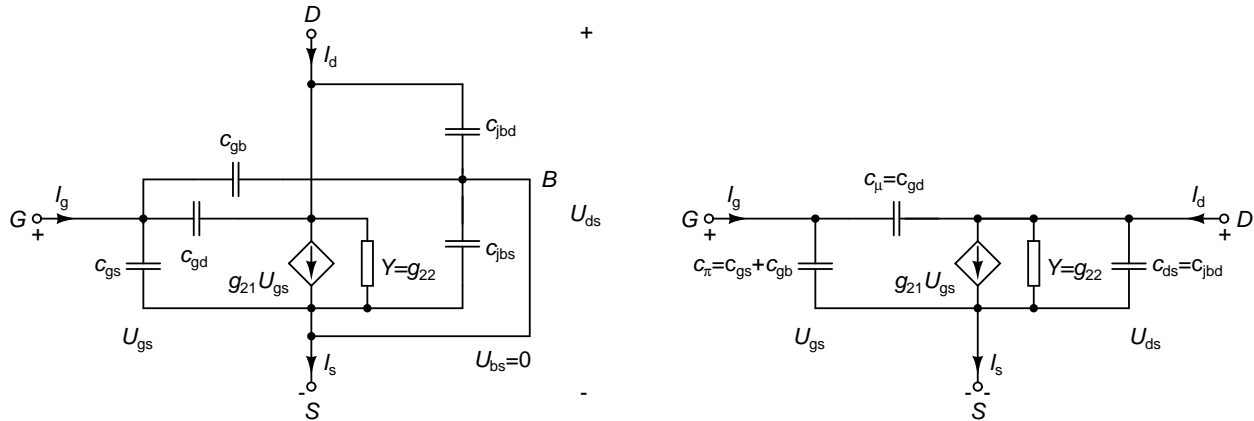


Slika 5.11: Intrinzične kapacitivnosti v modelu diskretnega MOS tranzistorja (kratek stik med izvorom in substratom,  $u_{BS} = 0$ ) za majhne signale po Meyerju. Model za linearno področje (levo) in področje nasičenja (desno).

Model intrinzičnih kapacitivnosti diskretnega MOS tranzistorja (substrat je vezan na izvor,  $u_{BS} = 0$ ) za majhne signale je na sliki 5.11. Če mu dodamo še ekstrinzične kapacitivnosti in enosmerni model (slika 4.13), dobimo model na sliki 5.12. V njem nastopa vrsta kapacitivnosti, ki jih združimo v  $c_{gs}$ ,  $c_{gd}$  in  $c_{gb}$ .

Kapacitivnost  $c_{gs}$  je sestavljena iz intrinzične  $c_{gsi}$  in kapacitivnosti prekrivanja  $C_{gso}$ .

$$c_{gs} = c_{gsi} + C_{gso}. \quad (5.58)$$



Slika 5.12: Nadomestno vezje diskretnega MOS tranzistorja za majhne signale na osnovi Meyerjevega modela intrinzičnih kapacitivnosti (levo). Ker sta substrat (B) in izvor (S) kratko sklenjena, lahko uporabimo poenostavljeno nadomestno vezje (desno).

Podobno je  $c_{gd}$  je sestavljena iz intrinzične  $c_{gdi}$  in kapacitivnosti prekrivanja  $C_{gdo}$

$$c_{gd} = c_{gdi} + C_{gdo}. \quad (5.59)$$

Ker je v področju nasičenja  $c_{gdi} = 0$ , se tam izraz (5.59) poenostavi v

$$c_{gd} = C_{gdo}. \quad (5.60)$$

Med vrati in substratom imamo kapacitivnost  $c_{gb}$ , ki je enaka kapacitivnosti prekrivanja  $C_{gbo}$ .

$$c_{gb} = C_{gbo}. \quad (5.61)$$

V modelu nastopata tudi kapacitivnosti diod med izvorom in substratom ( $c_{jbs}$ ) ter izvorom in ponorom ( $c_{jbd}$ ). Zaradi kratkega stika med substratom in izvorom se kapacitivnost  $c_{jbs}$  kratko sklene in izpade iz modela, kapacitivnost  $c_{gb}$  pa se veže vzporedno k  $c_{gs}$ . Dobimo vezje na sliki 5.12 (desno). V poenostavljenem modelu pogosto uporabimo oznake  $c_{\pi}$ ,  $c_{\mu}$  in  $c_{ds}$  za  $c_{gs} + c_{gb}$ ,  $c_{gd}$  in  $c_{jbd}$ .

Proizvajalci diskretnih MOS tranzistorjev podajajo kapacitivnosti tranzistorja kot  $c_{iss}$ ,  $c_{oss}$  in  $c_{rss}$ .  $c_{iss}$  je kapacitivnost, ki jo čutimo na vходу ojačevalnika s skupnim izvorom, kadar je njegov izhod kratko sklenjen za majhne signale. Tvori jo vzporedna vezava  $c_{\pi} = c_{gs} + c_{gb}$  in  $c_{\mu} = c_{gd}$ . Velja

$$c_{iss} = c_{\pi} + c_{\mu} = c_{gs} + c_{gb} + c_{gd}. \quad (5.62)$$

Kapacitivnost  $c_{oss}$  je izhodna kapacitivnost ojačevalnika v orientaciji s skupnim izvorom, kadar je njegov vhod kratko sklenjen za majhne signale. Na izhodu tedaj čutimo vzporedno vezavo  $c_{\mu} = c_{gd}$  in  $c_{ds} = c_{jbd}$ .

$$c_{oss} = c_{\mu} + c_{ds} = c_{gd} + c_{jbd}. \quad (5.63)$$

Kapacitivnost  $c_{rss}$  je kapacitivnost, ki povezuje vrata s ponorom.

$$c_{rss} = c_{\mu} = c_{gd}. \quad (5.64)$$



S pomočjo enačb (5.62)-(5.64) lahko določimo kapacitivne elemente poenostavljenega modela tranzistorja za majhne signale .

$$c_{\pi} = c_{gs} + c_{gb} = c_{iss} - c_{rss}, \quad (5.65)$$

$$c_{\mu} = c_{gd} = c_{rss}, \quad (5.66)$$

$$c_{ds} = c_{jbd} = c_{oss} - c_{rss}. \quad (5.67)$$

Meyerjev model lahko dopolnimo za primer, ko je  $u_{BS} \neq 0$ , kar nam omogoča, da ga uporabimo tudi za integrirana vezja. Vendar pa glavna slabost modela ni v njegovi premajhni natančnosti, temveč v napaki, ki smo jo naredili, ko smo predpostavili, da so kapacitivnosti recipročne.

### 5.5.3 Nerecipročnost intrinzičnih kapacitivnosti

Meyerjev model ni pravilen, ker ne ohranja naboja v simulacijah vezij za velike signale [13]. Uporaben je le kot približek. Težava izvira iz dejstva, da smo odvode (5.54)-(5.55) predstavili kot kapacitivnosti, ki so recipročne. Naboj v MOS tranzistorju se obnaša nerecipročno. V [14] so podani dokaj preprosti izrazi za naboje v MOS tranzistorju s pomočjo katerih lahko zgradimo natančnejši model kapacitivnosti MOS tranzistorja. Poglejmo si, v čem se ta razlikuje od Meyerjevega modela.

Tudi tokrat izhajamo iz naboja. Recimo, da poznamo naboje, ki jih hranijo vrata ( $q_{Gi}$ ), ponor ( $q_{Di}$ ), izvor ( $q_{Si}$ ) in substrat ( $q_{Bi}$ ) tranzistorja. Vsi štirje naboji so v splošnem nelinearne funkcije napetosti  $u_{GS}$ ,  $u_{DS}$  in  $u_{BS}$ . Zaradi nevtralnosti tranzistorja še vedno velja, da je vsota vseh nabojev enaka 0 (5.52). Tako zadostuje, da poznamo tri naboje od štirih. Odločimo se za  $q_{Gi}$ ,  $q_{Di}$  in  $q_{Bi}$ .

$$q_{Gi} = q_{Gi}(u_{GS}, u_{DS}, u_{BS}), \quad (5.68)$$

$$q_{Di} = q_{Di}(u_{GS}, u_{DS}, u_{BS}), \quad (5.69)$$

$$q_{Bi} = q_{Bi}(u_{GS}, u_{DS}, u_{BS}). \quad (5.70)$$

Prispevke k tokovom  $i_G$ ,  $i_D$  in  $i_B$ , ki nastanejo zaradi spreminjanja teh nabojev, lahko izrazimo z odvajanjem nabojev po času. Označimo jih z  $i_{cG}$ ,  $i_{cD}$  in  $i_{cB}$ . Zaradi spreminjanja  $q_G$  imamo tok  $i_{cG}$ , ki prispeva k celotnemu toku  $i_G$ .

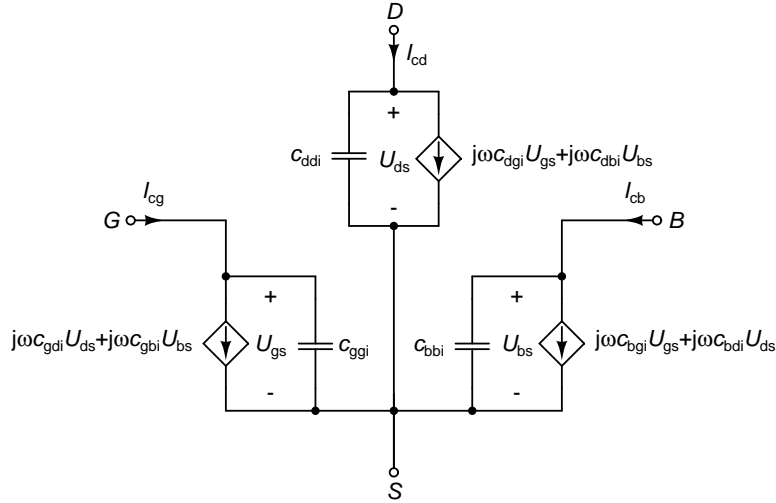
$$\begin{aligned} i_{cG} &= \frac{dq_{Gi}}{dt} = \frac{dq_{Gi}}{du_{GS}} \cdot \frac{du_{GS}}{dt} + \frac{dq_{Gi}}{du_{DS}} \cdot \frac{du_{DS}}{dt} + \frac{dq_{Gi}}{du_{BS}} \cdot \frac{du_{BS}}{dt} \\ &= c_{ggi} \frac{du_{GS}}{dt} + c_{gdi} \frac{du_{DS}}{dt} + c_{gbi} \frac{du_{BS}}{dt} \end{aligned} \quad (5.71)$$

Ko postopek ponovimo še za preostala dva naboja, lahko dobljene tri enačbe združimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} i_{cG} \\ i_{cD} \\ i_{cB} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{ggi} & c_{gdi} & c_{gbi} \\ c_{dgi} & c_{ddi} & c_{dbi} \\ c_{bgi} & c_{bdi} & c_{bbi} \end{bmatrix}}_{\text{matrika intrinzičnih kapacitivnosti}} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{GS} \\ u_{DS} \\ u_{BS} \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

Intrinzične kapacitivnosti  $c_{xyi}$  so definirane kot

$$c_{xyi} = \frac{dq_{xi}}{du_{yS}}. \quad (5.73)$$



Slika 5.13: Celotno (pravilno) nadomestno vezje intrinzičnih kapacitivnosti MOS tranzistorja za majhne signale.

V splošnem ne velja  $c_{xyi} = c_{yxi}$ , kar pomeni, da matrika intrinzičnih kapacitivnosti ni simetrična. Zaradi tega je vezje, ki ga predstavlja enačba (5.72) neregipročno. Posledično ga ne moremo predstaviti zgolj z navadnimi nelinearnimi kondenzatorji, saj so ti recipročni.

Poglejmo si sedaj kako lahko predstavimo posamezne člene v izrazu (5.71). Člen  $c_{ggi} \cdot (du_{GS}/dt)$  predstavlja prispevek k toku vrat  $i_G$ , ki je odvisen od odvoda napetosti med vrati in izvorom ( $u_{GS}$ ). Ta člen lahko v modelu za majhne signale predstavimo s kapacitivnostjo  $c_{ggi}$ , ki je vezana med vrata in izvor. Podobno lahko naredimo tudi s členoma  $c_{ddi} \cdot (du_{DS}/dt)$  in  $c_{bbi} \cdot (du_{BS}/dt)$ , ki prispevata k tokovoma  $i_D$  in  $i_B$ . Prvega predstavlja kapacitivnost  $c_{ddi}$  med ponorom in izvorom, drugega pa kapacitivnost  $c_{bbi}$  med substratom in izvorom (slika 5.13).

Izvendagonalnih elementov matrike intrinzičnih kapacitivnosti v izrazu (5.71) ne moremo predstaviti z nelinearnimi kondenzatorji. Poglejmo si primer člena  $c_{gdi} \cdot (du_{DS}/dt)$ . Ta predstavlja prispevek k toku vrat ( $i_G$ ), ki ga povzroča odvod napetosti med ponorom in izvorom. Člen ima naravo kapacitivnosti (v njem nastopa odvod napetosti), ki pa ni napetost med vrati in izvorom (referenčno sponko proti kateri merimo vse napetosti). Takim kapacitivnostim pravimo **transkapacitivnosti**. V časovnem prostoru jih težko predstavimo s preprostim vezjem, saj zanje nimamo simbola. Lažje pa to storimo v frekvenčnem prostoru za majhne signale, ki jih predstavljamo s kompleksorji. Enačba (5.71) se v frekvenčnem prostoru glasi

$$I_{cg} = c_{ggi}j\omega U_{gs} + c_{gdi}j\omega U_{ds} + c_{gbi}j\omega U_{bs}. \quad (5.74)$$

Vidimo, da lahko člen  $c_{gdi} \cdot (du_{DS}/dt)$ , ki se v frekvenčnem prostoru glasi  $c_{gdi}j\omega U_{ds}$  predstavimo v obliki napetostno krmiljenega tokovnega vira, ki vleče tok iz vrat proti izvoru, krmili pa ga napetost  $U_{ds}$ . Ojačenje krmiljenega vira (transadmitanca) znaša  $j\omega c_{gdi}$ . Na podoben način lahko obravnavamo vseh šest izvendagonalne elementov in dobimo šest krmiljenih virov. Da bi bila slika enostavnejša združimo po dva krmiljena vira v enega, kar nam da tri krmiljene vire na sliki 5.13.

**Intrinzične kapacitivnosti MOS tranzistorja v področju nasičenja** lahko izračunamo iz nabojev, ki so podani v [14].

$$q_{Gi} = C_0 \left( \frac{2}{3}(u_{GS} - U_T) + \gamma\sqrt{2\phi - u_{BS}} \right) = C_0 \left( \frac{2}{3}u_{GS} + \frac{1}{3}U_T - U_{T0} + \gamma\sqrt{2\phi} \right), \quad (5.75)$$

$$q_{Di} = -\frac{4}{15}C_0(u_{GS} - U_T), \quad (5.76)$$

$$q_{Bi} = -C_0(U_T - U_{T0} + \gamma\sqrt{2\phi}). \quad (5.77)$$

V izrazih (5.75)-(5.77) smo upoštevali zvezo  $\gamma\sqrt{2\phi - u_{BS}} = U_T - U_{T0} + \gamma\sqrt{2\phi}$ , ki jo dobimo iz (5.45). S pomočjo (5.52) lahko izračunamo tudi naboj izvora tranzistorja.

$$q_{Si} = -(q_{Gi} + q_{Di} + q_{Bi}) = -\frac{2}{5}C_0(u_{GS} - U_T). \quad (5.78)$$

Če primerjamo naboj v kanalu (vsoto (5.76) in (5.78)) z nabojem v kanalu po Meyerjevem modelu, vidimo, da sta enaka ( $q_{Di} + q_{Si} = -\frac{2}{3}C_0(u_{GS} - U_T)$ ). V modelu [14] se naboj v kanalu deli med izvor in ponor v razmerju 60 : 40. V Meyerjevem modelu je ves naboj na strani izvora, kar pomeni, da je delilno razmerje 100 : 0.

Pri določanju intrinzičnih kapacitivnosti  $c_{xyi}$  moramo upoštevati, da pragovna napetost ni konstantna. Po enačbi (5.45) je dvisna od  $u_{BS}$ . Potrebovali bomo odvode pragovne napetosti.

$$\frac{dU_T}{du_{GS}} = \frac{dU_T}{du_{DS}} = 0, \quad (5.79)$$

$$\frac{dU_T}{du_{BS}} = -\frac{\gamma}{2\sqrt{2\phi - u_{BS}}} = -\alpha. \quad (5.80)$$

Element  $c_{xyi}$  matrike intrinzičnih kapacitivnosti lahko izrazimo kot

$$c_{xyi} = \frac{dq_{xi}}{du_{yS}} = \frac{\partial q_{xi}}{\partial u_{yS}} + \frac{\partial q_{xi}}{\partial U_T} \cdot \frac{dU_T}{du_{yS}}. \quad (5.81)$$

Intrinzične kapacitivnosti so

$$c_{ggi} = \frac{\partial q_{Gi}}{\partial u_{GS}} + \frac{\partial q_{Gi}}{\partial U_T} \cdot \frac{dU_T}{du_{GS}} = \frac{2}{3}C_0, \quad (5.82)$$

$$c_{gdi} = \frac{\partial q_{Gi}}{\partial u_{DS}} + \frac{\partial q_{Gi}}{\partial U_T} \cdot \frac{dU_T}{du_{DS}} = 0, \quad (5.83)$$

$$c_{gbi} = \frac{\partial q_{Gi}}{\partial u_{BS}} + \frac{\partial q_{Gi}}{\partial U_T} \cdot \frac{dU_T}{du_{BS}} = -\frac{1}{3}C_0\alpha, \quad (5.84)$$

$$c_{dgi} = \frac{\partial q_{Di}}{\partial u_{GS}} + \frac{\partial q_{Di}}{\partial U_T} \cdot \frac{dU_T}{du_{GS}} = -\frac{4}{15}C_0, \quad (5.85)$$

$$c_{ddi} = \frac{\partial q_{Di}}{\partial u_{DS}} + \frac{\partial q_{Di}}{\partial U_T} \cdot \frac{dU_T}{du_{DS}} = 0, \quad (5.86)$$

$$c_{dbi} = \frac{\partial q_{Di}}{\partial u_{BS}} + \frac{\partial q_{Di}}{\partial U_T} \cdot \frac{dU_T}{du_{BS}} = -\frac{4}{15}C_0\alpha, \quad (5.87)$$

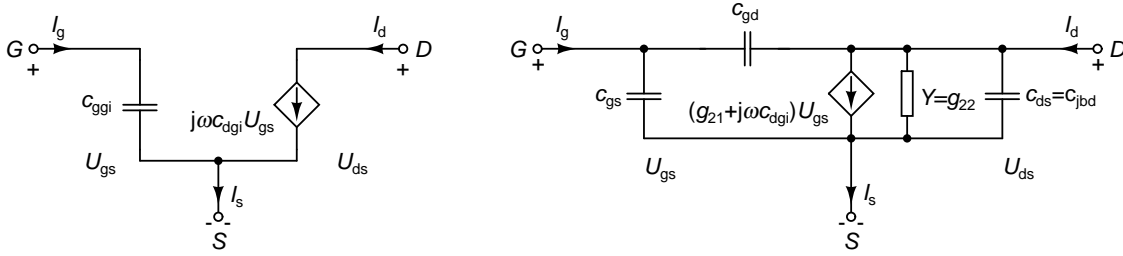
$$c_{bgi} = \frac{\partial q_{Bi}}{\partial u_{GS}} + \frac{\partial q_{Bi}}{\partial U_T} \cdot \frac{dU_T}{du_{GS}} = 0, \quad (5.88)$$

$$c_{bdi} = \frac{\partial q_{Bi}}{\partial u_{DS}} + \frac{\partial q_{Bi}}{\partial U_T} \cdot \frac{dU_T}{du_{DS}} = 0, \quad (5.89)$$

$$c_{bbi} = \frac{\partial q_{Bi}}{\partial u_{BS}} + \frac{\partial q_{Bi}}{\partial U_T} \cdot \frac{dU_T}{du_{BS}} = C_0\alpha. \quad (5.90)$$

**V diskretnem MOS tranzistorju** sta substrat in izvor kratko sklenjena ( $U_{bs} = 0$ ). Veja med substratom in izvorom na sliki 5.13 izpade iz nadomestnega vezja. Izpadejo tudi vsi členi krmiljenih virov, ki vsebujejo  $U_{bs}$ . Od nadomestnega vezja na sliki 5.13 ostane samo kapacitivnost med vrati in izvorom  $c_{ggi}$  ter krmiljen vir med ponorom in izvorom  $j\omega c_{dgi}U_{gs}$  (slika 5.14, levo).

Kapacitivnost  $c_{ggi}$  je enaka Meyerjevi  $c_{gsi}$ , ki je vezana med vrata in izvor. Zaradi neregularnosti intrinzičnih kapacitivnosti se transkonduktanca krmiljnega vira med ponorom in izvorom spremeni iz  $g_{21}$  (slika 4.13) v



Slika 5.14: Nerecipročno nadomestno vezje intrinzičnih kapacitivnosti diskretnega MOS tranzistorja za majhne signale v področju nasičenja (levo) in celoten model diskretnega MOS tranzistorja v področju nasičenja za majhne signale (desno).

$g_{21} + j\omega c_{dgi}$ . Celoten model diskretnega MOS tranzistorja v področju nasičenja za majhne signale, ki upošteva tudi nerecipročnost intrinzičnih kapacitivnosti, je na sliki 5.14 (desno). Model vključuje tudi ekstrinzične kapacitivnosti, ki so upoštewane v  $c_{gs}$ ,  $c_{gd}$  in  $c_{ds}$ .

$$c_{gs} = c_{ggi} + C_{gso} + C_{gbo}, \quad (5.91)$$

$$c_{gd} = C_{gdo}, \quad (5.92)$$

$$c_{ds} = c_{jbd}. \quad (5.93)$$

$$(5.94)$$

Vidimo, da Meyerjev model pravilno opisuje diskretni MOS tranzistor v področju nasičenja za majhne signale, ko je  $U_{gs} = 0$  (kratek stik za izmenične signale med vrati in izvorom). Tedaj prispevek  $c_{dgi}$  izpade iz enačb.

**Primer 5.2:** Za integrirani MOSFET tranzistor z kanalom tipa n v  $0,18\mu\text{m}$  tehnologiji določimo kapacitivnosti modela za majhne signale v področju nasičenja. Širina kanala znaša  $W = 25\mu\text{m}$ , dolžina pa  $L = 2,5\mu\text{m}$ . Dolžini izvora oziroma ponora sta enaki  $L_{dif} = L_{sdif} = L_{ddif} = 0,5\mu\text{m}$ , debelina oksida pod vrati je  $h = 4\text{nm}$ , relativna dielektričnost pa  $\epsilon_r = 3,9$ . Kapacitivnost prekrivanja na enoto dolžine med vrati in izvorom ter vrati in ponorom znaša  $c_{so} = c_{do} = 350\text{pF/m}$ . Kapacitivnost prekrivanja med vrati in substratom je zanemarljiva. Paraziti diodi med vrati in ponorom ter vrati in izvorom imata kapacitivnost pri ničelni diodni napetosti sestavljeno iz dveh komponent: ena je sorazmerna s površino izvora (ponora) s sorazmernostno konstanto  $c_j = 1,0 \cdot 10^{-3}\text{F/m}^2$ , druga pa je sorazmerna z obsegom izvora (ponora) s sorazmernostno konstanto  $c_{jsw} = 200\text{pF/m}$ . Substrat tranzistorja je vezan na njegov izvor.

Pričnimo z intrinzičnimi kapacitivnostmi. Za izračun  $C_0$  obravnavamo vrata in substrat kot kondenzator z dielektrikom iz oksida debeline  $h$  (za  $\epsilon_0$  vzamemo  $8,85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$ ). Dobimo

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r W L}{h} = 0,539\text{pF}. \quad (5.95)$$

Odtod sledita obe intrinzični kapacitivnosti

$$c_{ggi} = \frac{2}{3}C_0 = 0,359\text{pF}, \quad (5.96)$$

$$c_{dgi} = -\frac{4}{15}C_0 = -0,144\text{pF}. \quad (5.97)$$

Prekrivanje med vrati in izvorom (ponorom) nastane na stičišču dolžine  $W$ . Velja

$$C_{gso} = C_{gdo} = c_{so}W = 8,75\text{fF}. \quad (5.98)$$

Kapacitivnost  $C_{gbo}$  je zanemarljiva. Pri ničelni zaporni napetosti med izvorom in substratom oziroma izvorom in ponorom sta kapacitivnosti diod v MOSFETu enaki

$$C_{S0} = C_{D0} = c_j W L_{dif} + c_{jsw} (2W + 2L_{dif}) = 12,5\text{fF} + 10,2\text{fF} = 22,7\text{fF} \quad (5.99)$$

Ker je zaporna napetost med izvorom (ponorom) in substratom večja ali enaka 0V, velja zaradi (5.46)-(5.47)

$$C_{S0}, C_{D0} \geq c_{jbs}, c_{jbd} \quad (5.100)$$

Vidimo, da je prispevek  $C_{gso}$  k  $c_{gs}$  zanemarljiv. Kapacitivni elementi modela (poleg  $c_{dgi}$ , ki smo ga določili z (5.97)) so tako enaki

$$c_{gs} = c_{ggi} + C_{gso} + C_{gbo} = 0,368\text{pF} \approx c_{ggi}, \quad (5.101)$$

$$c_{gd} = C_{gdo} = 8,75\text{fF}, \quad (5.102)$$

$$c_{ds} = c_{jbd} \leq C_{D0} = 22,7\text{fF}. \quad (5.103)$$

Če obdržimo razmerje  $W/L$  in  $L_{dif}$  ter zmanjšamo tranzistor za  $\xi$ -krat, se  $C_0$  in z njim vse intrinzične kapacitivnosti zmanjšajo s kvadratom  $\xi$ . Kapacitivnosti prekrivanja se zmanjšajo linearno ( $\xi$ -krat). Pri kapacitivnostih parazitnih diod ponora in izvora velja približno linearno sorazmerje z  $\xi$ , saj je dolžina ponora in izvora ( $L_{dif}$ ) ostala enaka. Zaradi tega postanejo pri majhnih tranzistorjih kapacitivnosti prekrivanja in kapacitivnosti parazitnih diod nezanemarljive v primerjavi z intrinzičnimi kapacitivnostmi, ki so sorazmerne s  $C_0$ . Če prej opisani tranzistor zmanjšamo za  $\xi = 10$  krat (na  $W = 2,5\mu\text{m}$ ,  $L = 0,25\mu\text{m}$ ), imamo

$$c_{ggi} = \frac{2}{3}\xi^2 C_0 = 3,59\text{fF}, \quad (5.104)$$

$$c_{dgi} = -\frac{4}{15}\xi^2 C_0 = -1,44\text{fF}, \quad (5.105)$$

$$C_{gso} = \xi C_{gdo} = 0,875\text{fF}, \quad (5.106)$$

$$C_{S0} = C_{D0} = c_j \xi W L_{dif} + c_{jsw} (2\xi W + 2L_{dif}) = 1,25\text{fF} + 1,2\text{fF} = 2,45\text{fF}. \quad (5.107)$$

Pri najmanjših tranzistorjih, ki jih uporabljamo v visokofrekvenčnih vezjih, imajo parazitne kapacitivnosti podoben ali celo večji vpliv na delovanje vezja, kot intrinzične kapacitivnosti.  $\triangle$



## 6

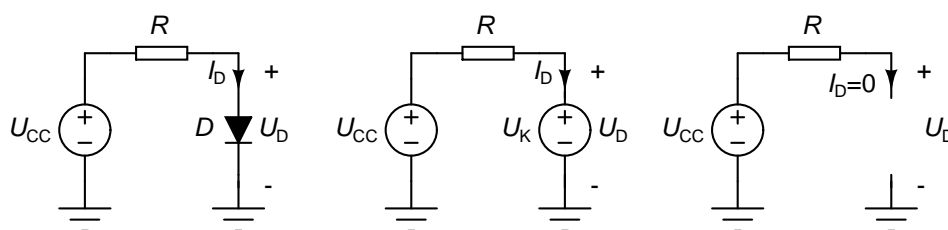
# Nastavljanje delovne točke nelinearnih elementov

Linearna vezja so v praksi izvedena z nelinearnimi komponentami. Veličine, ki se pokoravajo zakonitostim linearne elektronike, so odmikni od enosmerne razmere v vezju. Zato si najprej pogledimo, kako vzpostavimo željene enosmerne razmere v vezju, ki jim pravimo tudi **delovna točka**. Delovno točko vezja računamo na osnovi **velikosignalnega modelnega vezja**, ki opisuje celotne tokove in napetosti v vezju. V tem poglavju so vsi neodvisni viri enosmerni.

### 6.1 Dioda

Dioda je dvopol, ki povezuje dve veličini – tok skozi diodo  $I_D$  in napetost na diodi  $U_D$ . Delovna točka je določena z eno od teh dveh veličin. Ponavadi izberemo tok  $I_D$ , kot veličino, ki določa delovno točko. S karakteristiko diode je pripadajoča napetost  $U_D$  enolično določena.

Če pogledamo karakteristiko diode na sliki 4.1 (desno), vidimo, da se za napetosti  $U_D$  med 0,6V in 0,8V zvrstijo praktično vse možne vrednosti toka diode  $I_D$  od  $\mu\text{A}$  do A. Zato v prvem približku vzamemo, da je napetost na diodi konstantna in enaka kolenski napetosti  $U_K = 0,7\text{V}$ .



Slika 6.1: Nastavljanje delovne točke diode (levo), poenostavljeno velikosignalno modelno vezje za  $U_{DD} \geq U_K$  (na sredini) in  $U_{DD} < U_K$  (desno).

Delovno točko diode nastavimo z vezjem na sliki 6.1 (levo). Prevodno polarizirana dioda (za  $U_{DD} \geq U_K$ ) se v prvem približku obnaša kot napetostni vir z napetostjo  $U_K$  (slika 6.1, na sredini). Zaporno polarizirana dioda (za  $U_{DD} < U_K$ ) se obnaša kot odprte sponke ( $I_D = 0$ , slika 6.1, desno). Obravnavali bomo primer prevodno polarizirane diode. Upor  $R$  skupaj z napajalnim virom  $U_{DD}$  določa tok skozi diodo, ki je v prvem približku enak

$$I_D = \frac{U_{DD} - U_K}{R}. \quad (6.1)$$

Iz enačbe 6.1 lahko ob znanem  $U_{DD}$  določimo vrednost upora  $R$ , da bo tok skozi diodo enak  $I_D$ .

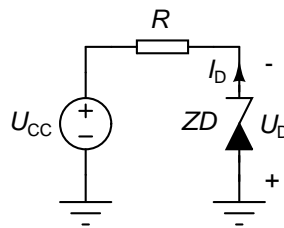
$$R = \frac{U_{DD} - U_K}{I_D}. \quad (6.2)$$

Včasih pa poenostavitev  $U_D = U_K$  ni dovolj natančna. V tem primeru moramo poznati točko na karakteristiki diode (delovno točko), ki jo podamo s parom  $(U_D, I_D)$ , pri čemer  $U_D$  ni več enaka  $U_K$ , ampak se spreminja v odvisnosti od željenega  $I_D$ . V tem primeru vrednost upora  $R$ , ki diodo spravi v željeno delovno točko, izračunamo s pomočjo enačbe

$$R = \frac{U_{DD} - U_D}{I_D}. \quad (6.3)$$

## 6.2 Zenerjeva dioda

Tudi Zenerjeva dioda je dvopol. Delovno točko ji nastavimo podobno, kot diodi (slika 6.2). Razlika je v tem, da proizvajalci ponavadi podajajo eno delovno točko za Zenerjevo diodo v obliki para  $(U_Z, I_Z) = (-U_D, -I_D)$ .



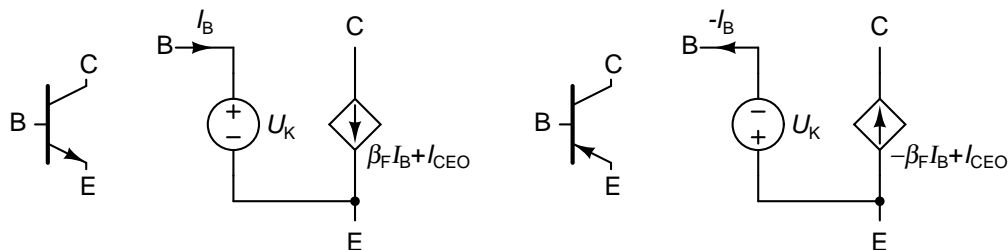
Slika 6.2: Nastavljanje delovne točke Zenerjeve diode.

Velikost upora, ki zagotovi zaporni tok  $I_Z$  ob zaporni napetosti  $U_Z$ , izračunamo podobno, kot smo to naredili za diodo

$$R = \frac{U_{DD} - U_Z}{I_Z}. \quad (6.4)$$

## 6.3 Bipolarni tranzistor

Bipolarni tranzistor je tropolni element. Model NPN tranzistorja v aktivnem področju podajata enačbi (4.30) in (4.31), ki povezujeta 4 veličine:  $U_{BE}$ ,  $U_{CE}$ ,  $I_B$  in  $I_C$ . Za namen izračuna delovne točke bomo enačbi poenostavili, saj sta preveč zapleteni, da bi z njima lahko karkoli analitično izračunali.



Slika 6.3: Poenostavljen model bipolarnega tranzistorja tipa NPN (levo) in PNP (desno) v aktivnem področju, ki ga uporabimo za izračun delovne točke.

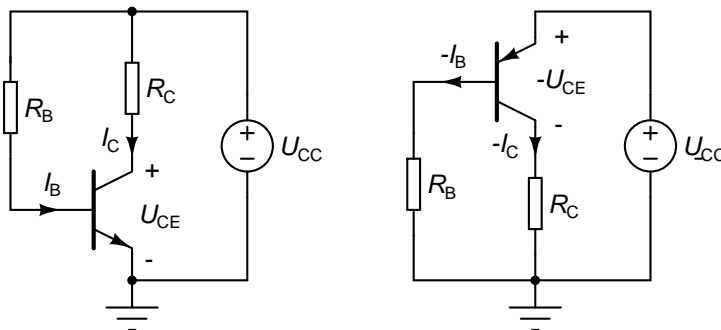


Poglejmo najprej odvisnost baznega toka  $I_B$  od napetosti  $U_{BE}$  (slika 4.5, levo). Vidimo, da za vrednosti  $U_{BE}$  med 0,6V in 0,8V bazni tok zavzame vrednosti od nekaj  $\mu\text{A}$  do več mA. To pomeni, da lahko v prvem približku vzamemo, da je napetost  $U_{BE}$  zmeraj enaka kolenski napetosti  $U_K = 0,7\text{V}$ . Enačbo za kolektorski tok poenostavimo tako, da zanemarimo Earlyjev pojav ( $V_{AF} = \infty$ ), kar prav tako močno poenostavi izpeljave. Enačbi (4.30) in (4.31) tako zamenjamo z mnogo enostavnejšima

$$U_{BE} = U_K, \quad (6.5)$$

$$I_C = \beta_F I_B + I_{CEO}, \quad (6.6)$$

pri čemer so  $U_K$ ,  $\beta_F$  in  $I_{CEO}$  konstante. Slika 6.3 prikazuje poenostavljen model bipolarnega tranzistorja, ki ga uporabljamo za izračun delovne točke. Enačbi za PNP tranzistor sta enaki kot (6.5) in (6.6), le da pred veličine  $U_{BE}$ ,  $U_{CE}$ ,  $I_B$  in  $I_C$  postavimo negativen predznak. Delovno točko bipolarnega tranzistorja podamo s parom  $(U_{CE}, I_C)$ . Preostali dve veličini  $(U_{BE}, I_B)$  lahko izračunamo s pomočjo enačb (6.5) in (6.6).



Slika 6.4: Nastavljanje delovne točke bipolarnega tranzistorja. NPN tranzistor (levo) in PNP tranzistor (desno).

Slika 6.4 prikazuje **enostaven način za nastavitev delovne točke bipolarnega tranzistorja**. Poleg delovne točke poznamo še napajalno napetost  $U_{CC}$ . Da bo tranzistor v pravi delovni točki, moramo ustrezno izbrati upora  $R_B$  in  $R_C$ . Vse izpeljave bomo naredili za NPN tranzistor (slika 6.4, levo). Na uporu  $R_C$  je padec napetosti enak  $U_{CC} - U_{CE}$ , skozenj pa mora teči tok  $I_C$ . Odtod izračunamo upornost  $R_C$  z enačbo

$$R_C = \frac{U_{CC} - U_{CE}}{I_C}. \quad (6.7)$$

Za določitev  $R_B$  moramo najprej določiti napetost na uporu. Pri tem se spomnimo dejstva, da je  $U_{BE} = U_K$ . Napetost na uporu  $R_B$  je zato enaka  $U_{CC} - U_K$ . Skozi upor teče tok  $I_B$ , ki ga določimo s pomočjo enačbe (6.6).

$$I_B = \frac{I_C - I_{CEO}}{\beta_F}. \quad (6.8)$$

Nato s pomočjo Ohmvega zakona določimo upor  $R_B$ .

$$R_B = \beta_F \frac{U_{CC} - U_K}{I_C - I_{CEO}}. \quad (6.9)$$

**Primer 6.1:** Za tranzistor z  $\beta_F = 200$ ,  $I_{CEO} = 5\mu\text{A}$  in napajalno napetost  $U_{CC} = 10\text{V}$  določimo upora  $R_C$  in  $R_B$ , da bo tranzistor v delovni točki  $U_{CE} = 5\text{V}$  in  $I_C = 1\text{mA}$ .

Iz enačbe (6.7) dobimo  $R_C = 5\text{k}\Omega$ , iz enačbe (6.9) pa  $R_B = 1,87\text{M}\Omega$ . △

Nastavljanje delovne točke z vezjem na sliki 6.4 se v praksi ne obnese najbolje, ker je izračunana vrednost  $R_B$  močno odvisna od parametra  $\beta_F$ , ki pa se pri diskretnih tranzistorjih spreminja za več deset odstotkov in je odvisen tudi od temperature. Zato se pojavijo odstopanja od načrtovane delovne točke. Recimo, da načrtujemo elemente za tranzistor z  $\beta_F$ , dejanska vrednost parametra pa je enaka  $\beta'_F = \beta_F + \Delta$ . Tok  $I_B$  ostane takšen, kot smo ga načrtovali, saj je določen z napajalno napetostjo in uporom  $R_B$  kot

$$I_B = \frac{U_{CC} - U_K}{R_B}. \quad (6.10)$$

Se pa pojavi odstopanje dejanskega kolektorskega toka  $I'_C$  od načrtovanega  $I_C$ . Če zanemarimo  $I_{CEO}$ , imamo

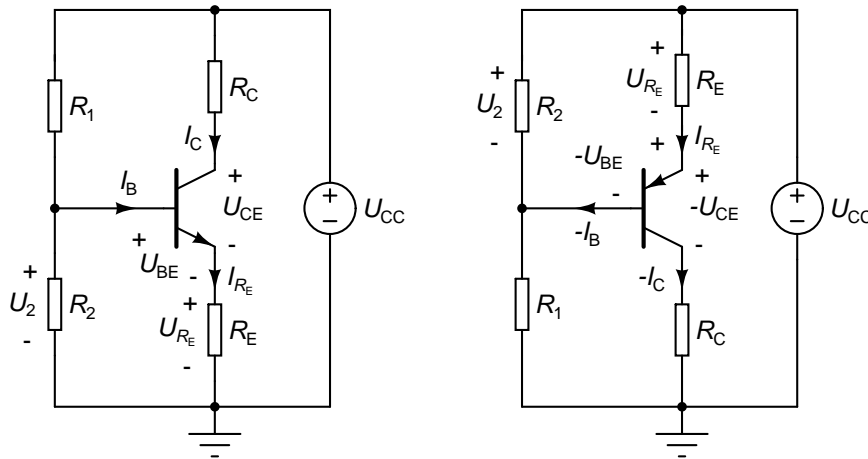
$$I'_C = \beta'_F I_B = (\beta_F + \Delta) I_B = \beta_F I_B \left(1 + \frac{\Delta}{\beta_F}\right) = I_C \left(1 + \frac{\Delta}{\beta_F}\right). \quad (6.11)$$

Vrednost  $U'_{CE}$  se razlikuje od načrtovane vrednosti  $U_{CE}$ .

$$U'_{CE} = U_{CC} - I'_C R_C = U_{CC} - I_C R_C - I_C R_C \frac{\Delta}{\beta_F} = U_{CE} - I_C R_C \frac{\Delta}{\beta_F}. \quad (6.12)$$

Vidimo, da je odstopanje od željene napetosti  $U_{CE}$  sorazmerno z načrtovanim padcem napetosti na uporu  $R_C$  in relativnim odstopanjem parametra  $\beta_F$ .

**Za PNP tranzistor** (slika 6.4, desno) veljajo enake enačbe, le da moramo nadomestiti  $U_{CE}$  z  $-U_{CE}$  in  $I_C$  z  $-I_C$ , saj zanj v aktivnem področju velja  $U_{CE} < 0$  in  $I_C < 0$ .



Slika 6.5: Nastavljanje delovne točke bipolarnega tranzistorja brez odvisnosti od lastnosti tranzistorja za NPN tranzistor (levo) in PNP tranzistor (desno).

**Da se izognemo odvisnosti delovne točke od parametra  $\beta_F$** , uporabimo vezje na sliki 6.5. Spet bomo vse izpeljave naredili za NPN tranzistor (slika 6.5, levo). Predpostavili bomo, da za parameter  $\beta_F$  velja  $1/\beta_F \approx 0$  ( $\beta_F$  je zelo velik). Pri tem načinu vzpostavitve delovne točke najprej izberemo del napajalne napetosti, ki jo bomo žrtvovali za padec napetosti  $U_{R_E}$  na uporu  $R_E$  (približno 1V). Iz toka  $I_C$  v delovni točki določimo  $I_B$  in  $I_{R_E}$ .

$$I_B = \frac{1}{\beta_F} (I_C - I_{CEO}) \approx \frac{1}{\beta_F} I_C, \quad (6.13)$$

$$I_{R_E} = I_B + I_C = \frac{1}{\beta_F} (I_C - I_{CEO}) + I_C \approx I_C. \quad (6.14)$$

S pomočjo Ohmovega zakona lahko sedaj določimo  $R_E$  kot

$$R_E = \frac{U_{R_E}}{I_{R_E}} \approx \frac{U_{R_E}}{I_C}. \quad (6.15)$$

Podobno lahko določimo tudi  $R_C$ , saj je padec napetosti na tem uporu enak  $U_{CC} - U_{R_E} - U_{CE}$ .

$$R_C = \frac{U_{CC} - U_{R_E} - U_{CE}}{I_C}. \quad (6.16)$$

Da določimo upora  $R_1$  in  $R_2$ , ki tvorita delilnik napetosti, najprej določimo napetost  $U_2$  na uporu  $R_2$ , ki je enaka vsoti napetosti  $U_{BE} = U_K$  in padcu napetosti na uporu  $R_E$ . S tem je že določeno razmerje uporov

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_2}{U_{CC}} = \frac{U_K + U_{R_E}}{U_{CC}}. \quad (6.17)$$

Spomnimo se še, da tok  $I_B$  ne sme preveč obremenjevati napetostnega delilnika, ki ga tvorita  $R_1$  in  $R_2$ . Enačba (1.26) nam pove, da je relativna napaka napetosti  $U_2$  enaka razmerju med tokom s katerim je obremenjen delilnik ( $I_B$ ) in tokom neobremenjenega delilnika ( $U_{CC}/(R_1 + R_2)$ ). Tako naprimer, če želimo napako manjšo od 5% ( $e = 0,05$ ), moramo poskrbeti, da bo tok neobremenjenega delilnika vsaj  $1/e = 20$  krat večji od toka  $I_B$ . Ta pogoj nam da enačbo

$$\frac{I_B}{e} \leq \frac{U_{CC}}{R_1 + R_2}, \quad (6.18)$$

od koder lahko izrazimo

$$R_1 + R_2 \leq e \frac{U_{CC}}{I_B} = e\beta_F \frac{U_{CC}}{I_C}. \quad (6.19)$$

Na osnovi enačbe (6.19) in dovoljene napake  $e$  obremenjenega delilnika napetosti izberemo  $R_1 + R_2$ , nakar s pomočjo enačbe (6.17) določimo še vrednosti  $R_1$  in  $R_2$ . Delovna točka vezja na sliki 6.5 je le malo odvisna od parametra  $\beta_F$ , zaradi upora  $R_E$ . V primeru, da se  $\beta_F$  poveča, se poveča tudi kolektorski tok  $I_C$  in posledično tudi emitorski tok  $I_E$ , ki teče skozi upor  $R_E$ . Zaradi tega se padec napetosti na uporu  $R_E$  poveča, kar ima za posledico zmanjšanje napetosti  $U_{BE}$ . Manjša napetost  $U_{BE}$  pa povzroči manjši kolektorski tok in s tem kompenzira povečanje  $\beta_F$ . Vrednost toka  $I_C$  za dane vrednosti elementov vezja lahko določimo s pomočjo enačbe

$$I_B = \frac{1}{\beta_F + 1}(I_{R_E} - I_{CEO}) = \frac{1}{\beta_F + 1} \left( \frac{U_2 - U_K}{R_E} - I_{CEO} \right). \quad (6.20)$$

Če smiselno uporabimo enačbo obremenjenega napetostnega delilnika (1.25), lahko pišemo

$$U_2 = U_{CC} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( 1 - \frac{R_1 I_B}{U_{CC}} \right). \quad (6.21)$$

Vstavimo (6.21) v (6.20) in izrazimo  $I_B$ .

$$I_B = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{CC} - U_K - R_E I_{CEO}}{(\beta_F + 1) R_E + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \quad (6.22)$$

Vidimo, da je  $I_B$  v precejšnji meri odvisen od  $\beta_F$ . To pa ne velja za  $I_C$ .

$$I_C = \beta_F I_B + I_{CEO} = \beta_F \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{CC} - U_K}{(\beta_F + 1) R_E + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} + \frac{R_E + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{(\beta_F + 1) R_E + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} I_{CEO}. \quad (6.23)$$

Ko  $\beta_F$  raste, postaja  $I_C$  čedalje bolj neodvisen od  $\beta_F$  in se približuje vrednosti

$$\lim_{\beta_F \rightarrow \infty} I_C = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2} U_{CC} - U_K}{R_E}. \quad (6.24)$$

**Primer 6.2:** Za tranzistor z  $\beta_F = 200$ ,  $I_{CEO} = 5\mu\text{A}$  in napajalno napetost  $U_{CC} = 10\text{V}$  določimo upore  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_C$  in  $R_E$ , da bo tranzistor v delovni točki  $U_{CE} = 5\text{V}$  in  $I_C = 1\text{mA}$ . Napaka ( $e$ ) zaradi obremenitve napetostnega delilnika z  $I_B$  naj ne preseže 5%. Padec napetosti na uporu  $R_E$  naj bo 1V.

Najprej s pomočjo enačb (6.15) in (6.16) dobimo  $R_E = 1\text{k}\Omega$  in  $R_C = 4\text{k}\Omega$ . Nato z neenačbo (6.19) dobimo

$$R_1 + R_2 \leq 100\text{k}\Omega. \quad (6.25)$$

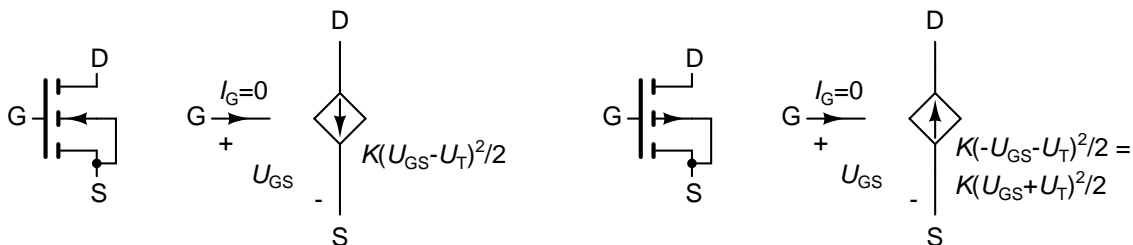
Izberimo največjo dovoljeno vrednost za  $R_1 + R_2$ , ki znaša  $100\text{k}\Omega$ . Delilno razmerje  $R_2/(R_1 + R_2)$  dobimo s pomočjo enačbe (6.17) in znaša  $(0,7 + 1)/10 = 0,17$ . Odtod sledi, da mora biti  $R_1 = 83\text{k}\Omega$  in  $R_2 = 17\text{k}\Omega$ .

Preverimo še rezultat s pomočjo enačbe (6.23), ki nam da točno vrednost kolektorskega toka (seveda v okviru poenostavitve, ki so nas pripeljale do modela tranzistorja (6.5)-(6.6)). Dobimo  $I_C = 0,93\text{mA}$ , kar se dokaj dobro ujema z načrtovano delovno točko glede na to, da smo v enačbah (6.13) in (6.19) naredili kar nekaj poenostavitve. Če bi uporabili tranzistor z zelo velikim  $\beta_F$ , bi za kolektorski tok veljala enačba (6.24). V tem primeru bi kolektorski tok znašal  $1\text{mA}$ .  $\triangle$

**Za PNP tranzistor** (slika 6.5, desno) veljajo enake enačbe, le da moramo nadomestiti  $U_{CE}$  z  $-U_{CE}$  in  $I_C$  z  $-I_C$ .

## 6.4 MOSFET z induciranim kanalom

MOS tranzistor je element s štirimi priključki, ki pa ga s povezavo izvora in substrata pretvorimo v trolepnega s čimer postane napetost  $U_{BS}$  enaka 0V. Taka vezava je tudi običajna pri diskretnih MOS tranzistorjih. Enačbi (4.57) in (4.56) podajata model tranzistorja z induciranim kanalom tipa n za področje nasičenja.



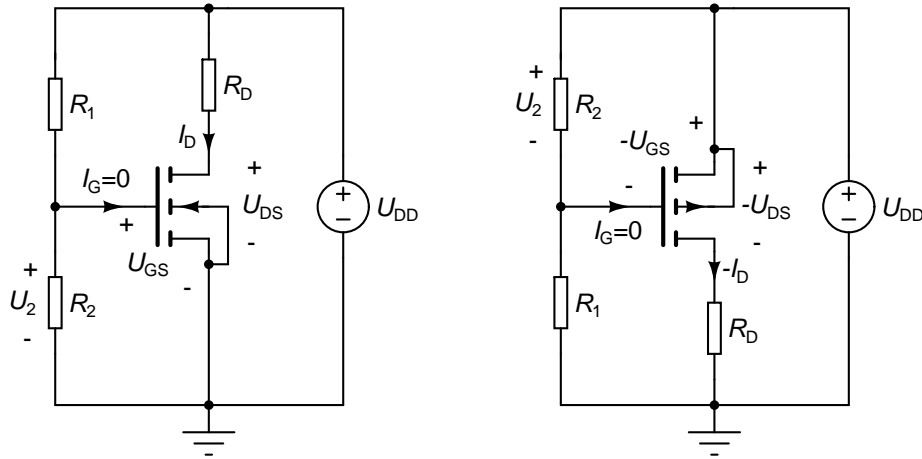
Slika 6.6: Poenostavljen model MOS tranzistorja z induciranim kanalom tipa n (levo) in tipa p (desno) v področju nasičenja, ki ga uporabimo za izračun delovne točke.

Za namene izračuna delovne točke bomo zanemarili odvisnost toka ponora ( $I_D$ ) od napetosti  $U_{DS}$ . To pomeni, da bomo predpostavili  $\lambda = 0$ . S tem se enačbi (4.57) in (4.56) poenostavita v

$$I_G = 0, \quad (6.26)$$

$$I_D = \frac{K}{2} (U_{GS} - U_T)^2, \quad (6.27)$$

pri čemer sta  $K$  in  $U_T$  konstanti. Slika 6.6 prikazuje poenostavljen model MOS tranzistorja, ki ga uporabljamo za izračun delovne točke. Enačbi za MOS tranzistor z induciranim kanalom tipa p sta enaki kot (6.26) in (6.27), le



Slika 6.7: Nastavljanje delovne točke MOS tranzistorja z induciranim kanalom tipa n (levo) in tipa p (desno).

da pred veličine  $U_{GS}$ ,  $U_{DS}$ ,  $I_G$  in  $I_D$  postavimo negativen predznak. Delovno točko MOS tranzistorja podamo s parom  $U_{DS}$ ,  $I_D$ . Preostali dve veličini  $U_{GS}$ ,  $I_D$  lahko izračunamo s pomočjo enačb (6.26) in (6.27).

Slika 6.7 prikazuje nastavljanje delovne točke MOS tranzistorja z induciranim kanalom. Poleg delovne točke poznamo še napajalno napetost  $U_{DD}$ . Da bo tranzistor v željeni delovni točki, moramo določiti vrednosti uporov  $R_D$ ,  $R_1$  in  $R_2$ . Vse izpeljavo bomo naredili za tranzistor z induciranim kanalom tipa n (slika 6.7, levo). Ker je padeč napetosti na uporu  $R_D$  enak  $U_{DD} - U_{DS}$ , skozenj pa teče tok  $I_D$ , lahko določimo upornost  $R_D$  z enačbo

$$R_D = \frac{U_{DD} - U_{DS}}{I_D}. \quad (6.28)$$

Iz enačbe (6.27) lahko določimo napetost  $U_{GS}$ , pri kateri bo tekel tok  $I_D$ .

$$U_{GS} = U_T + \sqrt{\frac{2I_D}{K}}. \quad (6.29)$$

Ker je tok  $I_G$  enak 0, je napetostni delilnik, ki ga tvorita  $R_1$  in  $R_2$  neobremenjen. Vsoto uporov  $R_1 + R_2$  lahko zato poljubno izberemo glede na ostale željene lastnosti vezja (vhodna impedanca, tokovno ojačenje, ...) o katerih bomo povedali več pozneje. Izračunamo še  $R_1$  in  $R_2$  in smo končali.

$$R_1 = \left(1 - \frac{U_{GS}}{U_{DD}}\right) (R_1 + R_2), \quad (6.30)$$

$$R_2 = \frac{U_{GS}}{U_{DD}} (R_1 + R_2). \quad (6.31)$$

**Primer 6.3:** Vzemimo, da imamo MOS tranzistor s parametroma  $K = 2\text{mA}/\text{V}^2$  in  $U_T = 2\text{V}$ . Nastaviti želimo delovno točko  $U_{DS} = 5\text{V}$ ,  $I_D = 1\text{mA}$  pri napajalni napetosti  $U_{DD} = 10\text{V}$ .

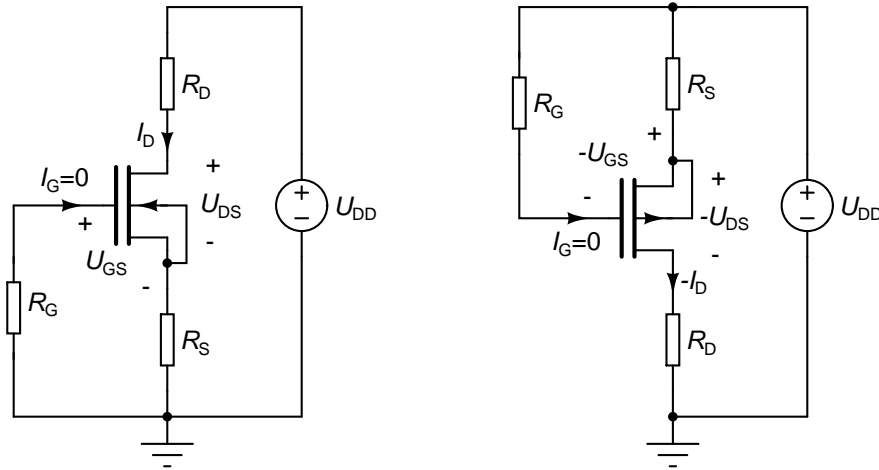
Z enačbo (6.28) določimo  $R_D = 5\text{k}\Omega$ . Nato z (6.29) izračunamo  $U_{GS} = 3\text{V}$ . Za  $R_1 + R_2$  izberemo  $100\text{k}\Omega$  in s pomočjo (6.30) in (6.31) določimo še  $R_1 = 70\text{k}\Omega$  in  $R_2 = 30\text{k}\Omega$ .  $\triangle$

Tako nastavljena delovna točka je odvisna od lastnosti tranzistorja  $K$  in  $U_T$ , ki pa se lahko precej spreminjata. Za bolj ponovljivo nastavljanje delovne točke se poslužujemo drugačnih vezij [15], ki pa presegajo okvire te knjige.

**Za MOS tranzistor z induciranim kanalom tipa p** (slika 6.7, desno) veljajo enake enačbe, le da moramo nadomestiti  $U_{DS}$  z  $-U_{DS}$  in  $I_D$  z  $-I_D$ , saj zanj v področju nasičenja velja  $U_{DS} < 0$  in  $I_D < 0$ .

## 6.5 MOSFET z vgrajenim kanalom in JFET

MOS tranzistor z vgrajenim kanalom se od tranzistorja z induciranim kanalom razlikuje v tem, da kanal prevaja že pri napetosti  $U_{GS} = 0V$ . Enačbe za področje nasičenja so enake, kot za tranzistor z induciranim kanalom, le da je parameter  $U_T$  negativen. Posledično je enak tudi poenostavljen model za izračun delovne točke (slika 6.6).



Slika 6.8: Nastavljanje delovne točke MOS tranzistorja z vgrajenim kanalom tipa n (levo) in tipa p (desno).

Vse izpeljave bomo naredili za tranzistor z vgrajenim kanalom tipa n. Za tak tranzistor moramo kanal delno zapreti, da pridemo do delovne točke  $U_{DS}$ ,  $I_D$ . To lahko dosežemo le z negativnimi vrednostmi napetosti  $U_{GS}$ , kar pomeni, da mora biti izvor (S) na višjem potencialu, kot vrata (G). Zato pribijemo potencial vrat na 0V z uporom  $R_G$ . Ker je tok v vrata tranzistorja  $I_G$  enak 0A, je izbira  $R_G$  praktično poljubna in jo narekujejo ostale lastnosti ojačevalnika (vhodna impedanca, tokovno ojačenje, ...). Padec napetosti na uporu  $R_S$ , ki ga povzroča tok  $I_D$ , povzroči, da je potencial izvora višji od 0V. Napetost  $U_{GS}$  je zato enaka

$$U_{GS} = -I_D R_S. \quad (6.32)$$

Iz enačbe (6.27), ki velja tudi za tranzistor z vgrajenim kanalom, dobimo

$$U_{GS} = U_T + \sqrt{\frac{2I_D}{K}}. \quad (6.33)$$

Napetost  $U_{GS}$  mora biti negativna. To je mogoče le, če velja  $I_D < KU_T^2/2$ , kjer je  $KU_T^2/2$  tok ponora, ki teče pri  $U_{GS} = 0V$ . Ko imamo napetost  $U_{GS}$  lahko določimo  $R_S$  s pomočjo enačbe (6.32) kot

$$R_S = -\frac{U_{GS}}{I_D}. \quad (6.34)$$

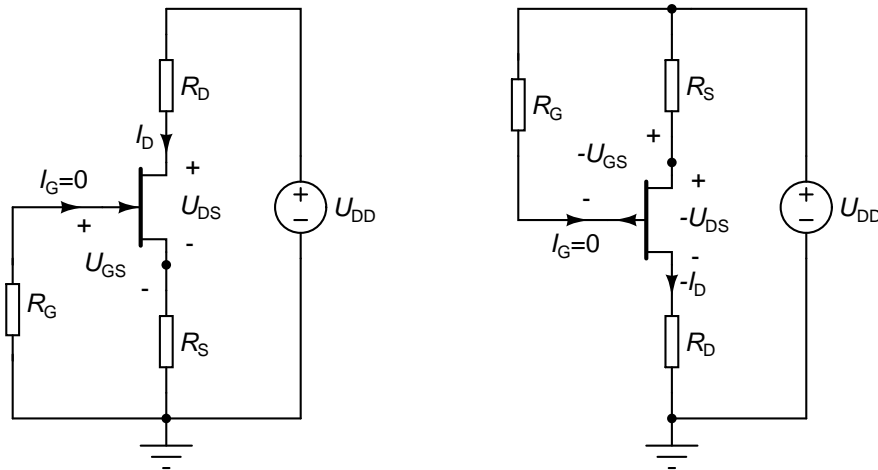
Ostane nam še, da določimo upornost  $R_D$ . Ker je na njej padec napetosti  $U_{DD} - U_{DS} - I_D R_S$ , skozi njo pa teče tok  $I_D$ , nam Ohmov zakon skupaj z (6.32) da

$$R_D = \frac{U_{DD} - U_{DS} + U_{GS}}{I_D}. \quad (6.35)$$

**Primer 6.4:** Za MOS tranzistor v vgrajenim kanalom tipa n, ki je podan s parametroma  $K = 2\text{mA/V}^2$  in  $U_T = -3V$ , določimo elemente vezja na sliki 6.8 (levo), da bo njegova delovna točka  $U_{DS} = 5V$  in  $I_D = 1\text{mA}$ . Napajalna napetost  $U_{DD}$  je enaka 10V.

Ker ni nobenih posebnih zahtev, lahko izberemo dokaj velik  $R_G = 1\text{M}\Omega$ . Iz (6.33) izračunamo  $U_{GS} = -2\text{V}$ . Največji tok  $I_D$ , ki ga lahko nastavimo z vezjem na sliki 6.8 (levo), je enak  $KU_T^2/2 = 4,5\text{mA}$ . Sedaj lahko določimo  $R_S$  in  $R_D$  s pomočjo (6.34) in (6.35). Dobimo  $R_S = 2\text{k}\Omega$  in  $R_D = 3\text{k}\Omega$ .  $\triangle$

**Za MOS tranzistor z vgrajenim kanalom tipa p** (slika 6.8, desno) veljajo enake enačbe, le da moramo nadomestiti  $U_{DS}$  z  $-U_{DS}$  in  $I_D$  z  $-I_D$ , saj zanj v področju nasičenja velja  $U_{DS} < 0$  in  $I_D < 0$ .



Slika 6.9: Nastavljanje delovne točke spojnega FET tranzistorja s kanalom tipa n (levo) in tipa p (desno).

**Enačbe spojnega FET tranzistorja (JFET-a)** so enake, kot enačbe MOS tranzistorja z vgrajenim kanalom, le da v njih namesto  $U_T < 0$  nastopa  $U_P < 0$ , namesto  $K/2$  pa  $I_{DSS}/U_P^2$ . Tudi vezje za nastavljanje delovne točke je enako, kot na sliki 6.8, le da namesto MOS tranzistorja z vgrajenim kanalom v vezju nastopa JFET tranzistor. Vezji za tranzistor s kanalom tipa n in tipa p sta prikazani na sliki 6.9. Vse, kar smo povedali za nastavljanje delovne točke MOS tranzistorja z vgrajenim kanalom, velja tudi za JFET tranzistor, le da moramo v enačbah zamenjati  $U_T$  z  $U_P$  in  $K/2$  z  $I_{DSS}/U_P^2$ .





# 7

## Od velikih k majhnim signalom

V tem poglavju bomo pokazali kako pridemo od takoimenovanega **velikosignalnega modela vezja** do modela vezja za majhne signale. Velikosignalni model je v splošnem nelinearen in daje pravilne rezultate tudi, ko so signali relativno veliki. Na žalost smo zaradi njegove nelinearnosti močno omejeni z naborom matematičnih orodij, ki jih lahko uporabimo pri analizi vezja.

**Model vezja za majhne signale** daje pravilne rezultate le za majhne amplitude signalov v okviru katerih se nelinearni elementi obnašajo kot dober približek linearnih. Signali v takem modelu predstavljajo odstopanja od delovne točke. Model je linearen, kar nam omogoča, da uporabimo številna matematična orodja za analizo linearnih sistemov. Čeprav velja le za majhne signale, pa nam kljub temu daje enostaven vpogled v mnoge lastnosti vezja. Po tem poglavju se bomo ukvarjali skoraj izključno samo še z modeli vezij za majhne signale.

Odziv linearnega vezja na majhno izmenično vzbujanje je v splošnem sestavljen iz delovne točke, izmeničnega odziva in **prehodnega pojava**. Slednjega bomo v večini poglavij, ki sledijo, izpustili iz obravnave. Če je delovna točka vezja stabilna, prehodni pojav s časom izzveni. Tako po dovolj dolgem času ostaneta samo še delovna točka in izmenični odziv. V ojačevalnikih in filtrih je prehodni pojav nezaželen, zato za ta vezja izbiramo stabilne delovne točke. Po drugi strani pa so **oscilatorji** vezja, kjer prehodni pojav predstavlja koristen del odziva. V tem primeru namerno izberemo nestabilno delovno točko. Oscilatorjev ponavadi ne vzbujamo, saj prehodni pojav lahko sproži že šum, ki je zmeraj prisoten v realnih vezjih.

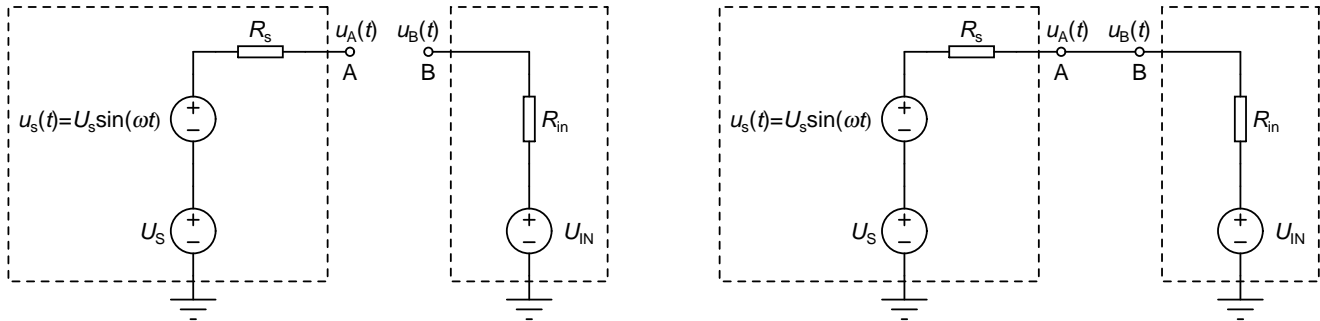
### 7.1 Vezni in premostitveni kondenzatorji

Recimo, da imamo signalni vir z izhodom A in ojačevalnik z vhodom B (slika 7.1, levo). Kadar sta točki A in B nepovezani, točka A niha z amplitudo  $U_s$  okoli napetosti  $U_S$ , točka B pa je na konstantnem potencialu  $U_{IN}$ . Napetosti  $U_S$  in  $U_{IN}$  predstavljata delovni točki signalnega vira in vhoda ojačevalnika.

Da pripeljemo signal iz vira v ojačevalnik, se nam sama po sebi ponuja možnost, da točki A in B enostavno povežemo (slika 7.1, desno). Tak pristop pokvari tako delovno točko signalnega vira, kot tudi delovno točko vhoda ojačevalnika. Zaradi spremenjene delovne točke se lahko celo zgodi, da signalni vir in ojačevalnik prenehata delovati.

Za kratko sklenjeni točki A in B velja

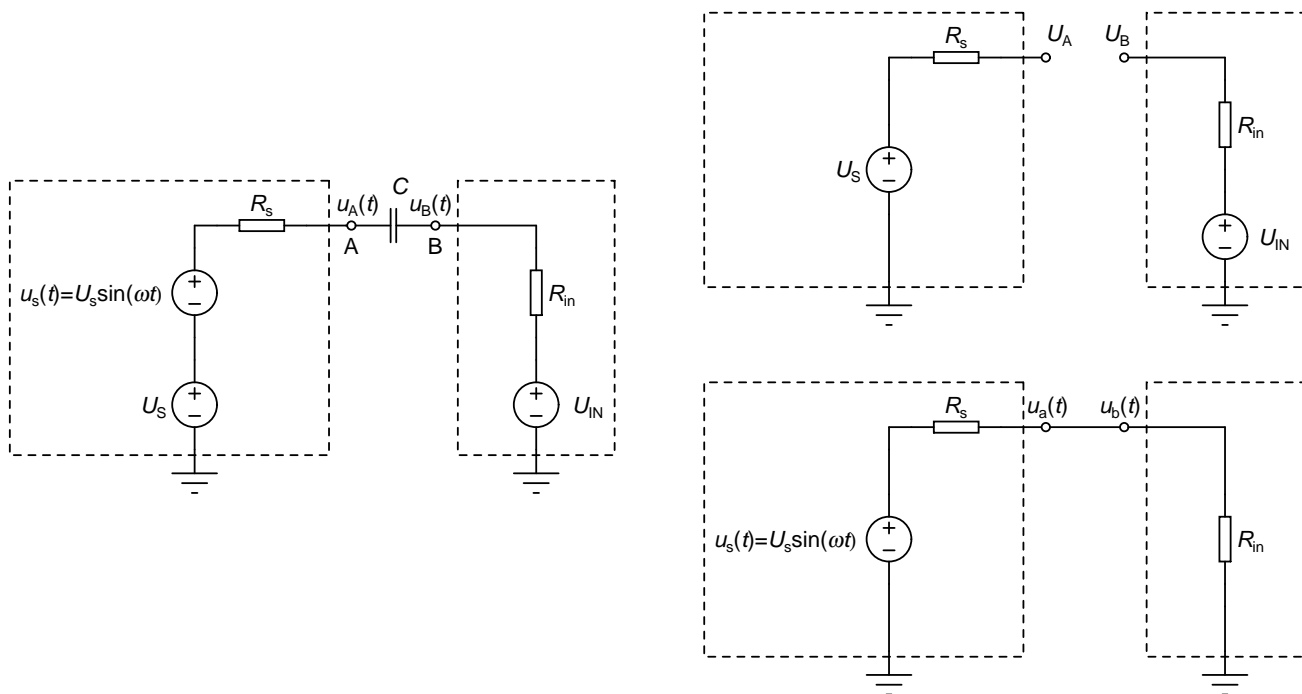
$$\begin{aligned} u_A(t) = u_B(t) &= \frac{R_{in}}{R_{in} + R_s} (U_S + U_s \sin(\omega t)) + \frac{R_s}{R_{in} + R_s} U_{IN} \\ &= \frac{R_{in} U_S + R_s U_{IN}}{R_{in} + R_s} + \frac{R_{in}}{R_{in} + R_s} U_s \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (7.1)$$



Slika 7.1: Signalni vir in vhod ojačevalnika (levo). Enosmerna sklopitev signalnega vira in vhoda ojačevalnika brez prilagoditve napetostnih nivojev (desno).

Vidimo, da delovni točki ojačevalnika in signalnega vira po povezavi postaneta enaki

$$U_A = U_B = \frac{R_{in}U_S + R_sU_{IN}}{R_{in} + R_s}. \quad (7.2)$$



Slika 7.2: Kapacitivni sklop signalnega vira in vhoda ojačevalnika (levo). Analiza vezja za enosmerne razmere (desno zgoraj) in izmenične razmere (desno spodaj).

Predpostavimo, da je kapacitivnost  $C$  dovolj velika, da kondenzator predstavlja kratak stik za izmenične signale.

Če nam zadošča, da do vhoda ojačevalnika pridejo samo izmenični signali, lahko uporabimo kapacitivni sklop (slika 7.2, levo). Tokrat točki A in B povežemo s kondenzatorjem  $C$ . Če je kapacitivnost  $C$  dovolj velika, je njena impedanca pri frekvenci  $\omega = 2\pi f$  majhna v primerjavi z  $R_s$  in  $R_{in}$ .

**Primer 7.1:** Vzemimo kondenzator s kapacitivnostjo  $C = 100\mu\text{F}$  pri frekvenci  $f = 100\text{Hz}$ . Impedanca kondenzatorja znaša  $Z = (j\omega C)^{-1} = -j(2\pi f C)^{-1} = -15j\Omega$ . Če sta  $R_s$  in  $R_{in}$  reda velikosti nekaj  $\text{k}\Omega$ , je impedanca praktično zanemarljiva za signale s frekvencami 100Hz in več.  $\triangle$

Pri analizi vezja na sliki 7.2 (levo) si lahko pomagamo s superpozicijo. V prvem primeru (slika 7.2, desno zgoraj) obravnavamo enosmerne razmere v vezju. V tem primeru se kondenzator obnaša kot odprte sponke. V vezju nadomestimo vir izmeničnega signala  $u_s(t)$  s kratkim stikom. Dobimo delovno točko leve ( $U_A$ ) in desne ( $U_B$ ) strani kondenzatorja  $C$ .

$$U_A = U_S, \quad (7.3)$$

$$U_B = U_{IN}. \quad (7.4)$$

V drugem primeru nadomestimo oba enosmerna vira  $U_S$  in  $U_{IN}$  s kratkim stikom. Predpostavimo, da je kapacitivnost dovolj velika, da kondenzator za izmenične signale predstavlja kratek stik. Dobimo vezje na sliki 7.2 (desno spodaj). Iz vezja sledi

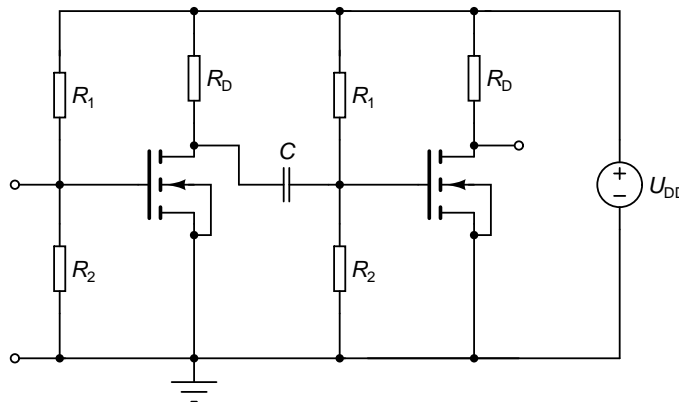
$$u_a(t) = u_b(t) = \frac{R_{in}}{R_{in} + R_s} U_s \sin(\omega t). \quad (7.5)$$

Da dobimo rešitev vezja, moramo sešteti prispevka (7.3)-(7.4) s prispevkom izmeničnega signala (7.5).

$$u_A = U_A + u_a(t) = U_S + \frac{R_{in}}{R_{in} + R_s} U_s \sin(\omega t), \quad (7.6)$$

$$u_B = U_B + u_b(t) = U_{IN} + \frac{R_{in}}{R_{in} + R_s} U_s \sin(\omega t). \quad (7.7)$$

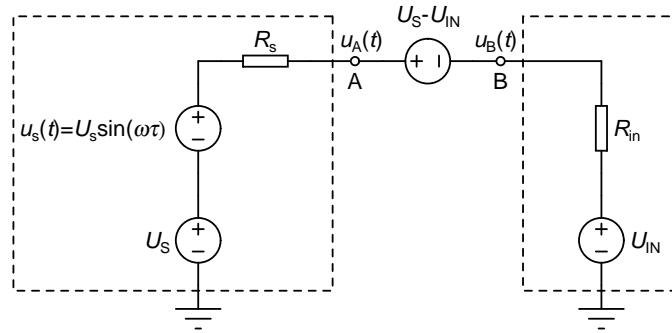
Dobljena časovna poteka veljata, če je napetost na kondenzatorju  $C$  ob času  $t = 0$  enaka  $U_A - U_B = U_S - U_{IN}$  (kondenzatorj je nabit, kakor mu to določa delovna točka vezja). V nasprotnem primeru imamo še prehodni pojav, ki pri stabilnih vezjih po dovolj dolgem času zamre, dobljena časovna poteka pa šele tedaj postaneta veljavna.



Slika 7.3: Primer kapacitivnega sklopa med dvema enakima ojačevalnima stopnjama.

Vidimo, da pri kapacitivnem sklopu delovni točki signalnega vira in vhoda ojačevalnika ostaneta nespremenjeni. Kondenzatorju, ki nastopa kot sklopitveni element med stopnjama pravimo tudi **vezni kondenzator**, njegovi kapacitivnosti pa **vezna kapacitivnost**. Primer kapacitivnega sklopa med dvema enakima ojačevalnima stopnjama prikazuje slika 7.3.

Včasih pa potrebujemo enosmerni sklop med stopnjami. V tem primeru imamo dve možnosti. Stopnji lahko povežemo s pomočjo napetostnega vira, katerega vrednost je enaka razliki med delovnimi točkama vira signala in vhoda ojačevalne stopnje. Taki rešitvi pravimo **prilagoditev napetostnih nivojev** in je prikazana na sliki 7.4. Seveda v dejanskih vezjih ne uporabimo napetostnega vira, temveč dvopolno vezje, ki se obnaša kot (dober) približek napetostnega vira za tokove, ki niso preveliki. Zelo preprosto rešitev za prilagoditev napetostnih nivojev predstavlja zaporno polarizirana Zenerjeva dioda, ki jo lahko obravnavamo kot napetostni vir z napetostjo  $U_Z$ .



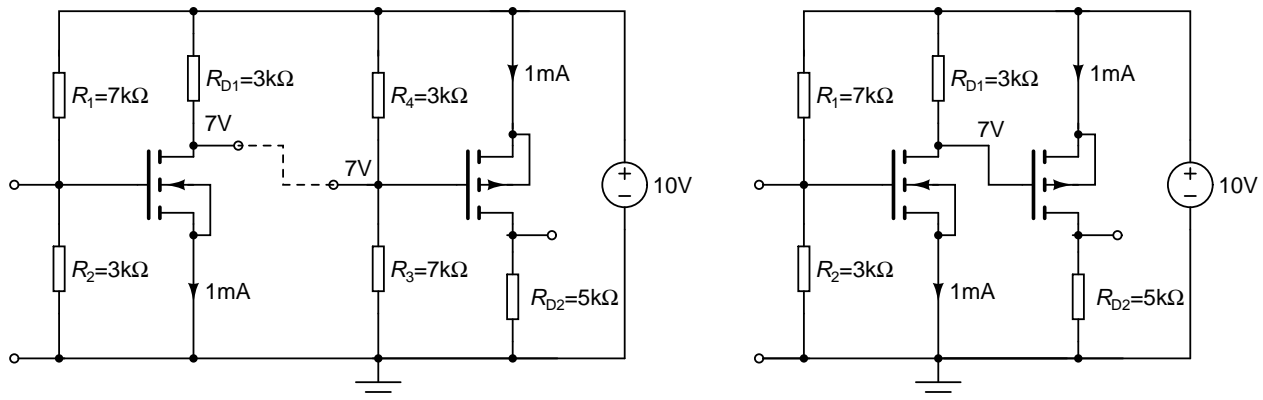
Slika 7.4: Enosmerni sklop s prilagoditvijo napetostnih nivojev.

Nekoliko slabšo rešitev dobimo z uporabo  $n$  zaporedno vezanih prevodno polariziranih diod, ki predstavljajo napetostni vir z napetostjo  $nU_K \approx n \cdot 0,7V$ . Potenciala točk A in B na sliki 7.4 sta enaka

$$u_A = U_S + \frac{R_{in}}{R_{in} + R_s} U_s \sin(\omega t), \quad (7.8)$$

$$u_B = U_{IN} + \frac{R_{in}}{R_{in} + R_s} U_s \sin(\omega t). \quad (7.9)$$

V podrobnosti izvedbe prilagoditve napetostnih nivojev (napetostnega vira) se ne bomo spuščali, ker to presega okvire te knjige.

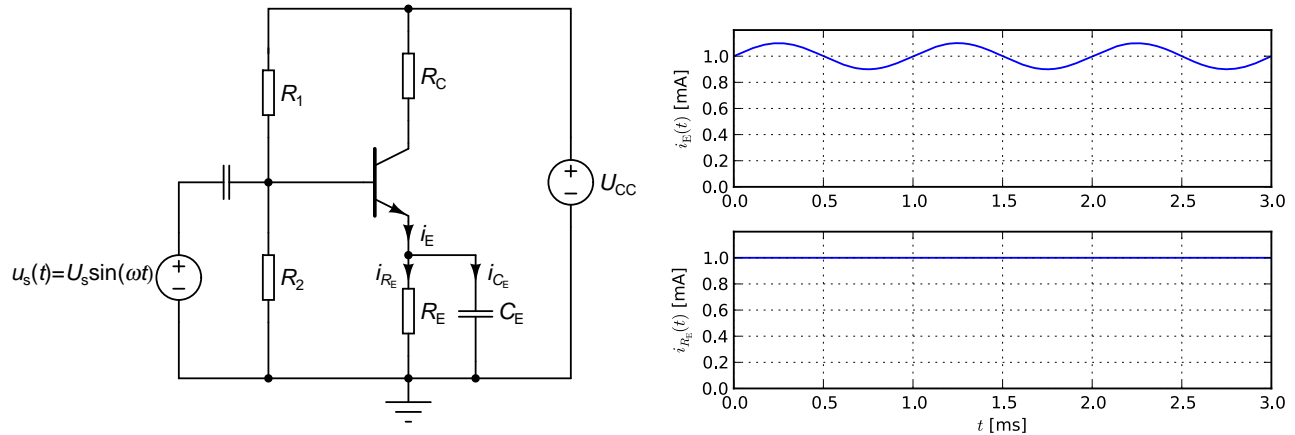


Slika 7.5: Enosmeren sklop med stopnjama kjer ima izhod prve stopnje enako delovno točko, kot vhod druge stopnje (levo). Po sklopitvi stopenj postaneta upora  $R_3$  in  $R_4$  nepotrebna, saj delovno točko vhoda druge ojačevalne stopnje določa delovna točka izhoda prve ojačevalne stopnje.

Druga možnost za izvedbo enosmernega sklopa je, da delovni točki signalnega vira in vhoda ojačevalne stopnje načrtujemo tako, da sta enaki. Primer takega sklopa med dvema ojačevalnima stopnjama je prikazan na sliki 7.5.

Na levi strani slike 7.5 sta ojačevalni stopnji še nepovezani. Črtkana črta nakazuje kje bo potekal sklop med stopnjama. Oba tranzistorja imata pragovno napetost  $U_T = 2V$  in faktor  $K = 2mA/V^2$ . Za izbrane vrednosti uporov je tok ponorov obeh tranzistorjev enak  $1mA$ . Delovna točka (potencial) izhoda prve ojačevalne stopnje je enak  $7V$ , kar je tudi potencial vhoda druge ojačevalne stopnje.

Ker ni razlike v potencialih delovne točke, lahko izhod prve in vhod druge stopnje povežemo brez dodatnih elementov. Dobimo vezje na sliki 7.5 (desno). V tem vezju sta upora  $R_3$  in  $R_4$  izpuščena, ker nista več potrebna. Delovno točko vhoda druge stopnje sedaj določa kar delovna točka izhoda prve ojačevalne stopnje.



Slika 7.6: Premostitveni kondenzator  $C_E$  v ojačevalniku (levo) ter emiterski tok  $i_E$  in tok skozi upor  $i_{R_E}$  pri velikih vrednostih  $C_E$  (desno).

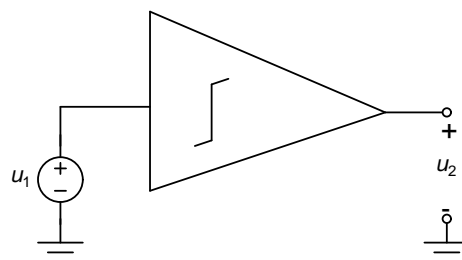
Včasih si želimo, da bi skozi upor tekla le enosmeren tok, tudi ko okoliščine vsiljujejo spremenljiv tok. Takrat vzporedno z uporom vežemo **premostitveni kondenzator** z dovolj veliko **premostitveno kapacitivnostjo**. Ta zaradi svoje majhne impedance odvede izmeničen tok mimo upora. Skozi upor tako teče le enosmeren tok, ki povzroča na njem konstanten padec napetosti. Za izmenične signale se tak kondenzator (če je njegova kapacitivnost dovolj velika) obnaša kot kratak stik.

Primer vezja s premostitvenim kondenzatorjem je na sliki 7.6 (levo). Kondenzator  $C_E$  odvede ves izmeničen tok, ki priteče iz emitorja tranzistorja, mimo upora  $R_E$ . Skozi upor  $R_E$  tako teče samo še enosmeren tok (slika 7.6, desno), ki povzroča enosmeren padec napetosti in s tem drži emitor tranzistorja na konstantnem potencialu.

Brez premostitvenega kondenzatorja bi ob izmeničnem vzbujanju  $u_s(t)$  v vezju na sliki 7.6 povečanje kolektorskega toka vodilo do povečanja emiterskega toka, ki bi povzročil povečanje padca napetosti na uporu  $R_E$ . Ker je tranzistor krmiljen z napetostjo med bazo in emitorjem, bi se ta zaradi povečanja padca napetosti na  $R_E$  zmanjšala, kar bi vodilo do zmanjšanja kolektorskega toka. Učinku pravimo negativna povratna vezava in ga bomo obravnavali v poglavju 11. Posledica negativne povratne vezave je med drugim tudi zmanjšanje ojačenja.  $C_E$  prepreči negativno povratno vezavo, saj ves izmeničen tok pelje mimo  $R_E$ , tako da ta ne povzroči izmeničnega padca napetosti na  $R_E$ .

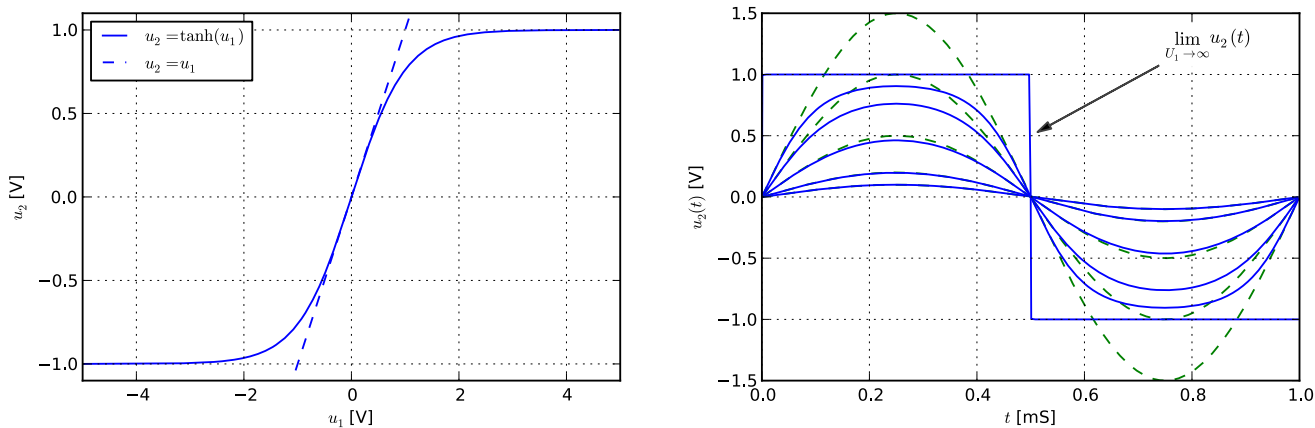
## 7.2 Popačenja

Kadar je izhodni signal  $u_2$  ojačevalnika (slika 7.7) odvisen samo od trenutne vrednosti vhodnega signala  $u_1$ , lahko ojačevalnik opišemo kar z njegovo prenosno karakteristiko  $u_2(u_1)$ .



Slika 7.7: Nelinearen ojačevalnik z vhodnim in izhodnim signalom.

Za idealen linearen ojačevalnik je prenosna karakteristika linearna oblike  $u_2 = Au_1$  (slika 7.8, levo, črtkana črta).  $A$  je faktor ojačenja. Če je vhodni signal v tak ojačevalnik izmeničen ( $U_1 \sin(\omega t)$ ), je izhodni signal prav tako izmeničen (oblike  $U_2 \sin(\omega t)$ ), le da ima spremenjeno amplitudo  $U_2 = AU_1$ . Tudi za poljubno velike amplitude vhodnega sinusnega signala ostaja oblika izhodnega signala sinusna.



Slika 7.8: Odvisnost izhoda od vhoda za nelinearen ojačevalnik z liho prenosno funkcijo (levo, polna črta). Izhodni signali, ki jih dobimo za sinusne vhodne signale amplitud 0,1V, 0,2V, 0,5V, 1V in 1,5V ter frekvence  $f_1 = 1\text{kHz}$  (desno). Črtkane črte predstavljajo vhodne signale. Za velike amplitude vhodnega signala je izhodni signal pravokoten.

Idealen linearen ojačevalnik je neizvedljiv v praksi že zato, ker je največja moč in s tem tudi amplituda izhodnega signala omejena z napajalno napetostjo. Prenosna karakteristika je zato bolj podobna tisti na sliki 7.8 (levo, polna črta), ojačevalnik pa je nelinearen.

Če tak ojačevalnik vzбудjamo s sinusnim vhodnim signalom, je izhodni signal še vedno periodičen z enako periodo, kot vhodni signal. Za majhne amplitude vhodnega signala je izhodni signal približno sinusen. Ko pa amplitudo vhodnega signala večamo, postaja izhodni signal čedalje manj podoben sinusnemu (slika 7.8, desno). Splošen periodičen signal  $y(t)$  s periodo  $T = 1/f_1$  lahko razvijemo v Fourierovo vrsto

$$y(t) = Y_0 + Y_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + Y_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots + Y_n \cos(n\omega t + \varphi_n) + \dots, \quad (7.10)$$

kjer je  $\omega = 2\pi f_1$ , koeficienti pa se izražajo kot

$$Y_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt, \quad (7.11)$$

$$Y_n e^{j\varphi_n} = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (n > 0). \quad (7.12)$$

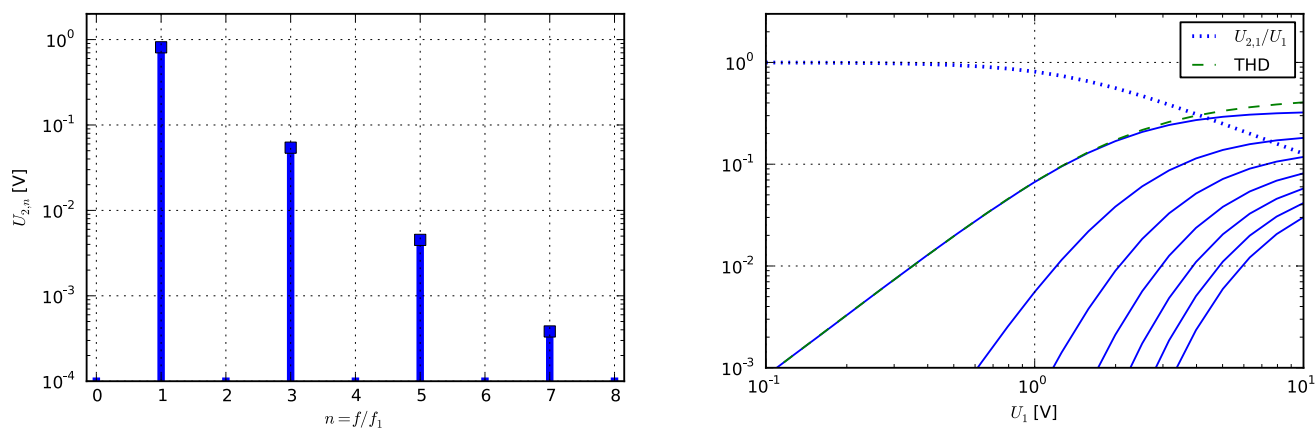
V vrsti (7.10) pripada prvi člen  $Y_0$  enosmerni komponenti signala. Drugi člen ( $Y_1$ ) se imenuje tudi **osnovna harmonska komponenta** saj niha z enako frekvenco, kot vhodni signal. Člen s koeficientom  $Y_2$  niha z dvakratno frekvenco vhodnega signala in se imenuje **druga harmonska komponenta**. Člen s koeficientom  $Y_n$  imenujemo  **$n$ -ta harmonska komponenta**. Člene od  $Y_2$  naprej imenujemo tudi **višjeharmonske komponente**. Koeficienti  $Y_i$  se imenujejo tudi **amplitudni spekter**, koeficienti  $\varphi_i$  pa **fazni spekter**.

Nelinearna prenosna karakteristika povzroči, da navkljub sinusnemu vhodnemu signalu dobimo na izhodu nesinusen signal. Pravimo tudi, da nelinearen ojačevalnik vnaša višjeharmonske komponente v izhodni signal. Te

komponente so v vezjih linearne elektronike večinoma nezaželene. Njihov delež v izhodnem signalu izražamo s koeficientom harmonskega popačenja (ang. Total Harmonic Distortion, THD), ki ga dobimo kot

$$\text{THD} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} Y_n^2}}{|Y_1|} \quad (7.13)$$

in ga včasih podajamo tudi v odstotkih. Sinusen signal frekvence  $f_1$  ima  $\text{THD} = 0$ .



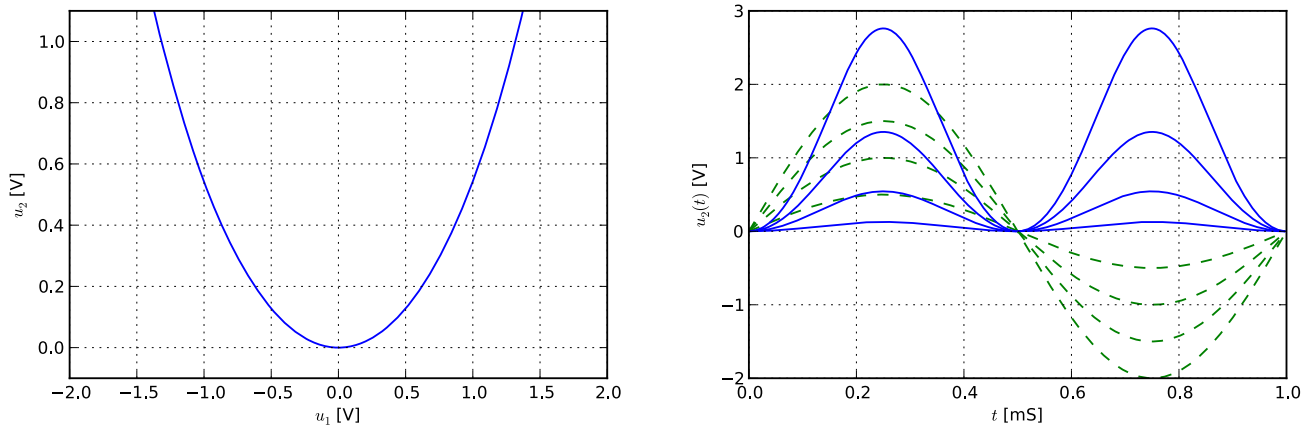
Slika 7.9: Amplitudni spekter izhodnega signala iz ojačevalnika z liho prenosno funkcijo na sliki 7.8 pri amplitudi vhodnega signala 1V (levo). Odvisnost normiranih lihih harmonskih komponent  $U_{2,3}/U_{2,1}$  (zgornja krivulja s polno črto),  $U_{2,5}/U_{2,1}$ , ...  $U_{2,15}/U_{2,1}$  (spodnja krivulja s polno črto) od amplitude vhodnega signala  $U_1$  (desno). Pikčasta črta prikazuje normirano prvo harmonsko komponento izhodnega signala  $U_{2,1}/U_1$ , črtkana črta pa koeficient harmonskega popačenja (THD).

Če je prenosna karakteristika liha funkcija ( $u_2(-u_1) = -u_2(u_1)$ ), se v izhodnem signalu poleg osnovne pojavijo še lihe višjeharmonske komponente ( $n = 3, 5, \dots$ ). Slika 7.9 (levo) prikazuje amplitudni spekter izhodnega signala za ojačevalnik z liho prenosno karakteristiko na sliki 7.8 (levo, polna črta) pri amplitudi vhodnega signala  $U_1 = 1\text{V}$ . Vidimo, da amplitude višjeharmonskih komponent  $U_{2,n}$  hitro upadajo z rastočim  $n$ .

Če večamo amplitudo vhodnega signala, se večajo tudi amplitude osnovne in višjeharmonskih komponent v izhodnem signalu. Slika 7.9 (desno) prikazuje odvisnost normirane amplitude lihih višjeharmonskih komponent izhodnega signala od amplitude vhodnega signala za ojačevalnik s prenosno karakteristiko na sliki 7.8 (levo, polna črta). Ko se amplituda vhodnega signala večja, postaja  $u_2(t)$  čedalje bolj podobne pravokotnemu signalu, normirane amplitude višjeharmonskih komponent pa se približujejo normiranim koeficientom Fourierove vrste za pravokoten signal ( $Y_n/Y_1 = 1/n$  za  $n = 2k + 1$  in  $Y_n/Y_1 = 0$  za  $n = 2k$ ).

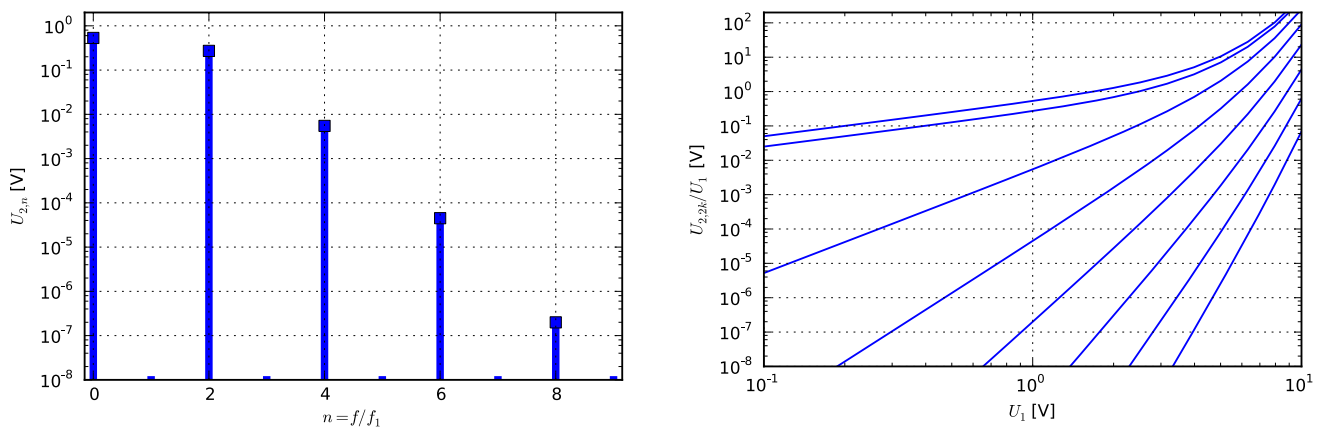
Črtkana črta na sliki 7.9 (desno) prikazuje odvisnost THD od amplitude vhodnega signala. Vidimo, da z naraščujočo amplitudo THD raste in se približuje vrednosti za pravokoten signal, ki znaša  $\sqrt{\pi^2/8 - 1} \approx 0,48$ . Vidimo tudi, da je THD skoraj enak normirani tretji harmonski komponenti. Slednje je razumljivo, saj so amplitude višjeharmonskih komponent za  $n > 3$  zanemarljive.

Pikčasta črta na sliki 7.9 (desno) prikazuje amplitudo osnovne harmonske komponente izhodnega signala normirano z amplitudo vhodnega sinusnega signala ( $U_{2,1}/U_1$ ). Ta kvocien lahko tolmačimo kot velikosignalno ojačenje nelinearnega ojačevalnika. Vidimo, da je za majhne amplitude le to enako strmini tangente na karakteristiko ojačevalnika pri  $u_1 = 0$ , ki v našem primeru znaša 1. Ko amplituda vhodnega signala narašča, postaja velikosignalno ojačenje čedalje manjše in se bliža vrednosti 0. Razlog tiči v dejstvu, da izhodni signal postaja čedalje bolj podoben pravokotnemu signalu z amplitudo 1V v katerem prva harmonska komponenta znaša  $4/\pi = 1,27\text{V}$ .



Slika 7.10: Odvisnost izhoda od vhoda za nelinearen ojačevalnik s sodo prenosno funkcijo  $\cosh(x) - 1$  (levo). Izhodni signali, ki jih dobimo za sinusne vhodne signale amplitude 0.5V, 1V, 1.5V in 2V ter frekvence  $f_1 = 1\text{kHz}$  (desno). Črtkane črte predstavljajo vhodne signale.

Za sode prenosne funkcije ( $u_2(-u_1) = u_2(u_1)$ ), kot na primer na sliki 7.10 (levo), vsebuje izhodni signal samo enosmerno komponento in sode višjiharmonske komponente. Osnovna harmonska komponenta v izhodnem signalu ni prisotna.



Slika 7.11: Harmonске komponente izhodnega signala iz ojačevalnika s sodo prenosno funkcijo na sliki 7.10 pri amplitudi vhodnega signala 1V (levo). Odvisnost normiranih sodih harmonskih komponent  $U_{2,0}/U_1$  (zgornja krivulja s polno črto),  $U_{2,2}/U_1, \dots$   $U_{2,14}/U_1$  (spodnja krivulja s polno črto) od amplitude vhodnega signala  $U_1$  (desno).

Zaradi odsotnosti osnovne harmonske komponente v izhodnem signalu je THD neskončen, velikosignalno ojačenje pa 0. Amplitudni spekter izhodnega signala pri sinusnem vhodnem signalu amplitude 1V za ojačevalnik s sodo prenosno karakteristiko na sliki 7.10 (levo) prikazuje slika 7.11 (levo). Odvisnost enosmerne komponente in amplitude sodih višjiharmonskih komponent od amplitude vhodnega sinusnega signala je prikazana na desni strani slike 7.11.

Splošno prenosno karakteristiko  $u_2 = f(u_1)$  lahko zapišemo kot vsoto lihe prenosne karakteristike

$$f_-(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (7.14)$$



in sode prenosne karakteristike

$$f_+(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}. \quad (7.15)$$

Spekter izhodnega signala nelinearnega ojačevalnika zato v splošnem vsebuje poleg osnovne harmonske komponente tudi enosmerno komponento ter sode in lihe višjeharmonske komponente.

Če je vhodni signal v nelinearni ojačevalnik sestavljen iz večih sinusnih signalov, kot naprimer

$$u_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t), \quad (7.16)$$

vsebuje izhodni signal poleg enosmerne komponente še

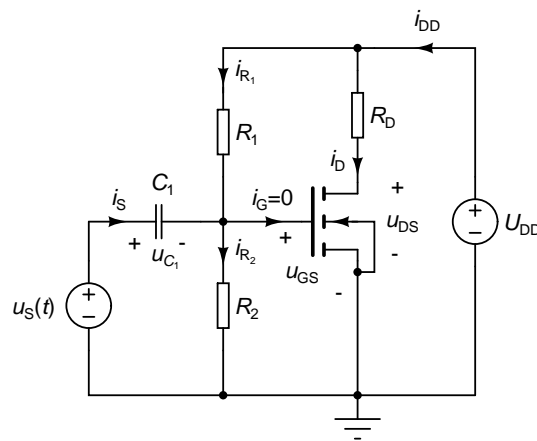
- harmonske komponente s frekvencami  $nf_1$ ,
- harmonske komponente s frekvencami  $nf_2$  in
- **intermodulacijske produkte** s frekvencami  $nf_1 \pm mf_2$ ,

kjer sta  $n$  in  $m$  poljubni celi števili. Intermodulacijski produkti so zaželeni v vezjih kot so naprimer mešalniki. Taka vezja presegajo okvire linearne elektronike saj njihove zaželene lastnosti izvirajo iz nelinearnosti vezja.

### 7.3 Velikosignalna analiza

Ker so realne izvedbe vezij linearne elektronike pravzaprav nelinearna vezja, je velikosignalna analiza teh vezij v večini primerov zahtevna. Ponavadi jo izvajamo s pomočjo simulatorjev vezij.

**Primer 7.2:** Primer vezja, za katerega lahko v omejenem območju vhodnih napetosti opravimo velikosignalno analizo, je podan na sliki 7.12. Predpostavimo, da je kapacitivnost dovolj velika, da kondenzator predstavlja kratek stik za izmenične signale.



Slika 7.12: Primer vezja za velikosignalno analizo.

Za tranzistor bomo predpostavili  $\lambda = 0$ . Napetostni vir  $u_S(t)$  daje vhodni signal v vezje. Zanimajo nas tokovi in napetosti v vezju. Najprej določimo napetost med vrati in izvorom  $U_{GS}$  ter tok ponora  $I_D$  v delovni točki. Pri

analizi delovne točke predstavlja kondenzator  $C_1$  odprte sponke in ostane nam vezje, kot smo ga obravnavali v poglavju 6.4. Dobimo

$$U_{GS} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{DD}, \quad (7.17)$$

$$I_D = \frac{K}{2} (U_{GS} - U_T)^2. \quad (7.18)$$

Ko poznamo delovno točko  $U_{GS}$  lahko s pomočjo znanja o kapacitivnem sklopu (poglavje 7.1) določimo časovni potek napetosti  $u_{GS}(t)$ .

$$u_{GS}(t) = U_{GS} + u_S(t). \quad (7.19)$$

Tok ponora znaša

$$i_D(t) = \frac{K}{2} (u_{GS}(t) - U_T)^2 = \frac{K}{2} (U_{GS} - U_T + u_S(t))^2 = I_D \left( 1 + \frac{u_S(t)}{U_{GS} - U_T} \right)^2. \quad (7.20)$$

Od tod lahko izračunamo še

$$u_{DS}(t) = U_{DD} - R_D i_D(t) = U_{DD} - R_D I_D \left( 1 + \frac{u_S(t)}{U_{GS} - U_T} \right)^2. \quad (7.21)$$

Če kot izhodno veličino iz vezja smatramo napetost  $u_{DS}(t)$ , lahko vezje obravnavamo kot ojačevalnik signala  $u_S(t)$ . Predpostavimo sinusen vhodni signal oblike

$$u_S(t) = U_s \sin(\omega t). \quad (7.22)$$

Če (7.22) vstavimo v (7.21), dobimo za časovni potek izhodne napetosti.

$$u_{DS}(t) = U_{DD} - R_D I_D (1 + \alpha \sin(\omega t))^2, \quad (7.23)$$

kjer je normirana amplituda vhodnega signala ( $\alpha$ ) definirana kot  $\alpha = U_s / (U_{GS} - U_T)$ . Preuredimo izraz (7.23) in dobimo

$$u_{DS}(t) = U_{DD} - R_D I_D - 2\alpha R_D I_D \sin(\omega t) - \alpha^2 R_D I_D \sin^2(\omega t). \quad (7.24)$$

Ker je  $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ , velja

$$u_{DS}(t) = U_{DD} - \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) R_D I_D - 2\alpha R_D I_D \sin(\omega t) + \frac{\alpha^2}{2} R_D I_D \cos(2\omega t). \quad (7.25)$$

Podobno lahko zapišemo tok ponora

$$i_D(t) = \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) I_D + 2\alpha I_D \sin(\omega t) - \frac{\alpha^2}{2} I_D \cos(2\omega t). \quad (7.26)$$

Vidimo, da izhodni signal  $u_{DS}(t)$  poleg enosmerne komponente vsebuje še prvo harmonsko komponento amplitude  $U_{ds,1}$  in drugo harmonsko komponento amplitude  $U_{ds,2}$ .

$$U_{ds,1} = -2\alpha R_D I_D, \quad (7.27)$$

$$U_{ds,2} = -\frac{\alpha^2}{2} R_D I_D. \quad (7.28)$$

Amplitude preostalih višjih harmonskih komponent so enake 0. Druga harmonska komponenta povzroči, da je izhodni signal popačen. Popačenje znaša

$$\text{THD} = \frac{|U_{\text{ds},2}|}{|U_{\text{ds},1}|} = \frac{\alpha}{4} = \frac{U_s}{4(U_{\text{GS}} - U_T)}. \quad (7.29)$$

Popačenje je sorazmerno z amplitudo vhodnega signala. **Za majhne amplitude vhodnega signala** postane popačenje poljubno majhno. V tem primeru lahko člene z  $\alpha^2$  v (7.23) zanemarimo in dobimo

$$u_{\text{DS}}(t) \approx U_{\text{DD}} - R_{\text{D}}I_{\text{D}} - 2\alpha R_{\text{D}}I_{\text{D}} \sin(\omega t) = U_{\text{DD}} - R_{\text{D}}I_{\text{D}} + U_{\text{ds},1} \sin(\omega t). \quad (7.30)$$

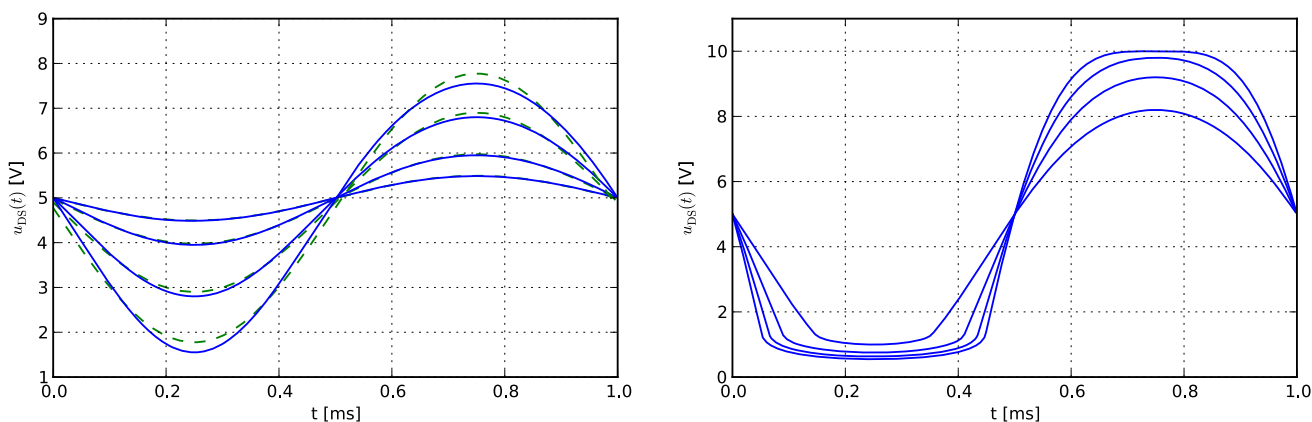
Kvocien med amplitudo majhnega izhodnega sinusnega signala in pripadajočo amplitudo vhodnega sinusnega signala je **napetostno ojačenje za majhne signale**. Pri tem upoštevamo tudi predznak koeficienta pred  $\sin(\omega t)$ , ki je negativen in pomeni, da je izhodni signal v protifazi z vhodnim signalom.

$$A_{\text{U}} = \frac{U_{\text{ds},1}}{U_s} = -\frac{2\alpha R_{\text{D}}I_{\text{D}}}{U_s} = -\frac{2R_{\text{D}}I_{\text{D}}}{U_{\text{GS}} - U_T}. \quad (7.31)$$

Poglejmo si še enosmerno komponento izhodne napetosti. Ta znaša

$$U_{\text{ds},0} = U_{\text{DD}} - \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) R_{\text{D}}I_{\text{D}} = U_{\text{DS}} - \frac{\alpha^2}{2} R_{\text{D}}I_{\text{D}}. \quad (7.32)$$

Vidimo, da se enosmerna komponenta izhodnega signala spreminja z amplitudo vhodnega signala. Vzrok tiči v dejstvu, da vsebuje prenosna karakteristika MOS tranzistorja kvadratno (sodo) komponento. Tako se v izhodnem signalu poleg delovne točke  $U_{\text{DS}} = U_{\text{DD}} - R_{\text{D}}I_{\text{D}}$  pojavi še dodatna enosmerna komponenta zaradi popačenj, ki je enaka  $-\frac{\alpha^2}{2} R_{\text{D}}I_{\text{D}}$ . Zaradi nje se delovna točka tranzistorja spremeni. Izhodni signal pri večjih amplitudah tako ne niha več okrog  $U_{\text{DS}}$ , ampak okrog  $U_{\text{ds},0}$ .



Slika 7.13: Izhodna napetost  $u_{\text{DS}}(t)$  iz vezja na sliki 7.12 pri amplitudah vhodnega signala ( $U_s$ ): 50mV, 100mV, 200mV in 300mV. Črtkana črta prikazuje časovni potek vsote enosmerne komponente in prve harmonske komponente izhodne napetosti (levo).

Potek  $u_{\text{DS}}(t)$  za vrednosti  $U_s$ : 400mV, 600mV, 800mV in 1000mV (desno).

$K = 2\text{mA}/\text{V}^2$ ,  $U_T = 3\text{V}$ ,  $R_1 = 70\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 30\text{k}\Omega$ ,  $R_{\text{D}} = 5\text{k}\Omega$  in  $U_{\text{DD}} = 10\text{V}$ .

Za primer izračunajmo napetostno ojačenje za majhne signale in popačenje izhodnega signala, če za tranzistor velja  $K = 2\text{mA}/\text{V}^2$  in  $U_T = 2\text{V}$ . Vrednosti uporov znašajo  $R_1 = 70\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 30\text{k}\Omega$  in  $R_{\text{D}} = 5\text{k}\Omega$ . Napajalna napetost je enaka  $U_{\text{DD}} = 10\text{V}$ .

Za delovno točko dobimo  $U_{GS} = 3V$  in  $I_D = 1mA$ . Napetostno ojačenje za majhne signale tako znaša  $A_U = -10$ . Pri amplitudi vhodnega signala  $U_S = 10mV$  znaša popačenje  $THD = 0,0025 = 0,25\%$ . Če amplituda naraste na  $U_S = 300mV$ , je popačenje enako  $THD = 7,5\%$ .

Slika 7.13 (levo) prikazuje časovni potek izhodne napetosti za različne vrednosti amplitude vhodnega signala. Odstopanja od črkanega poteka napetosti povzročijo popačenje. Ker so oblike časovnih potekov navidez sinusne, vidimo, da je popačenja velikosti nekaj odstotkov (koliko le ta znašajo za signale za sliki) težko zaznati brez Fourierove analize signala.

Zgoraj opisane izpeljave veljajo le dokler je MOS tranzistor v področju nasičenja in odprt. Matematično lahko pogoj zapišemo kot

$$u_{DS}(t) \geq u_{GS} - U_T = U_{GS} + u_S(t) - U_T, \quad (7.33)$$

$$u_{GS}(t) \geq 0. \quad (7.34)$$

Pogoj (7.33) zagotavlja da je MOS tranzistor v področju nasičenja, medtem ko pogoj (7.34) zagotavlja, da je tranzistor odprt. Ko MOS tranzistor pade iz področja nasičenja oziroma se zapre, prične ojačevalnik rezati signal. Popačenja niso več enaka tistim, ki jih napoveduje enačba (7.29), ki ne upošteva rezanja signala. Tako naprimer so popačenja (THD) za časovne poteke na sliki 7.13 (desno) enaka 7,8%, 12,7%, 17,4% in 21,2%, medtem ko nam enačba (7.29) nam da napačne vrednosti 10%, 15%, 20% in 25%.  $\triangle$

## 7.4 Pretok moči

Poglejmo si pretok moči v velikosignalni analizi na vezju iz primera 7.2. Da bi lahko določili, od kod priteka moč v vezje in kje se troši, moramo najprej poznati vse tokove v vezju na sliki 7.12. Začnimo s tokovima  $i_{R_1}$  in  $i_{R_2}$

$$i_{R_1}(t) = \frac{U_{DD} - u_{GS}(t)}{R_1} = \frac{U_{DD} - U_{GS}}{R_1} - \frac{u_S(t)}{R_1} = \frac{U_{DD}}{R_1 + R_2} - \frac{u_S(t)}{R_1}, \quad (7.35)$$

$$i_{R_2}(t) = \frac{u_{GS}(t)}{R_2} = \frac{U_{GS}}{R_2} + \frac{u_S(t)}{R_2} = \frac{U_{DD}}{R_1 + R_2} + \frac{u_S(t)}{R_2}. \quad (7.36)$$

Ker je  $i_G = 0$ , lahko tok  $i_S(t)$  določimo s pomočjo  $i_{R_1}(t)$  in  $i_{R_2}(t)$  kot

$$i_S(t) = i_{R_2}(t) - i_{R_1}(t) = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_S(t), \quad (7.37)$$

Nazadnje določimo še tok  $i_{DD}$ .

$$i_{DD}(t) = i_{R_1}(t) + i_D(t). \quad (7.38)$$

Moč, ki jo daje signalni vir v vezje, je enaka

$$p_S(t) = i_S(t)u_S(t) = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_S^2(t). \quad (7.39)$$

Upora  $R_1$  in  $R_2$  trošita moč

$$p_{R_1}(t) = i_{R_1}^2(t)R_1 = \frac{U_{DD}^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2} - \frac{2U_{DD}u_S(t)}{R_1 + R_2} + \frac{u_S^2(t)}{R_1}, \quad (7.40)$$

$$p_{R_2}(t) = i_{R_2}^2(t)R_2 = \frac{U_{DD}^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2} + \frac{2U_{DD}u_S(t)}{R_1 + R_2} + \frac{u_S^2(t)}{R_2} \quad (7.41)$$

Prvi člen predstavlja moč, ki se troši na uporu zaradi toka upora v delovni točki. Preostali členi so moč, ki se troši, ker vhodni signal povzroči odmik toka upora od toka v delovni točki. Določimo še moč na uporu  $R_D$ .

$$p_{R_D}(t) = i_D^2(t)R_D \quad (7.42)$$

in moč, ki se troši na tranzistorju

$$p_M(t) = u_{DS}(t)i_D(t) + u_{GS}(t)i_G(t) = u_{DS}(t)i_D(t) = (U_{DD} - R_D i_D(t)) i_D(t). \quad (7.43)$$

Moč, ki jo daje napajalni vir v vezje je enaka

$$p_{DD} = U_{DD}(i_{R_1}(t) + i_D(t)) = U_{DD} \left( \frac{U_{DD}}{R_1 + R_2} - \frac{u_S(t)}{R_1} \right) + U_{DD} i_D(t). \quad (7.44)$$

Ne smemo pozabiti še na kondenzator  $C_1$ . Skozenj teče tok signalnega vira  $i_S$ . Če je kapacitivnost dovolj velika, da predstavlja kratek stik za izmenične signale, potem je napetost  $u_{C_1}(t)$  enaka  $u_S(t) - u_{GS}(t) = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{DD}$ . Moč tako znaša

$$p_{C_1} = i_S u_{C_1} = - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_S(t) \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{DD} = - \frac{U_{DD} u_S(t)}{R_1}. \quad (7.45)$$

Če je signalni vir sinusen, je moč, ki teče v kondenzator, prav tako sinusna. Pol periode je negativna, pol periode pa pozitivna. V povprečju je enaka nič, kar pomeni, da kondenzator shranjuje energijo le začasno. V prvi polovici periode jo oddaja v vezje, v drugi polovici pa jo prejema od vezja.

Vidimo, da za trenutne moči velja

$$p_{R_1} + p_{R_2} + p_{R_D} + p_M + p_{C_1} = p_S + p_{DD}. \quad (7.46)$$

Enačba (7.46) nam pove, da je vsota moči, ki se trošijo na uporih in tranzistorju, ter moči, ki teče v kondenzator  $C_1$ , vsak trenutek enaka moči, ki jo v vezje dajeta signalni vir  $u_S(t)$  in napajalni vir  $U_{DD}$ .

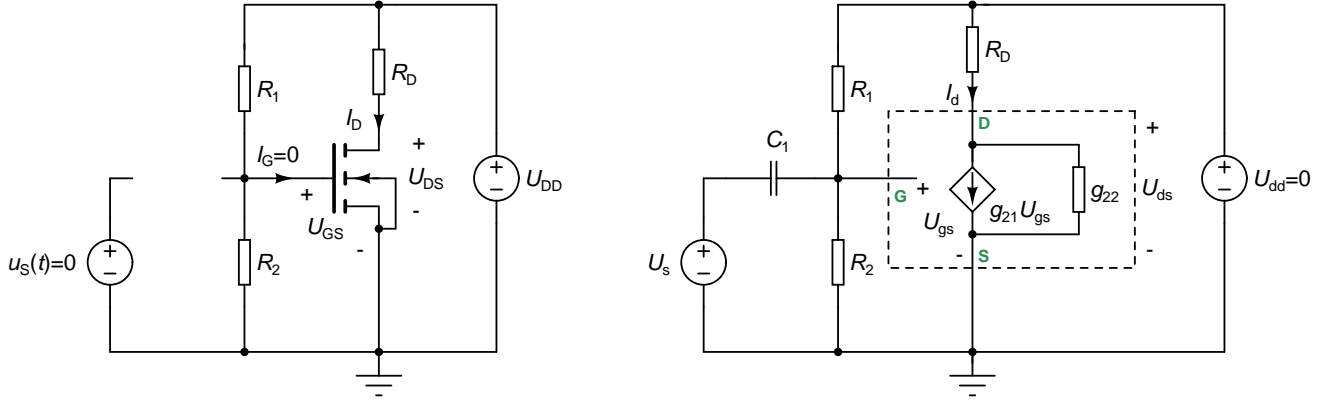
## 7.5 Model vezja za majhne signale

V poglavju 4 smo videli, da so enačbe, ki povezujejo majhne odmike od delovne točke nelinearnih elementov, linearne. Za vsakega od opisanih nelinearnih elementov smo tudi zgradili model za majhne signale, ki predstavlja zveze med majhnimi odmiki od delovne točke v obliki vezja.

V skladu s tem lahko poljubno nelinearno vezje obravnavamo v dveh korakih. Pri tem najprej določimo delovno točko vezja. Pri določanju delovne točke vezja izklopimo vse vire majhnih signalov. Napetostne signalne vire nastavimo na 0V in jih s tem nadomestimo s kratkimi stiki. Tokovne signalne vire nastavimo na 0A in jih tako zamenjamo z odprtimi sponkami. Viri velikih signalov (kot naprimer napajalni viri) ostanejo pri tem nespremenjeni.

V drugem koraku izračunamo učinke majhnih odmikov od delovne točke, ki jih povzročijo signalni viri. V tem koraku izklopimo vse vire velikih signalov (napetostne vire spremenimo v kratke stike, tokovne vire pa v odprte sponke). Viri majhnih signalov ostanejo nespremenjeni. Nelinearne elemente zamenjamo s pripadajočimi linearnimi modeli, katerih parametre izračunamo iz delovne točke vezja. Opisana analiza je smiselna le, če so vsi signali v vezju dovolj majhni. To pomeni, da lahko znotraj majhnih odmikov od delovne točke nelinearne elemente obravnavamo kot linearne. Majhni odmiki od delovne točke so v svoji najbolj splošni obliki funkcije časa.

Vsak periodičen signal lahko zapišemo s Fourierovo vrsto v obliki vsote sinusnih signalov. Podobno lahko naredimo tudi z aperiodičnimi signali, le da v tem primeru namesto vsote uporabimo Fourierov integral. Ker za



Slika 7.14: Analiza vezja s slike 7.12 za majhna vzbujanja s pomočjo superpozicije. Vezje za izračun enosmernih razmer (levo) in vezje za izračun odmikov od enosmernih razmer zaradi majhnega vzbujanja (desno). Za levo vezje iščemo delovno točko. Desno vezje analiziramo v frekvenčnem prostoru, zato so vsi tokovi in napetosti v njem predstavljeni s kompleksorji.

linearna vezja velja načelo superpozicije, lahko vsak tak sinusen signal obravnavamo posebej in dobimo pripadajoč delni odziv vezja. Če te delne odzive seštejemo (oziroma integriramo), dobimo odziv vezja na obravnavano vzbujanje. Za analizo linearnih vezij zadošča, če znamo določiti njihov odziv na sinusno vzbujanje. Ponavadi predpostavimo, da imajo majhni odmiki od delovne točke sinusen časovni potek, zaradi česar jih imenujemo izmenični signali. Linearna vezja ponavadi obravnavamo v frekvenčnem prostoru, kjer izmenične signale predstavljajo njihovi pripadajoči kompleksorji.

**Primer 7.3:** Slika 7.14 prikazuje analizo vezja na sliki 7.12 v dveh korakih. Na levi strani slike je vezje za izračun delovne točke vezja. Vidimo, da smo vir majhnega signala  $u_s$  izklopili (nastavili na 0V), napajalni vir  $U_{DD}$  pa je ostal nespremenjen. Za opisano vezje določimo delovno točko (vse napetosti in tokove v vezju). Označimo delovno točko tranzistorja z  $U_{GS}$ ,  $U_{DS}$ ,  $I_G$  in  $I_D$ . Za majhne odmike  $U_{gs}$ ,  $U_{ds}$ ,  $I_g$  in  $I_d$  od delovne točke velja enačba (4.74), ki jo na tem mestu zapišimo še enkrat

$$\begin{bmatrix} I_g \\ I_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{gs} \\ U_{ds} \end{bmatrix} = [Y_S] \begin{bmatrix} U_{gs} \\ U_{ds} \end{bmatrix}. \quad (7.47)$$

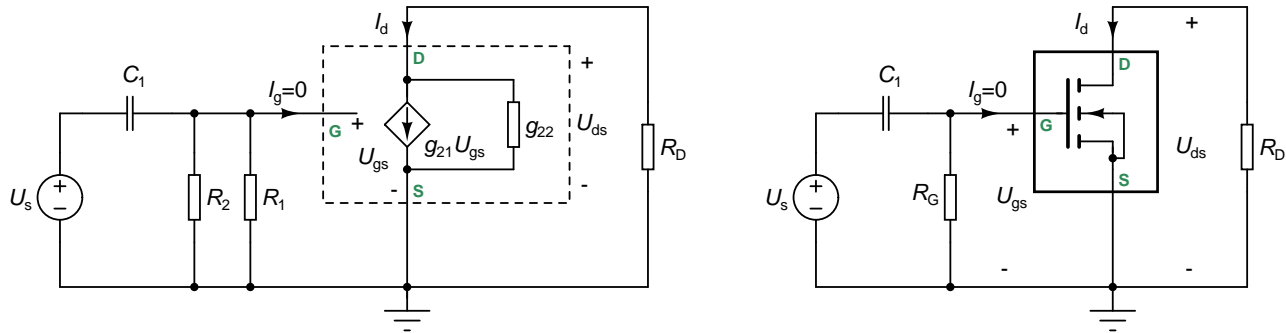
Veličine, ki nastopajo v enačbi, so kompleksorji, ki predstavljajo majhne sinusne signale. Admitančna parametra  $g_{21}$  in  $g_{22}$  določimo s pomočjo enačb (4.71) in (4.72) kot

$$g_{21} = K(U_{GS} - U_T)(1 + \lambda U_{DS}) = \frac{2I_D}{U_{GS} - U_T}, \quad (7.48)$$

$$g_{22} = \frac{K}{2}(U_{GS} - U_T)^2 \lambda = \frac{\lambda I_D}{1 + \lambda U_{DS}}, \quad (7.49)$$

kjer so  $K$ ,  $U_T$  in  $\lambda$  parametri, ki opisujejo MOS tranzistor. Enačba (7.47) opisuje MOS tranzistor za majhne odmike od delovne točke kot linearen trol v orientaciji s skupno sponko S (orientaciji s skupnim izvorom). Na osnovi te enačbe lahko zgradimo nadomestno vezje MOS tranzistorja za majhne signale, ki je prikazano na sliki 4.13. S tem vezjem nadomestimo MOS tranzistor na sliki 7.12, izklopimo vse vire velikih signalov ( $U_{DD} = 0$ ) in dobimo **model vezja za majhne signale**, ki je prikazan na sliki 7.14 (desno).

Če upoštevamo, da v modelu vezja za majhne signale napetostni vir  $U_{DD}$  predstavlja kratek stik, lahko vezje prerišemo v malo drugačni obliki, ki je prikazana na sliki 7.15 (levo). Vidimo, da sta upora  $R_1$  in  $R_2$  vezana vzporedno, zato ju lahko nadomestimo z uporom  $R_G = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . Da ne bi vsakič risali nadomestnega



Slika 7.15: Model vezja za majhne signale s slike 7.14 (desno) lahko še naprej poenostavimo, če upoštevamo, da je  $U_{dd} = 0$  (levo). Namesto nadomestnega vezja za tranzistor uporabimo kar pripadajoč simbol, ki ga obdamo z okvirjem (desno). Okvir nakazuje, da imamo opravka z linearnim tropolom, ki predstavlja model tranzistorja za majhne signale, in ne s tranzistorjem (ki je nelinearen). Vzporedno vezana upora  $R_1$  in  $R_2$  smo nadomestili z uporom  $R_G$ .

vezja MOS tranzistorja za majhne signale, bomo v shemah raje risali linearen tropol, katerega simbol bo enak uokvirjenemu simbolu tranzistorja. Končna oblika modela vezja za majhne signale je prikazana na sliki 7.15 (desno). V tej obliki bomo od sedaj naprej risali vse modele vezij za majhne signale.

S pomočjo dobljenega modela dobimo odmike tokov in napetosti od njihovih vrednosti v delovni točki. Celotno rešitev vezja dobimo tako, da seštejemo vrednost, ki jo dobimo z analizo delovne točke in vrednost, ki jo dobimo z reševanjem modela vezja za majhne signale.

Za primer vzemimo, da imamo v vezju na sliki 7.12 MOS tranzistor s parametri  $K = 2\text{mA/V}^2$ ,  $U_T = 3\text{V}$  in  $\lambda = 0.001$ . Ostali elementi vezja so  $R_1 = 60\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 40\text{k}\Omega$ ,  $R_D = 5\text{k}\Omega$  in  $U_{DD} = 10\text{V}$ . Vezje vzbujamo s sinusnim signalom  $U_S(t) = U_s \sin(\omega t)$ , ki ga predstavlja kompleksor  $U_s = 10\text{mV}$ . Predpostavimo, da pri frekvenci  $f = \omega/(2\pi)$  kondenzator  $C_1$  predstavlja kratek stik za izmenične signale.

Pri izračunu delovne točke (glej poglavje 6.4) zanemarimo vpliv parametra  $\lambda$ . Dobimo  $U_{GS} = R_2 U_{DD}/(R_1 + R_2) = 4\text{V}$ ,  $I_D = K/2(U_{GS} - U_T)^2 = 1\text{mA}$  in  $U_{DS} = U_{DD} - R_D I_D = 5\text{V}$ .

Pri izračuni admitančnih parametrov tranzistorja parametra  $\lambda$  ne zanemarimo. V izračunani delovni točki sta admitančna parametra  $g_{21}$  in  $g_{22}$  enaka

$$g_{21} = \frac{2I_{DQ}}{U_{GSQ} - U_T} = 2,0\text{mS}, \quad (7.50)$$

$$g_{22} = \frac{\lambda I_{DQ}}{1 + \lambda U_{DSQ}} = 1,0\mu\text{S}, \quad (7.51)$$

Ker  $C_1$  predstavlja kratek stik za izmenične signale, iz nadomestnega vezja za majhne signale na sliki 7.15 (levo) vidimo, da je  $U_{gs} = U_s$ . Tok krmiljenega vira znaša  $g_{21}U_{gs}$  in teče skozi vzporedno vezavo  $g_{22}$  in  $R_D$ . Napetost  $U_{ds}$  je tako enaka  $-g_{21}U_{gs}/(g_{22} + R_D^{-1})$ . Napetostno ojačenje za majhne signale znaša

$$A_U = \frac{U_{ds}}{U_{gs}} = -\frac{g_{21}}{g_{22} + R_D^{-1}} = -9,95. \quad (7.52)$$

Kompleksor odmika napetosti  $U_{ds}$  od delovne točke  $U_{DS}$  je enak

$$U_{gs} = A_U U_{gs} = -99,5\text{mV}. \quad (7.53)$$

Določimo še potek celotne napetosti  $u_{DS}(t)$ .

$$u_{DS}(t) = \underbrace{U_{DSQ}}_{\text{delovna točka}} + \underbrace{U_{ds} \sin(\omega t)}_{\text{majhen signal}} = 5\text{V} - 99,5\text{mV} \sin(\omega t). \quad (7.54)$$

Ne velja pozabiti, da časovni potek (7.54) velja šele potem, ko prehodni pojav izzveni (če je vezje stabilno in mine dovolj časa). Pri analizi vezja za velike signale v poglavju 7.3 smo zanemarili parameter  $\lambda$ . Pri analizi vezja za majhne signale  $\lambda = 0$  v enačbi (7.51) pomeni, da je  $g_{22} = 0$ . Ojačenje vezja (7.52) se zato poenostavi v

$$A_U = -g_{21} R_D = -\frac{2R_D I_{DQ}}{U_{GSQ} - U_T}. \quad (7.55)$$

Vidimo, da se enačba (7.55) ujema z enačbo (7.31). **Analiza vezja za majhne signale da enake rezultate, kot velikosignalna analiza pri kateri zanemarimo vpliv nelinearnih popačenj (predpostavimo majhne signale).**

Če v modelu vezja za majhne signale računamo moči, ki se trošijo na elementih vezja, dobimo le tiste deleže moči, ki pripadajo majhnim odstopanjem od delovne točke. To pa zato, ker model vezja za majhne signale opisuje samo odstopanja od delovne točke. **Moč, ki se troši zaradi tokov delovne točke vezja (kot je npr.  $I_D$ ), v modelu vezja za majhne signale ni zajeta.**  $\triangle$



## 8

# Lastnosti osnovnih vezav tranzistorjev pri srednjih frekvencah

Pojem „nizke frekvence“ označuje območje frekvenc, pri katerih impedance veznih in premostitvenih kondenzatorjev niso dovolj majhne, da bi jih lahko obravnavali kot kratke stike. Po drugi strani se začnejo elementi vezja (in z njimi tudi vezje) pri „visokih frekvencah“ obnašati drugače, kot napovedujejo njihove osnovne relacije, ki smo jih podali v poglavjih 1.2 in 4.

Vmes med „nizkimi frekvencami“ in „visokimi frekvencami“ se nahaja območje, kjer ponavadi uporabljamo vezja linearne elektronike. To območje se imenuje „**srednjefrekvenčno območje**“. Meja med nizkim in srednjimi frekvencami se imenuje **spodnja frekvenčna meja vezja**, meja med srednjimi in visokimi frekvencami pa **zgornja frekvenčna meja vezja**.

V tem poglavju bomo za bipolarni tranzistorje predpostavili, da njihovo obnašanje za majhne signale podaja matrika admitančnih parametrov orientacije s skupnim emitorjem (4.46). Parameter  $g_{12}$  je dovolj majhen, da ga lahko zanemarimo. Tako nam ostane

$$\begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{be} \\ U_{ce} \end{bmatrix} = [Y_E] \begin{bmatrix} U_{be} \\ U_{ce} \end{bmatrix}. \quad (8.1)$$

Pogosto bomo uporabljali zvezo (4.44), ki jo na tem mestu ponovimo

$$\beta = \frac{g_{21}}{g_{11}} = \beta_F \left( 1 + \frac{U_{CE}}{V_{AF}} \right). \quad (8.2)$$

V računskih primerih (kadar to ne bo povedano posebej) bomo predpostavili, da imamo opravka z NPN tranzistorjem s parametri  $I_S = 0,02\text{pA}$ ,  $\beta_F = 400$ ,  $\beta_R = 50$ ,  $V_{AF} = 50\text{V}$  in  $V_{AR} = 20\text{V}$  pri temperaturi  $T = 300\text{K}$ , ki se nahaja v delovni točki  $I_C = 1\text{mA}$  in  $U_{CE} = 5\text{V}$ . Iz podatkov lahko s pomočjo enačbe (8.2) določimo  $\beta = 440$ . Admitančne parametre določimo z enačbami (4.40)-(4.43)

$$g_{21} = \frac{I_C}{V_T} = 38,7\text{mS}, \quad (8.3)$$

$$g_{22} = \frac{I_C}{U_{CE} + V_{AF}} = 18,2\mu\text{S}, \quad (8.4)$$

$$g_{11} = \frac{g_{21}}{\beta} = 87,9\mu\text{S}. \quad (8.5)$$

Skoraj zmeraj velja, da je parameter  $g_{21}$  precej večji od  $g_{22}$  in  $g_{11}$ . Zaradi tega  $g_{22}$  pogosto zanemarimo, včasih pa to storimo tudi z  $g_{11}$ .

Za vezave unipolarnih tranzistorjev (MOSFET in JFET) bomo kot izhodišče uporabili matriko admitančnih parametrov za orientacijo s skupnim izvorom (4.74).

$$\begin{bmatrix} I_g \\ I_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{gs} \\ U_{ds} \end{bmatrix} = [Y_S] \begin{bmatrix} U_{gs} \\ U_{ds} \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

V računskih primerih bomo predpostavili, da imamo opravka z MOS tranzistorjem z induciranim kanalom tipa n, katerega parametri so enaki  $K = 4\text{mA/V}^2$ ,  $U_T = 2\text{V}$  in  $\lambda = 0.002$ . Delovna točka tranzistorja bo  $I_D = 2\text{mA}$  in  $U_{DS} = 5\text{V}$ . Iz enačbe (4.63) lahko izrazimo

$$U_{GS} - U_T = \sqrt{\frac{2I_D}{K(1 + \lambda U_{DS})}} = 0,995\text{V}. \quad (8.7)$$

$$(8.8)$$

Iz enačb (4.69)-(4.72) sledi

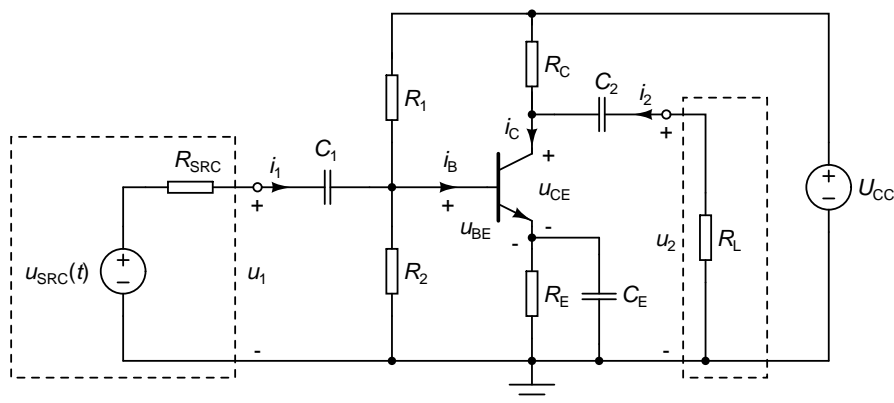
$$g_{21} = \frac{2I_D}{U_{GS} - U_T} = 4,02\text{mS}, \quad (8.9)$$

$$g_{22} = \frac{\lambda I_D}{1 + \lambda U_{DS}} = 3,96\mu\text{S}. \quad (8.10)$$

Tudi pri unipolarnih tranzistorjih ponavadi velja, da je  $g_{21}$  precej večji od  $g_{22}$ , ki ga pogosto lahko zanemarimo. Vezja bomo analizirali v različicah, ki uporabljajo bipolarne tranzistorje. Vsi rezultati, ki jih bomo dobili za vezja z bipolarnimi tranzistorji, bodo veljavni tudi za sorodna vezja z unipolarnimi tranzistorji, le da bomo morali za slednja v enačbe vstaviti  $g_{11} = 0$ .

## 8.1 Orientacija s skupnim emitorjem

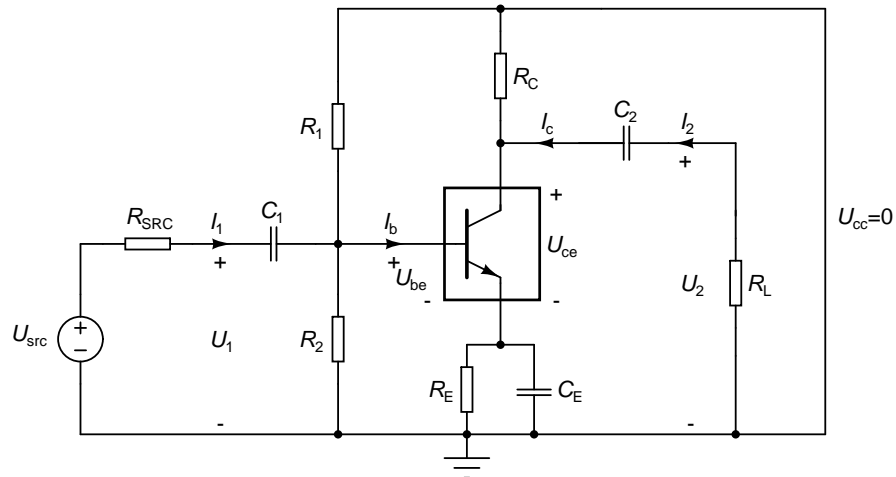
Vezje, v katerem se bipolarni tranzistor nahaja v orientaciji s skupnim emitorjem, je prikazano na sliki 8.1. V tej orientaciji je vhodni signal pripeljan na bazno sponko, izhodni signal pa prihaja iz kolektorske sponke tranzistorja.



Slika 8.1: Ojačevalnik z bipolarnim tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem.

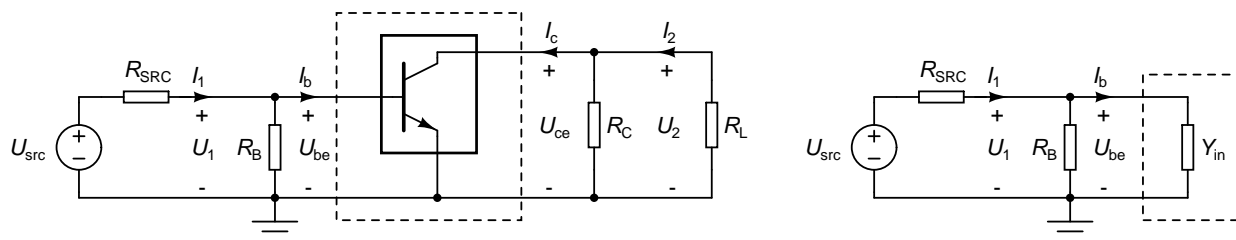
Črtkan okvir na levi strani obdaja signalni vir, na desni strani pa breme.

Model vezja za majhne signale dobimo, če upoštevamo da predstavlja napajalni vir  $U_{CC}$  kratek stik za izmenične signale (slika 8.2).



Slika 8.2: Celoten model za majhne signale za vezje na sliki 8.1.

Vezje s slike 8.2 lahko dodatno poenostavimo. Zaradi  $U_{CC} = 0$  se upora  $R_1$  in  $R_2$  vežeta vzporedno. Nadomestimo ju z upornostjo  $R_B = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . V srednjefrekvenčnem območju predstavljajo kondenzatorji  $C_1$ ,  $C_2$  in  $C_E$  kratek stik za izmenične signale. Upor  $R_E$  izpade iz vezja, saj ga  $C_E$  kratko sklene. Dobimo vezje na sliki 8.3 (levo) iz katerega je lepo razvidno, da imamo opravka z orientacijo s skupnim emitorjem.



Slika 8.3: Levo: model za majhne signale v srednjefrekvenčnem območju za vezje na sliki 8.1. Desno: celotno vezje desno od baze tranzistorja lahko nadomestimo z vhodno impedanco tranzistorja. Črtkan okvir obdaja dvovhodno vezje - model tranzistorja za majhne signale v orientaciji s skupnim emitorjem.

Zanimale nas bodo lastnosti dvovhodnega vezja (vhodne in prevajalne funkcije), ki je na sliki 8.3 (levo) obdano s črtkanim okvirjem. To vezje predstavlja model tranzistorja za majhne signale v orientaciji s skupnim emitorjem. Na svojem izhodu (desni strani) je obremenjeno z vzporedno vezavo uporov  $R_C$  in  $R_L$  s skupno impedanco  $Z_{TL} = R_C R_L / (R_C + R_L)$  in admitanco  $Y_{TL} = R_C^{-1} + R_L^{-1}$ .

Obnašanje tranzistorja za majhne signale v orientaciji s skupnim emitorjem opisuje enačba (8.1). Iz nje neposredno sledi matrika admitančnih parametrov s črtkano črto obdanega dvovhodnega vezja na sliki 8.3 (levo).

$$[Y_E] = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}. \quad (8.11)$$

**Napetostno ojačenje** tranzistorja dobimo kar s pomočjo enačbe (2.46) v katero namesto  $Y_L$  vstavimo  $Y_{TL}$ . Dobimo

$$A_U = \frac{U_{ce}}{U_{be}} = -\frac{g_{21}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (8.12)$$

Vidimo, da je ojačenje negativno, kar pomeni, da tranzistor v orientaciji s skupnim emitorjem obrača fazo napetosti. Ojačenje je največje, ko sta  $R_C$  in  $R_L$  neskončna (odprte sponke).

$$A_{U,\max} = -\frac{g_{21}}{g_{22}}. \quad (8.13)$$

$R_C \rightarrow \infty$  dosežemo tako, da namesto upora  $R_C$  uporabimo tokovni vir za nastavljanje delovne točke. **Tokovno ojačenje** tranzistorja določimo s pomočjo enačbe (2.52). Pri tem upoštevamo, da je determinanta admitančnih parametrov enaka  $D_{Y_E} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = g_{11}g_{22}$ . Namesto impedance bremena  $Z_L$  vstavimo  $Z_{TL}$  in dobimo

$$A_I = \frac{I_c}{I_b} = \frac{g_{21}}{g_{11} + D_{Y_E} \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}} = \frac{g_{21}}{g_{11} \left(1 + g_{22} \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}\right)} = \frac{\beta}{1 + g_{22} \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}}. \quad (8.14)$$

Tokovno ojačenje tranzistorja je največje, ko je  $Z_L = 0$  (kratek stik namesto  $R_L$ ). Takrat je tokovno ojačenje tranzistorja enako

$$A_{I,\max} = \frac{g_{21}}{g_{11}} = \beta. \quad (8.15)$$

Vidimo, da je tokovno ojačenje pozitivno, kar pomeni, da tranzistor v orientaciji s skupnim emitorjem ne obrača faze toka. Ker sta tako napetostno kot tokovno ojačenje realni, je ojačenje moči (enačba (2.68)) enako

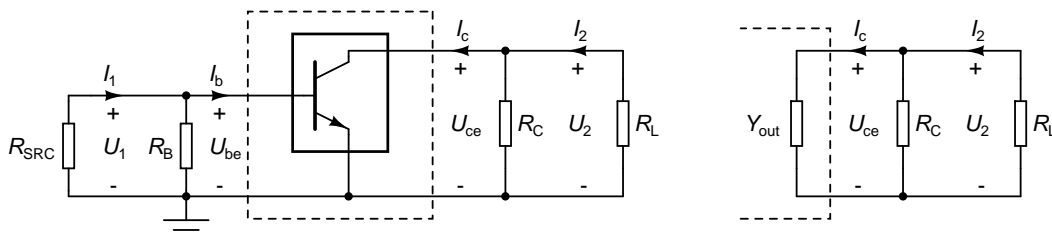
$$A_P = -A_U A_I. \quad (8.16)$$

**Primer 8.1:** Za tranzistor s parametri (8.3)-(8.5) ter  $R_C = 5\text{k}\Omega$  in  $R_L = 1\text{k}\Omega$  je napetostno ojačenje tranzistorja enako  $A_U = -31,75$ , največje možno napetostno ojačenje pa znaša  $A_{U,\max} = -2127$ . Tokovno ojačenje znaša  $A_I = 433,4$  in ne more preseči  $A_{I,\max} = 440$ . Ojačenje moči dobimo s pomočjo (8.16) in znaša  $A_P = 13760$ .

Tranzistor v orientaciji s skupnim emitorjem ima veliko napetostno in tokovno ojačenje, pa tudi veliko ojačenje moči.  $\triangle$

Vhodna admitanca je tista s katero lahko nadomestimo celotno vezje, ki leži desno od baze tranzistorja na sliki 8.3 (levo). Dobimo jo s pomočjo enačbe (2.55) v katero namesto  $Y_L$  vstavimo  $Y_{TL}$ . Vhodna admitanca v tranzistor je tako enaka

$$Y_{\text{in}} = \frac{I_b}{U_{\text{be}}} = g_{11} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} = g_{11}. \quad (8.17)$$



Slika 8.4: Za določanje izhodne admitance tranzistorja  $Y_{\text{out}}$  izklopimo signalni vir, ki se spremeni v kratek stik (levo). Celotno vezje levo od kolektorja tranzistorja lahko nadomestimo z izhodno admitanco tranzistorja (desno).

Vidimo, da je zaradi  $g_{12} = 0$  vhodna admitanca tranzistorja neodvisna od  $R_C$  in  $R_L$ . Podobno velja za izhodno admitanco, ki je admitanca s katero lahko nadomestimo celoto vezje, ki leži levo od kolektorja na sliki 8.4 (levo).

Pri določanju izhodne admittance izklopimo signalni vir. Določimo jo s pomočjo enačbe (2.57) v kateri zamenjamo  $Y_{\text{SRC}}$  z  $Y_{\text{TS}} = R_{\text{SRC}}^{-1} + R_{\text{B}}^{-1}$ , ki predstavlja admittance vzporedne vezave  $R_{\text{SRC}}$  in  $R_{\text{B}}$ . Dobimo

$$Y_{\text{out}} = \frac{I_c}{U_{ce}} = g_{22} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11} + R_{\text{SRC}}^{-1} + R_{\text{B}}^{-1}} = g_{22}. \quad (8.18)$$

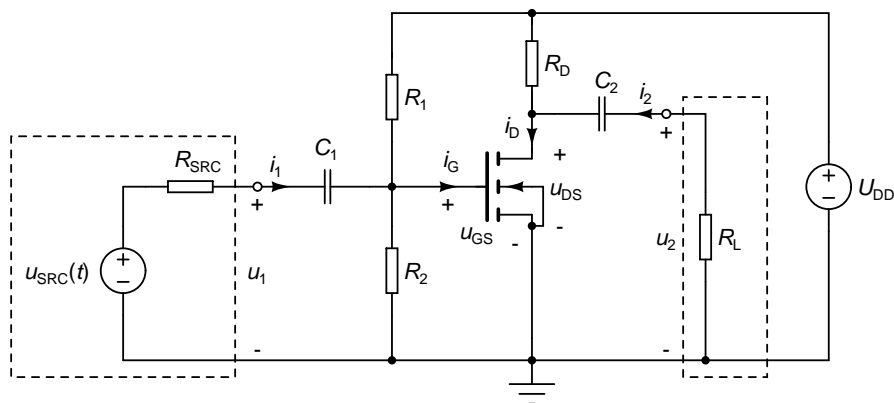
Tudi izhodna admittance je neodvisna od notranje upornosti signalnega vira  $R_{\text{SRC}}$  in od  $R_{\text{B}}$ .

**Primer 8.2:** Za tranzistor s parametri (8.3)-(8.5) znaša vhodna admittance tranzistorja  $Y_{\text{in}} = g_{11} = 87,9\mu\text{S}$  (kar ustreza vhodni impedanci  $11,4\text{k}\Omega$ ). Izhodna admittance tranzistorja je enaka  $Y_{\text{out}} = g_{22} = 18,2\mu\text{S}$  (kar ustreza izhodni impedanci  $55,0\text{k}\Omega$ ).  $\triangle$

Orientacija s skupnim emitorjem je najbolj primerna za vmesne ojačevalne stopnje, kjer ojačujemo signal, ne potrebujemo pa velikih izhodnih moči. Zaradi dokaj nizke izhodne admittance je v določenih primerih uporabna tudi kot tokovni vir (tok  $i_c$  je malo odvisen od  $u_{\text{CE}}$ ;  $di_c/du_{\text{CE}} = Y_{\text{out}} = g_{22}$ ). Zaradi visoke izhodne impedance tranzistor v orientaciji s skupnim emitorjem ni primeren za krmiljenje nizkoohmskih bremen (kot so na primer zvočniki).

## 8.2 Orientacija s skupnim izvorom

Sorodna orientaciji bipolarnega tranzistorja s skupnim emitorjem je orientacija MOS in JFET tranzistorjev s skupnim izvorom. Vezje ojačevalnika z MOS tranzistorjem v orientaciji s skupnim izvorom je na sliki 8.5.



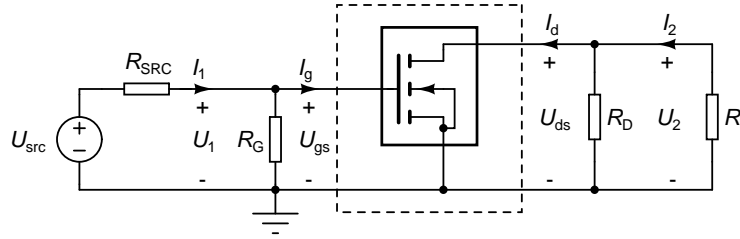
Slika 8.5: Ojačevalnik z MOS tranzistorjem v orientaciji s skupnim izvorom. Črtnan okvir na levi strani obdaja signalni vir, na desni strani pa breme.

Model vezja za majhne signale dobimo, ko upoštevamo, da napajalni vir  $U_{\text{DD}}$  predstavlja kratek stik za izmenične signale. Upora  $R_1$  in  $R_2$  se vežeta vzporedno in skupaj tvorita  $R_G = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . Upoštevamo še, da v srednjefrekvenčnem območju predstavljata kondenzatorja  $C_1$  in  $C_2$  kratek stik za izmenične signale, in dobimo vezje na sliki 8.6.

Dvovhodno vezje, ki je na sliki 8.6 obdano s črtnanim okvirjem, je določeno z matriko admitančnih parametrov, ki je enaka matriki  $[Y_S]$ .

$$[Y_S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}. \quad (8.19)$$

S primerjavo slik 8.6 in 8.3 ter enačb (8.19) in (8.11) vidimo, da se ojačevalnik z MOS tranzistorjem v orientaciji s skupnim izvorom obnaša enako, kot ojačevalnik z bipolarnim tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem.



Slika 8.6: Model za majhne signale v srednjefrekvenčnem območju za vezje na sliki 8.5. Črtkan okvir obdaja dvovhodno vezje - model tranzistorja za majhne signale v orientaciji s skupnim izvorom.

Edina razlika je v tem, da za MOS tranzistor velja  $g_{11} = 0$ . Če v enačbah (8.12)-(8.18) zamenjamo  $U_{be}$ ,  $U_{ce}$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ ,  $R_B$  in  $R_C$  z  $U_{gs}$ ,  $U_{ds}$ ,  $I_g$ ,  $I_d$ ,  $R_G$  in  $R_D$ , dobimo izraze za vhodne in prevajalne funkcije MOS tranzistorja v orientaciji s skupnim izvorom.

**Napetostno ojačenje** in največje napetostno ojačenje MOS tranzistorja v orientaciji s skupnim izvorom sta enaki

$$A_U = \frac{U_{ds}}{U_{gs}} = -\frac{g_{21}}{g_{22} + R_D^{-1} + R_L^{-1}}, \quad (8.20)$$

$$A_{U,\max} = -\frac{g_{21}}{g_{22}}. \quad (8.21)$$

Tudi tokrat je napetostno ojačenje negativno, kar pomeni, da tranzistor v orientaciji s skupnim izvorom obrača fazo napetosti. Zaradi  $g_{11} = 0$  je **tokovno ojačenje tranzistorja** neskončno.

$$A_I = \frac{I_d}{I_g} = \frac{g_{21}}{g_{11}} \frac{1}{1 + g_{22} \frac{R_D R_L}{R_D + R_L}} = \infty. \quad (8.22)$$

To je tudi razumljivo, saj je tok v vrata tranzistorja ( $I_g$ ) enak 0. Neskončno tokovno ojačenje seveda ne pomeni nič drugega, kot to, da MOS tranzistorja ne moremo krmiliti s tokom, ampak samo z napetostjo. Ojačevalnik na sliki 8.5 ima seveda končno tokovno ojačenje, saj mu vhodni tok  $I_1$  (slika 8.6) določa upornost  $R_G$ .

$$A_{I,\text{oj}} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{-\frac{U_2}{R_L}}{\frac{U_1}{R_G}} = -\frac{U_2}{U_1} \frac{R_G}{R_L} = -A_U \frac{R_G}{R_L} = \frac{g_{21}}{g_{22} + R_D^{-1} + R_L^{-1}} \frac{R_G}{R_L}. \quad (8.23)$$

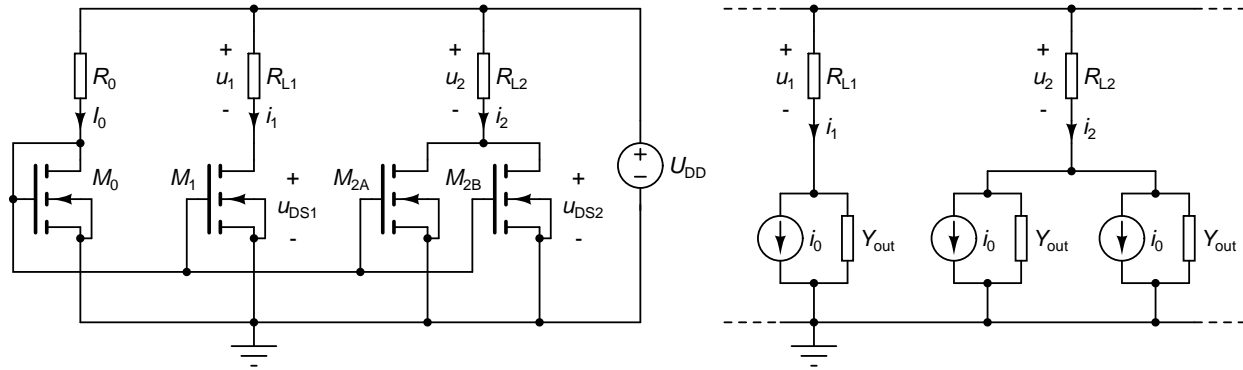
Vidimo, da je tokovno ojačenje ojačevalnika sorazmerno z upornostjo  $R_G$ . **Vhodna in izhodna admitanca** MOS tranzistorja v orientaciji s skupnim izvorom sta enaki

$$Y_{\text{in}} = g_{11} = 0, \quad (8.24)$$

$$Y_{\text{out}} = g_{22}. \quad (8.25)$$

**Primer 8.3:** Za MOS tranzistor s parametri (8.9)-(8.10) ter  $R_D = 5\text{k}\Omega$  in  $R_L = 20\text{k}\Omega$  dobimo  $A_U = -15,83$ ,  $A_{U,\max} = -1015$ ,  $Y_{\text{in}} = 0\text{mS}$  in  $Y_{\text{out}} = 3,96\mu\text{S}$  (kar ustreza  $252,5\text{k}\Omega$ ).  $\triangle$

Orientacija s skupnim izvorom ima podobne lastnosti kot orientacija s skupnim emitorjem. Poglejmo si MOS tranzistor v orientaciji s skupnim izvorom v vlogi tokovnega vira. Slika 8.7 (levo) prikazuje **tokovno zrcalo**. Vsi tranzistorji v vezju so enaki. Vezje se obnaša kot par tokovnih virov, kjer en vir vleče tok  $i_1 = I_0$  skozi upor  $R_{L1}$ , drug vir pa tok  $i_2 = 2I_0$  skozi upor  $R_{L2}$ . Tok  $I_0$  nastavimo z uporom  $R_0$ . Za delovno točko tranzistorja  $M_0$  velja



Slika 8.7: Tokovno zrcalo, ki zrcali tok  $i_0$  v tokova  $i_1 = i_0$  in  $i_2 = 2i_0$  (levo). Velikosignalno nadomestno vezje za področje nasičenja (desno).

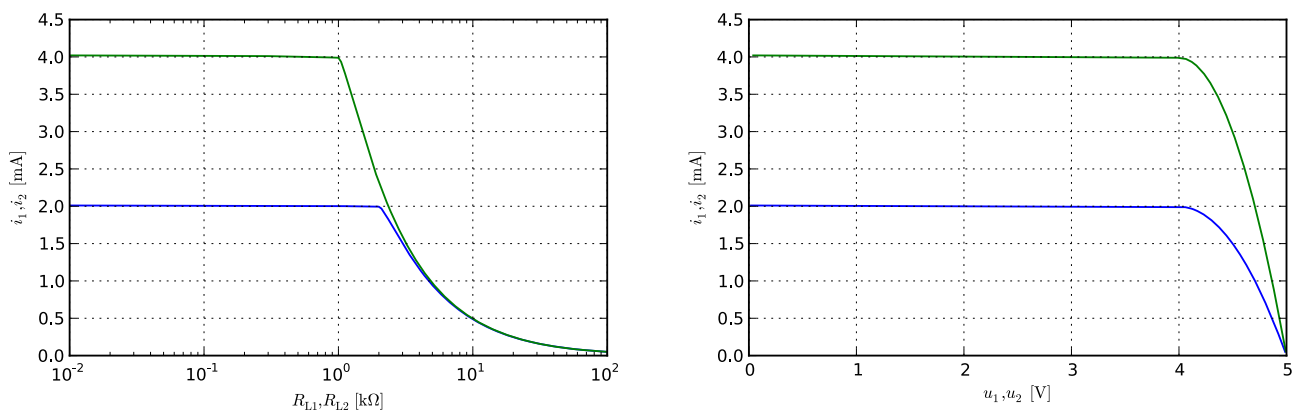
$U_{GS} = U_{DS}$  (tranzistor deluje v področju nasičenja) in ob zanemaritvi  $\lambda$  dobimo

$$I_0 = I_D = \frac{K}{2}(U_{GS} - U_T)^2 = \frac{K}{2}(U_{DD} - I_D R_0 - U_T)^2, \quad (8.26)$$

$$I_0 = \frac{K}{2}(U_{DD} - I_0 R_0 - U_T)^2. \quad (8.27)$$

Tok  $I_0$  dobimo z reševanjem kvadratne enačbe (8.27). Za tranzistorje s parametri  $K = 4\text{mA/V}^2$ ,  $U_T = 2\text{V}$  in  $\lambda = 0.002$  ter  $R_0 = 1\text{k}\Omega$  in  $U_{DD} = 5\text{V}$  je  $I_0 = 2\text{mA}$ .

Ker je napetost  $u_{GS}$  tranzistorjev  $M_1$ ,  $M_{2A}$  in  $M_{2B}$  enaka napetosti  $u_{GS}$  tranzistorja  $M_0$ , so tokovi ponorov vseh tranzistorjev enaki  $I_0$ . Poleg tega so precej neodvisni od napetosti  $u_{DS}$ , saj je parameter  $\lambda$  majhen. Skozi  $R_{L1}$  tako teče tok  $i_1 = I_0$ , skozi  $R_{L2}$  pa  $i_2 = 2i_0$ .



Slika 8.8: Odvisnost tokov  $i_1$  ( $i_2$ ) od bremenske upornosti  $R_{L1}$  ( $R_{L2}$ ) (levo) ter od napetosti  $u_1$  ( $u_2$ ) (desno). Spodnja krivulja je  $i_1$ , zgornja pa  $i_2$ .

Seveda tokovni vir ne zmore poljubnih bremen. Najlažje mu je, kadar je breme kratek stik ( $R_{L1}$  oziroma  $R_{L2}$  imata  $0\Omega$ ). Z naraščanjem bremenske upornosti raste padec napetosti na bremenu, ki gre na račun napetosti  $u_{DS}$  tranzistorja pod bremenom. Ko postane  $u_{DS}$  dovolj majhna, pade tranzistor iz področja nasičenja v linearno področje in vezje se preneha obnašati kot tokovni vir. Dogajanje ilustrira slika 8.8 (levo).

Odvisnost tokov od napetosti  $u_1$  oziroma  $u_2$  je podana na sliki 8.8 (desno). Skoraj vodoraven potek karakteristike med  $0\text{V}$  in  $4\text{V}$  potrjuje, da se  $M_1$ ,  $M_{2A}$  in  $M_{2B}$  obnašajo kot tokovni viri. Za strmino karakteristike  $di_1/du_1$  v

tem delu velja

$$\frac{di_1}{du_1} = \frac{di_1}{d(U_{DD} - u_{DS1})} = -\frac{di_1}{du_{DS1}} = -\frac{I_1}{U_{ds1}} = -Y_{out} = -g_{22}. \quad (8.28)$$

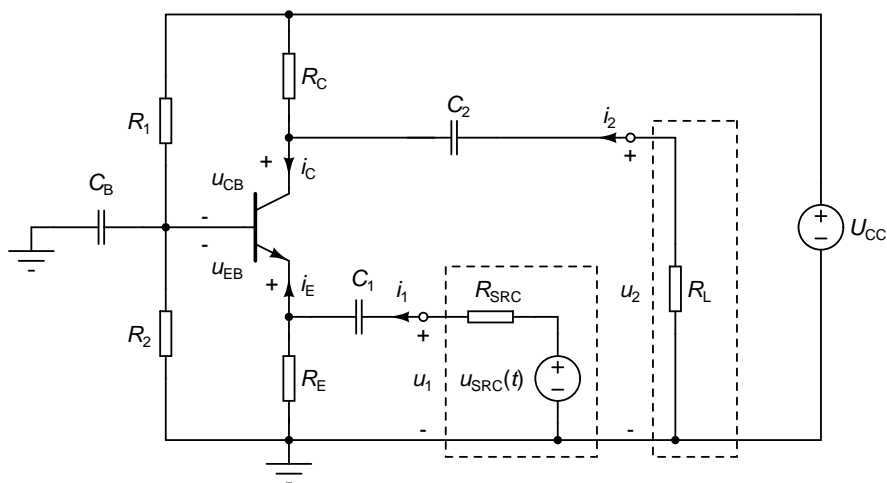
Strmina karakteristike  $di_2/du_2$  je enaka  $2Y_{out} = 2g_{22}$ , saj breme  $R_{L2}$  krmilita dva vzporedno vezana tranzistorja, ki dajeta vsak po  $I_0$  toka.

Parameter  $g_{22}$  je odvisen od delovne točke tranzistorja ( $U_{DS}$  in  $I_D$ ). Enačba (8.10) pokaže, da je odvisnost  $g_{22}$  od  $U_{DS}$  majhna, če je parameter  $\lambda$  majhen. Odvisnost  $g_{22}$  od  $I_D$  ne pride do izraza, ker se tok  $I_D$  le malo spreminja (saj imamo opravka s tokovnim virom). Tako je izhodna admitanca tranzistorjev praktično konstantna za celotno območje  $U_{DS}$  od 0V do 4V in v našem primeru znaša  $Y_{out} = g_{22} \approx \lambda I_D = \lambda I_0 = 4\mu S$  (kar ustreza  $250k\Omega$ ).

Na osnovi povedanega lahko zgradimo velikosignalni model tokovnega zrcala (slika 8.7, desno), ki je veljaven, dokler so tranzistorji v področju nasičenja. Tokovna zrcala se pogosto uporabljajo v integriranih vezjih za nastavljanje delovne točke. Z vzporedno vezavo večih tranzistorjev (podobno kot smo to naredili z  $M_{2A}$  in  $M_{2B}$ ) lahko ustvarimo poljuben celoštevilski mnogokratnik toka  $I_0$ .

### 8.3 Orientacija s skupno bazo

Vezje, v katerem se bipolarni tranzistor nahaja v orientaciji s skupno bazo, je prikazano na sliki 8.9. V tej orientaciji je vhodni signal pripeljan na emitor, izhodni signal pa prihaja iz kolektorja tranzistorja.



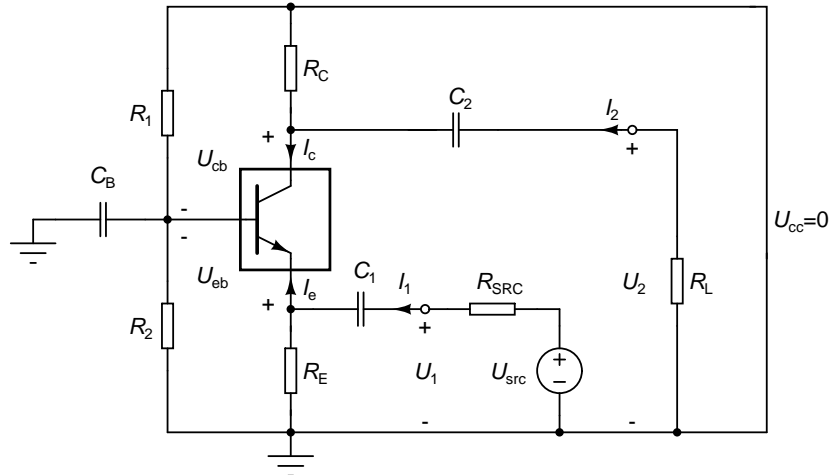
Slika 8.9: Ojačevalnik z bipolarnim tranzistorjem v orientaciji s skupno bazo. Črtkan okvir na levi strani obdaja signalni vir, na desni strani pa breme.

Model vezja za majhne signale dobimo, če upoštevamo da predstavlja napajalni vir  $U_{CC}$  kratek stik za izmenične signale (slika 8.10).

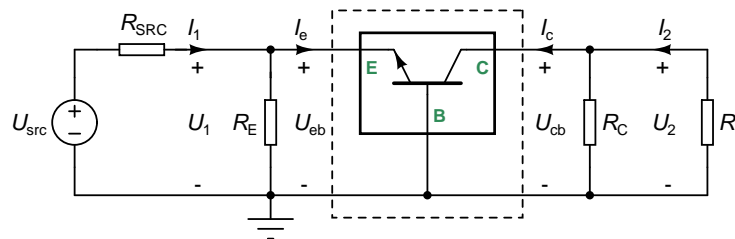
V srednjefrekvenčnem območju predstavljajo  $C_1$ ,  $C_2$  in  $C_B$  kratek stik za izmenične signale.  $C_B$  je vzporedno vezan z uporoma  $R_1$  in  $R_2$ , ki sta zato kratko sklenjena in izpadeta iz vezja. Tako dobimo model na sliki 8.11.

Zanimale nas bodo lastnosti dvovhodnega vezja, ki je na sliki 8.11 obdano s črtkano črto. To vezje predstavlja model tranzistorja za majhne signale v orientaciji s skupno bazo. Na svojem izhodu (kolektorju) je tranzistor obremenjen z vzporedno vezavo uporov  $R_C$  in  $R_L$  s skupno impedanco  $Z_{TL} = R_C R_L / (R_C + R_L)$  in admitanco  $Y_{TL} = R_C^{-1} + R_L^{-1}$ .





Slika 8.10: Celoten model za majhne signale za vezje na sliki 8.9.



Slika 8.11: Model za majhne signale v srednjefrekvenčnem območju za vezje na sliki 8.9.

Obnašanje tranzistorja za majhne signale v orientaciji s skupno bazo opisuje enačba

$$\begin{bmatrix} I_e \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11B} & y_{12B} \\ y_{21B} & y_{22B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{eb} \\ U_{cb} \end{bmatrix} = [Y_B] \begin{bmatrix} U_{eb} \\ U_{cb} \end{bmatrix}. \quad (8.29)$$

Da določimo matriko admitančnih parametrov za orientacijo s skupno bazo, moramo najprej določiti nedoločeno admitančno matriko tranzistorja.

$$[Y_N] = \begin{matrix} & \begin{matrix} B & C & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} B \\ C \\ E \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & -g_{11} \\ g_{21} & g_{22} & -(g_{21} + g_{22}) \\ -(g_{11} + g_{21}) & -g_{22} & g_{11} + g_{21} + g_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (8.30)$$

Črtamo vrstico in stolpec, ki ustrežata skupni sponki (bazi). Nato zamenjamo preostali vrstici in stolpca, da dobimo matriko, v kateri najprej nastopa vhod (emitor) in nato izhod (kolektor).

$$[Y_B] = \begin{matrix} & \begin{matrix} E & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} E \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_{11} + g_{21} + g_{22} & -g_{22} \\ -(g_{21} + g_{22}) & g_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} y_{11B} & y_{12B} \\ y_{21B} & y_{22B} \end{bmatrix}. \quad (8.31)$$

Matrika  $[Y_B]$  je hkrati tudi matrika admitančnih parametrov s črtkano črto obdanega dvovhodnega vezja na sliki 8.11. Sedaj se lahko lotimo izračuna vhodnih in prevajalnih funkcij tranzistorja v orientaciji s skupno bazo.

**Napetostno ojačenje** (enačba (2.46)) znaša

$$A_U = \frac{U_{cb}}{U_{eb}} = -\frac{y_{21B}}{y_{22B} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} = \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (8.32)$$

Ker je  $g_{22}$  precej manjši od  $g_{21}$ , ga lahko zanemarimo in dobimo do predznaka enak izraz za napetostno ojačenje, kot smo ga dobili za orientacijo s skupnim emitorjem (enačba (8.12)). Orientacija s skupno bazo ne obrača faze napetosti. Največje napetostno ojačenje dobimo, ko sta  $R_C$  in  $R_L$  zelo velika.

$$A_{U,\max} = \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{22}} = 1 + \frac{g_{21}}{g_{22}}. \quad (8.33)$$

Determinanta admitančnih parametrov za orientacijo s skupno bazo je enaka  $D_{Y_B} = (g_{11} + g_{21} + g_{22})g_{22} - g_{22}(g_{21} + g_{22}) = g_{11}g_{22}$ . **Tokovno ojačenje** dobimo s pomočjo enačbe (2.52).

$$A_I = \frac{I_c}{I_e} = \frac{y_{21B}}{y_{11B} + D_{Y_B} \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}} = -\frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11} + g_{21} + g_{22} + g_{11}g_{22} \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}}. \quad (8.34)$$

Tokovno ojačenje je največje, ko je  $Z_{TL} = 0$  (vzporedna vezava  $R_C$  in  $R_L$  predstavlja kratek stik).

$$A_{I,\max} = -\frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11} + g_{21} + g_{22}} \stackrel{g_{22} \ll g_{21}}{\approx} -\frac{g_{21}}{g_{11} + g_{21}} = -\frac{\beta}{1 + \beta}. \quad (8.35)$$

Vidimo, da je absolutna vrednost tokovnega ojačenja manjša od 1. Ker je  $\beta$  ponavadi velik, je za nizkoohmska bremena tokovno ojačenje tranzistorja blizu  $-1$ .

Z **vhodno admitanco** lahko nadomestimo celotno vezje desno od emitorja tranzistorja na sliki 8.11. Iz enačbe (2.55) dobimo

$$Y_{in} = \frac{I_e}{U_{eb}} = y_{11B} - \frac{y_{12B}y_{21B}}{y_{22B} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} = g_{11} + g_{21} + g_{22} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (8.36)$$

Izraz (8.36) preoblikujemo v

$$Y_{in} = g_{11} + (g_{21} + g_{22}) \left( 1 - \frac{g_{22}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} \right) = g_{11} + \frac{g_{21} + g_{22}}{1 + \frac{g_{22}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}}. \quad (8.37)$$

Za vhodno admitanco tranzistorja velja

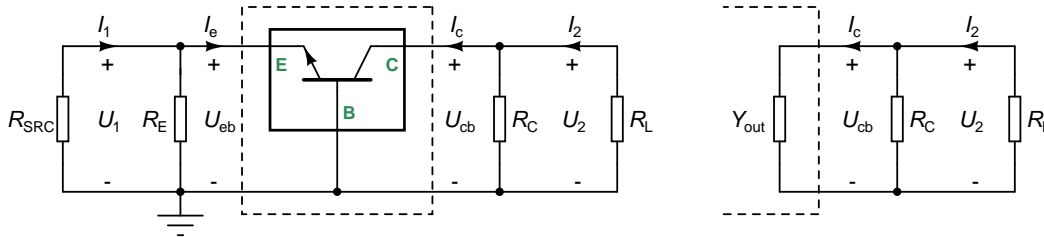
$$g_{11} \leq Y_{in} \leq g_{11} + g_{21} + g_{22}. \quad (8.38)$$

Če sta  $R_C$  in  $R_L$  oba mnogo večja od  $g_{22}^{-1}$ , je imenovalec ulomka v (8.37) zelo velik, vhodna admitanca  $Y_{in}$  pa blizu spodnje meje ( $Y_{in} \approx g_{11}$ ). V praksi je bolj pogost primer, ko je  $R_C$  ali  $R_L$  precej manjši od  $g_{22}^{-1}$ , kar pomeni da je imenovalec približno enak 1. Tedaj je  $Y_{in}$  blizu svoje zgornje meje

$$Y_{in,\max} = g_{11} + g_{21} + g_{22} \approx g_{21}. \quad (8.39)$$

Pri določanju **izhodne admitance** najprej izklopimo signalni vir (slika 8.12). Tranzistor je levo od emitorja priključen na vzporedno vezavo  $R_{SRC}$  in  $R_E$ , katere admitanca znaša  $Y_{TS} = R_{SRC}^{-1} + R_E^{-1}$ . Spet uporabimo enačbo (2.57) v kateri  $Y_{SRC}$  nadomestimo z  $Y_{TS}$ .

$$Y_{out} = \frac{I_c}{U_{cb}} = y_{22B} - \frac{y_{12B}y_{21B}}{y_{11B} + R_{SRC}^{-1} + R_E^{-1}} = g_{22} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_{SRC}^{-1} + R_E^{-1}}. \quad (8.40)$$



Slika 8.12: Za določanje izhodne admittance tranzistorja  $Y_{\text{out}}$  izklopimo signalni vir, ki se spremeni v kratak stik (levo). Celotno vezje levo od kolektorja tranzistorja lahko nadomestimo z izhodno admittance tranzistorja (desno).

Izpostavimo  $g_{22}$  in preuredimo.

$$Y_{\text{out}} = g_{22} \left( 1 - \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_{\text{SRC}}^{-1} + R_{\text{E}}^{-1}} \right) = \frac{g_{22}}{1 + \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11} + R_{\text{SRC}}^{-1} + R_{\text{E}}^{-1}}}. \quad (8.41)$$

Zaradi  $g_{22} \ll g_{21}$  lahko  $g_{22}$  zanemarimo napram  $g_{21}$  in poenostavimo (8.41) v

$$Y_{\text{out}} \approx \frac{g_{22}}{1 + \frac{g_{21}}{g_{11} + R_{\text{SRC}}^{-1} + R_{\text{E}}^{-1}}} = \frac{g_{22}}{1 + \frac{\beta}{1 + g_{11}^{-1}(R_{\text{SRC}}^{-1} + R_{\text{E}}^{-1})}}. \quad (8.42)$$

Za zelo velike vrednosti uporov  $R_{\text{SRC}}$  in  $R_{\text{E}}$  (mnogo večje od  $g_{11}^{-1}$ ) dobimo najmanjšo izhodno admittance

$$Y_{\text{out, min}} \approx \frac{g_{22}}{1 + \beta}. \quad (8.43)$$

Izhodna admittance je nižja od tiste v orientaciji s skupnim emitorjem. Ob primerni izbiri elementov lahko dosežemo zelo majhne izhodne admittance (do  $1 + \beta$  krat manjše od izhodne admittance orientacije s skupnim emitorjem). To pomeni, da je orientacija s skupno bazo zelo primerna za izvedbo tokovnih virov.

**Primer 8.4:** Za tranzistor s parametri (8.3)-(8.5) ter  $R_{\text{C}} = 5\text{k}\Omega$ ,  $R_{\text{L}} = 1\text{k}\Omega$ ,  $R_{\text{E}} = 1\text{k}\Omega$  in  $R_{\text{SRC}} = 100\Omega$  je napetostno ojačenje enako  $A_{\text{U}} = 31,77$ , največje ojačenje pa je  $A_{\text{U, max}} = 2128$ . Tokovno ojačenje znaša  $A_{\text{I}} = -0,997699$ , največ pa je lahko  $A_{\text{I, max}} = -0,997733$ . Vidimo, da je tokovno ojačenje tranzistorja blizu  $-1$ .

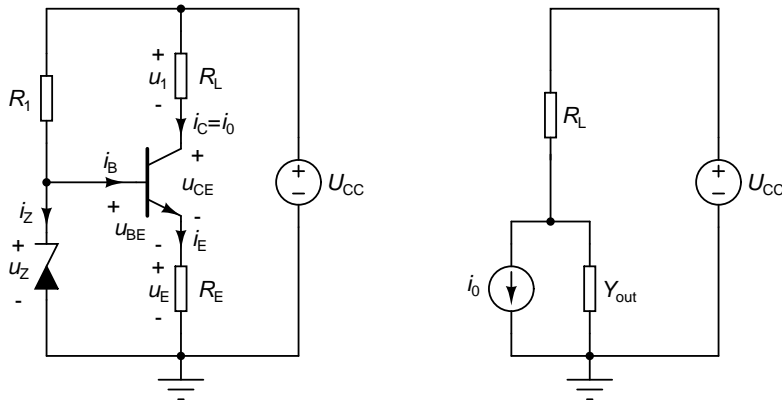
Vhodna admittance tranzistorja znaša  $Y_{\text{in}} = 38,21\text{mS}$  (kar ustreza  $26,17\Omega$ ). To je zelo blizu vrednosti  $g_{21} = 38,68\text{mS}$ , ki jo dobimo s poenostavljenim izrazom (8.39). Izhodna admittance znaša  $Y_{\text{out}} = 4,05\mu\text{S}$  (kar ustreza  $247\text{k}\Omega$ ). To je sicer manj, kot znaša izhodna admittance orientacije s skupnim emitorjem ( $g_{22} = 18,2\mu\text{S}$ ), je pa še vedno precej nad najnižjo možno vrednostjo  $Y_{\text{out, min}} = 41,2\text{nS}$ . Vendar se moramo zavedati, da tako  $R_{\text{E}}$ , kot tudi  $R_{\text{SRC}}$  nista mnogo večja od  $g_{11}^{-1} = 11,4\text{k}\Omega$  in zato izhodna admittance še zdaleč ne more biti enaka svoji minimalni vrednosti.  $\triangle$

**Tokovni vir z Zenerjevo diodo in bipolarnim tranzistorjem** je prikazan na sliki 8.13 (levo). Recimo, da želimo načrtovati tokovni vir s tokom  $I_{\text{C}} = i_0 = 1\text{mA}$  in pri tem uporabiti Zenerjevo diodo, ki v ima delovni točki ( $I_{\text{Z}} = 5\text{mA}$ ,  $U_{\text{Z}} = 4,7\text{V}$ ) diferencialno upornost  $r_{\text{Z}} = 70\Omega$ . Napajalna napetost naj bo  $U_{\text{CC}} = 10\text{V}$ .

Načrtovanje bomo začeli z delovno točko, v kateri mora veljati  $I_{\text{C}} = 1\text{mA}$ . Če uporabimo tranzistor z velikim  $\beta_{\text{F}}$  (nekaj 100), je bazni tok  $I_{\text{B}} \approx I_{\text{C}}/\beta_{\text{F}}$  manjši od  $10\mu\text{A}$  in zanemarljiv v primerjavi s tokom Zenerjeve diode  $I_{\text{Z}} = 5\text{mA}$ . Skozi upor  $R_1$  tako teče tok  $I_{\text{Z}} = 5\text{mA}$ .

Da bo tok Zenerjeve diode enak  $I_{\text{Z}}$ , moramo določiti upornost  $R_1$ .

$$R_1 = \frac{U_{\text{CC}} - U_{\text{Z}}}{I_{\text{Z}}} = 1060\Omega \approx 1\text{k}\Omega. \quad (8.44)$$



Slika 8.13: Tokovni vir z Zenerjevo diodo in bipolarnim tranzistorjem (levo). Nadomestno vezje za velike signale, ki velja, dokler je tranzistor v aktivnem področju (desno).

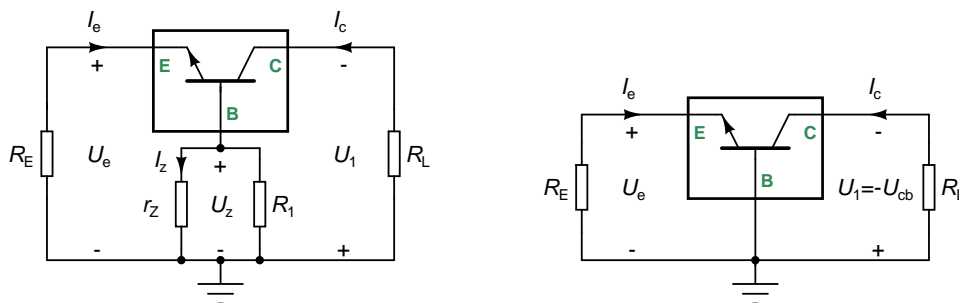
Če je  $\beta_F$  velik, je bazni tok zanemarljiv v primerjavi s kolektorskim in velja

$$I_E = I_C + I_B \approx I_C + \frac{I_C}{\beta_F} \approx I_C = 1\text{mA}. \tag{8.45}$$

Od tod lahko določimo  $R_E$ , saj je napetost  $u_{BE}$  enaka kolenski napetosti  $U_K = 0,7\text{V}$ .

$$R_E = \frac{U_E}{I_E} \approx \frac{U_Z - U_K}{I_E} = 4\text{k}\Omega. \tag{8.46}$$

S tem je načrtovanje zaključeno. Tok  $i_C$  bo (za neko območje upornosti  $R_L$ ) neodvisen od  $R_L$  in enak 1mA. Da to pokažemo, moramo analizirati model vezja za majhne signale, ki pove kako zelo odstopanja napetosti  $u_1$  od delovne točke  $U_{1Q}$  vplivajo na odstopanja toka  $i_C$  od delovne točke  $I_C = 1\text{mA}$ . Pri tokovnih virih je zaželeno, da so ta odstopanja čim manjša.



Slika 8.14: Model tokovnega vira z Zenerjevo diodo in bipolarnim tranzistorjem za majhne signale (levo). Če upoštevamo, da je diferencialna upornost Zenerjeve diode ( $r_Z$ ) majhna, jo lahko nadomestimo s kratkim stikom in dobimo poenostavljeno nadomestno vezje za majhne signale (desno).

Pri sestavljanju modela vezja za majhne signale upoštevamo, da Zenerjeva dioda predstavlja diferencialno upornost  $r_Z$ , napajalni vir  $U_{CC}$  pa kratek stik. Po nekaj preurejanja dobimo vezje na sliki 8.14 (levo). Če upoštevamo še, da je diferencialna upornost Zenerjeve diode majhna ( $70\Omega$ ), jo lahko nadomestimo s kratkim stikom in dobimo vezje na sliki 8.14 (desno). Vidimo, da imamo opravka z orientacijo s skupno bazo (slika 8.11 v kateri odstranimo  $R_{SRC}$ ,  $U_{src}$  in  $R_C$ ).

Zanima nas odvod (hitrost spreminjanja)  $i_C$  po  $u_1$ . Izrazimo ga z veličinami iz modela za majhne signale. Te so pomensko enakovredne diferencialom veličin v vezju. Tako je naprimer diferencial toka  $di_C$  v velikosignalnem modelu vezja enakovreden toku  $I_C$  v modelu vezja za majhne signale.

$$\frac{di_C}{du_1} = \frac{I_C}{U_1} = -\frac{I_C}{U_{cb}} = -Y_{\text{out}}. \quad (8.47)$$

Izhodno admitanco tranzistorja za orientacijo s skupno bazo pa smo že izračunali (enačba (8.42)). Preostane nam samo še, da jo smiselno popravimo. Elementi  $R_{\text{SRC}}$ ,  $U_{\text{src}}$  in  $R_C$  izpadejo iz vezja na sliki 8.11, če vzamemo  $R_{\text{SRC}} = R_C = \infty$  ( $R_{\text{SRC}}$  in  $R_C$  predstavljata odprte sponke). Dobimo

$$\frac{di_C}{du_1} = -Y_{\text{out}} = -\frac{g_{22}}{1 + \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11} + R_E^{-1}}}. \quad (8.48)$$

V načrtovani delovni točki velja za tranzistor  $I_C = 1\text{mA}$ . Napetost  $U_{\text{CE}}$  v delovni točki je odvisna od upora  $R_L$ . Recimo, da je tokovni vir neobremenjen ( $R_L = 0$ ). Tedaj velja  $U_{\text{CE}} = U_{\text{CC}} - U_E = U_{\text{CC}} - (U_Z - U_K) = 6\text{V}$ . Admitančni parametri tranzistorja s parametri  $I_S = 0,02\text{pA}$ ,  $\beta_F = 400$ ,  $\beta_R = 50$ ,  $V_{\text{AF}} = 50\text{V}$  in  $V_{\text{AR}} = 20\text{V}$  v tej delovni točki in pri temperaturi  $T = 300\text{K}$  so enaki

$$g_{21} = \frac{I_C}{V_T} = 38,7\text{mS}, \quad (8.49)$$

$$g_{22} = \frac{I_C}{U_{\text{CE}} + V_{\text{AF}}} = 17,9\mu\text{S}, \quad (8.50)$$

$$g_{11} = \frac{g_{21}}{\beta} = \frac{g_{21}}{\beta_F} \left(1 + \frac{U_{\text{CE}}}{V_{\text{AF}}}\right)^{-1} = 86,3\mu\text{S}. \quad (8.51)$$

Iz (8.48) dobimo  $Y_{\text{out}} = 0,154\mu\text{S}$  (kar ustreza  $6,50\text{M}\Omega$ ). Vidimo, da je tak tokovni vir mnogo boljši od tistega v orientaciji s skupnim emitorjem oziroma skupnim izvorom, saj je njegova izhodna admitanca mnogo manjša od  $g_{22}$ . Izhodna admitanca bi bila lahko še nižja, če bi izbrali večji  $R_E$ . Vendar bi tedaj za enak  $I_C$  potrebovali Zenerjevo diodo z večjim  $U_Z$  in s tem tudi višjo napajalno napetost. Teoretično bi pri  $R_E \rightarrow \infty$  lahko dosegli

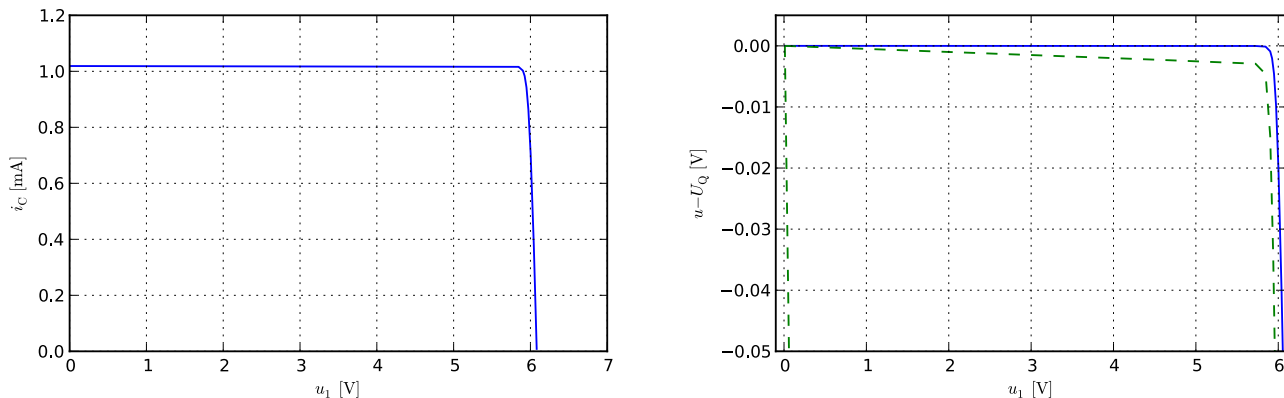
$$\frac{di_C}{du_1} = -\frac{g_{22}}{1 + \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11}}} = 39,8\text{nS} \quad (8.52)$$

kar ustreza  $25,2\text{M}\Omega$ .

Ko se upornost bremena  $R_L$  večja, raste padec napetosti na bremenu  $u_1$ , ki gre na račun napetosti  $u_{\text{CE}}$  tranzistorja. Ko postaneta  $R_L$  in z njim  $u_1$  dovolj velika, tranzistor pade iz aktivnega področja in vezje preneha delovati kot tokovni vir (slika 8.15, levo). To se v našem primeru zgodi pri  $u_1 > 5,8\text{V}$ .

Da smo upravičeno nadomestili  $r_z$  s kratkim stikom in imamo zato res opravka z orientacijo s skupno bazo, lahko vidimo na sliki 8.15 (desno). Slika prikazuje odstopanja potencialov baze, emitorja in kolektorja od delovne točke. Vidimo, da je potencial baze konstanten v celotnem območju  $u_1$ , kjer vezje deluje kot tokovni vir. To pomeni, da je v modelu za majhne signale baza vezana na referenčno sponko.

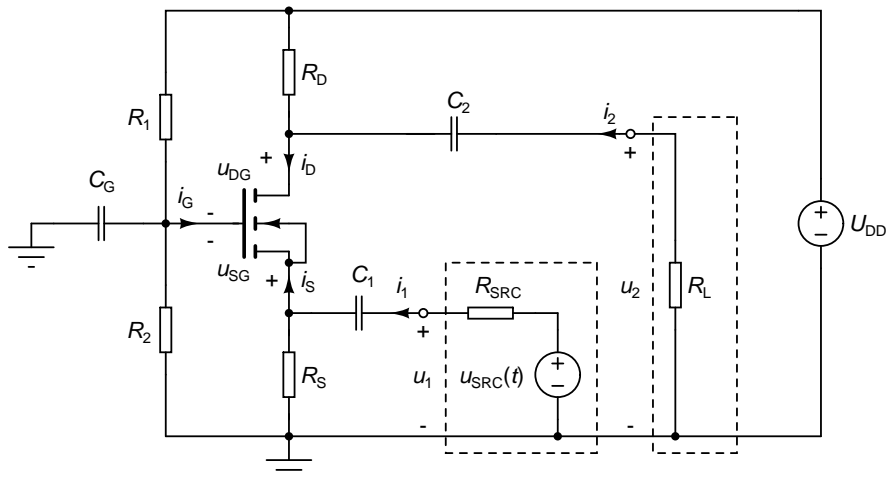
Ker sta za majhne vrednosti  $U_{\text{CE}}$  parametra  $g_{11}$  in  $g_{22}$  le malo odvisna od  $U_{\text{CE}}$ , tok  $I_C$  pa je praktično konstanten, so parametri  $g_{11}$ ,  $g_{21}$  in  $g_{22}$  v celotnem območju  $u_1$ , kjer vezje deluje kot tokovni vir, praktično konstantni. Posledično je konstantna tudi izhodna admitanca  $Y_{\text{out}}$ . Zaradi tega lahko v aktivnem področju tranzistorja tokovni vir modeliramo s preprostim nadomestnim vezjem, ki je podano na sliki 8.13 (desno).



Slika 8.15: Karakteristika tokovnega vira z Zenerjevo diodo in bipolarnim tranzistorjem. Odvisnost toka  $i_C$  od napetosti na bremenu  $u_1$  (levo). Odstopanje potencialov baze (polna črta) ter emitorja in kolektorja (črtkana črta) od delovne točke v odvisnosti od napetosti na bremenu (desno).

## 8.4 Orientacija s skupnimi vrati

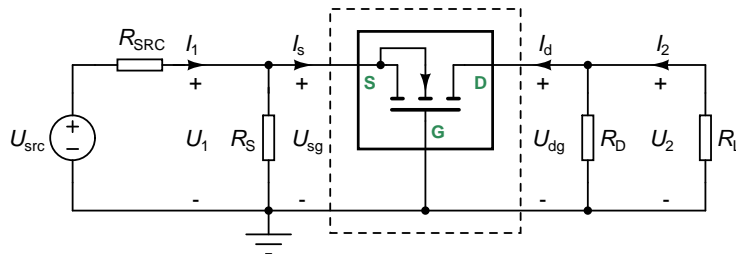
Orientacija unipolarnih tranzistorjev s skupnimi vrati je sorodna orientaciji bipolarnih tranzistorjev s skupno bazo. Vezje, v katerem MOS tranzistor nastopa v orientaciji s skupnimi vrati, je na sliki 8.16.



Slika 8.16: Ojačevalnik z MOS tranzistorjem v orientaciji s skupnimi vrati. Črtkan okvir na levi strani obdaja signalni vir, na desni strani pa breme.

Model vezja za majhne signale dobimo, ko upoštevamo, da napajalni vir  $U_{DD}$  predstavlja kratek stik za izmenične signale. Upora  $R_1$  in  $R_2$  se vežeta vzporedno in skupaj tvorita  $R_G = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . Upoštevamo še, da v srednjefrekvenčnem območju kondenzatorji  $C_1$ ,  $C_2$  in  $C_G$  predstavljajo kratek stik za izmenične signale. Zaradi  $C_G$  se upora  $R_1$  in  $R_2$  kratko skleneta in dobimo vezje na sliki 8.17.

Model vezja za majhne signale je na las podoben modelu, ki smo ga dobili za bipolarni tranzistor v orientaciji s skupno bazo (slika 8.11). Majhna odstopanja od delovne točke povezujejo admitančni parametri tranzistorja v



Slika 8.17: Model za majhne signale v srednjefrekvenčnem območju za vezje na sliki 8.16.

orientaciji s skupnimi vrati.

$$\begin{bmatrix} I_s \\ I_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11G} & y_{12G} \\ y_{21G} & y_{22G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{sg} \\ U_{dg} \end{bmatrix} = [Y_G] \begin{bmatrix} U_{sg} \\ U_{dg} \end{bmatrix}. \quad (8.53)$$

Tudi matrika admitančnih parametrov MOS tranzistorja v orientaciji s skupnimi vrati je zelo podobna tisti za bipolarni tranzistor v orientaciji s skupno bazo (8.31), le da moramo upoštevati  $g_{11} = 0$ .

$$[Y_G] = \begin{matrix} & \text{S} & \text{D} \\ \text{S} & \begin{bmatrix} g_{21} + g_{22} & -g_{22} \\ -(g_{21} + g_{22}) & g_{22} \end{bmatrix} \\ \text{D} & \end{matrix} = \begin{bmatrix} y_{11G} & y_{12G} \\ y_{21G} & y_{22G} \end{bmatrix}. \quad (8.54)$$

Če v enačbah (8.32)-(8.43) zamenjamo  $U_{eb}$ ,  $U_{cb}$ ,  $I_e$ ,  $I_c$ ,  $R_E$  in  $R_C$  z  $U_{sg}$ ,  $U_{dg}$ ,  $I_s$ ,  $I_d$ ,  $R_S$  in  $R_D$  ter upoštevamo  $g_{11} = 0$ , dobimo pripadajoče izraze za vhodne in prevajalne funkcije MOS tranzistorja v orientaciji s skupnimi vrati.

**Napetostno ojačenje** in največje napetostno ojačenje (enačbi (8.32) in (8.33)) znašata

$$A_U = \frac{U_{dg}}{U_{sg}} = \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{22} + R_D^{-1} + R_L^{-1}}, \quad (8.55)$$

$$A_{U,\max} = \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{22}} = 1 + \frac{g_{21}}{g_{22}}. \quad (8.56)$$

Napetostno ojačenje je pozitivno, kar pomeni, da MOS tranzistor v orientaciji s skupnimi vrati ne obrača faze napetosti. **Tokovno ojačenje** (enačba (8.34)) je enako

$$A_I = \frac{I_d}{I_s} = -\frac{g_{21} + g_{22}}{g_{21} + g_{22}} = -1 \quad (8.57)$$

in ni odvisno od bremena  $R_L$ . To je tudi razumljivo, saj je tok ponora  $i_D$  MOS tranzistorja enak toku izvora  $i_S$ , kar velja tudi za majhna odstopanja od delovne točke.

**Vhodna admitanca** sledi iz enačbe (8.37).

$$Y_{in} = \frac{g_{21} + g_{22}}{1 + \frac{g_{22}}{R_D^{-1} + R_L^{-1}}}. \quad (8.58)$$

Če je  $R_D$  ali  $R_L$  precej manjši od  $g_{22}^{-1}$ , lahko izraz (8.58) poenostavimo v

$$Y_{in} = g_{21} + g_{22} \approx g_{21}. \quad (8.59)$$

**Izhodna admitanca** MOS tranzistorja v orientaciji s skupnimi vrati sledi iz (8.40).

$$Y_{\text{out}} = \frac{I_d}{U_{\text{dg}}} = g_{22} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{21} + g_{22} + R_{\text{SRC}}^{-1} + R_{\text{S}}^{-1}}. \quad (8.60)$$

Izpostavimo  $g_{22}$ , preuredimo in upoštevamo  $g_{22} \ll g_{21}$ .

$$Y_{\text{out}} = \frac{g_{22}}{1 + \frac{g_{21} + g_{22}}{R_{\text{SRC}}^{-1} + R_{\text{S}}^{-1}}} \approx \frac{g_{22}}{1 + \frac{g_{21}}{R_{\text{SRC}}^{-1} + R_{\text{S}}^{-1}}}. \quad (8.61)$$

Za velike vrednosti  $R_{\text{SRC}}$  in  $R_{\text{S}}$  se izhodna admitanca bliža 0.

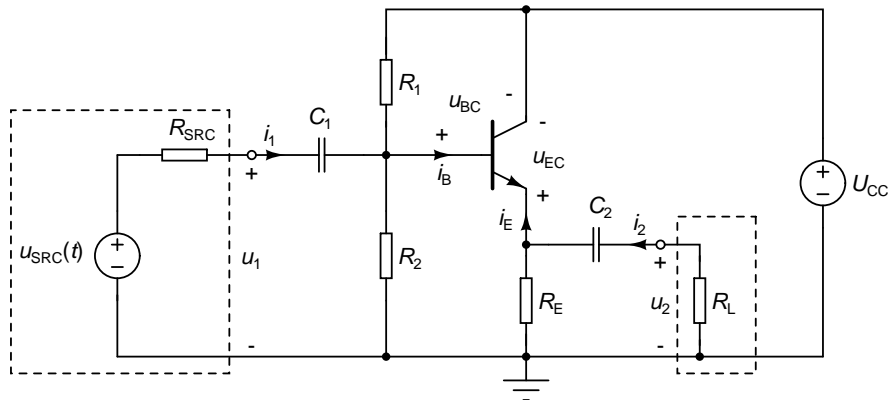
$$Y_{\text{out},\text{min}} = 0. \quad (8.62)$$

**Primer 8.5:** Recimo, da so admitančni parametri tranzistorja enaki (8.9)-(8.10),  $R_{\text{D}} = 5\text{k}\Omega$ ,  $R_{\text{L}} = 20\text{k}\Omega$ ,  $R_{\text{S}} = 1\text{k}\Omega$  in  $R_{\text{SRC}} = 100\Omega$ . Napetostno ojačenje znaša  $A_{\text{U}} = 15,84$  in ne more biti večje od  $A_{\text{U},\text{max}} = 1016$ . Tokovno ojačenje znaša  $A_{\text{I}} = -1$  in ni odvisno od elementov vezja. Za vhodno admitanco dobimo  $Y_{\text{in}} = 3,96\text{mS}$  (kar ustreza  $252\Omega$ ) in je zelo blizu vrednosti  $g_{21} = 4,02\text{mS}$ . Izhodna admitanca je enaka  $Y_{\text{out}} = 2,90\mu\text{S}$  (kar ustreza  $345\text{k}\Omega$ ).  $\triangle$

Orientacija MOS tranzistorja s skupnimi vrati se uporablja v podobne namene kot orientacija bipolarnega tranzistorja s skupno bazo. Za obe je značilno veliko napetostno ojačenje, tokovno ojačenje  $-1$ , velika vhodna admitanca ( $\approx g_{21}$ ) in majhna izhodna admitanca ( $\ll g_{22}$ ).

## 8.5 Orientacija s skupnim kolektorjem

Vezje z bipolarnim tranzistorjem v orientaciji s skupnim kolektorjem prikazuje slika 8.18. Vhodni signal pripekljemo na bazo, izhodni signal pa prihaja iz emitorja tranzistorja.

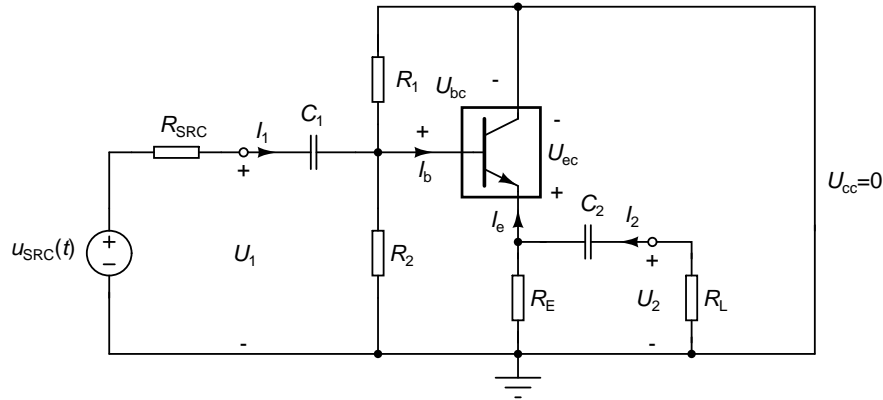


Slika 8.18: Ojačevalnik z bipolarnim tranzistorjem v orientaciji s skupnim kolektorjem. Črtkan okvir na levi strani obdaja signalni vir, na desni strani pa breme.

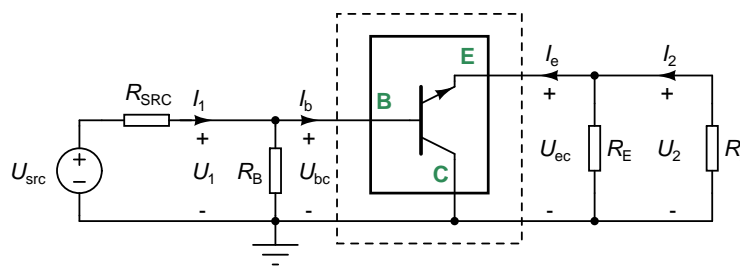
Model vezja za majhne signale dobimo, ko upoštevamo, da napajalni vir  $U_{\text{CC}}$  predstavlja kratek stik za izmenične signale (slika 8.19).

Upora  $R_1$  in  $R_2$  se zato vežeta vzporedno v  $R_{\text{B}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . V srednjefrekvenčnem območju predstavljata  $C_1$  in  $C_2$  kratek stik za izmenične signale. Sledi vezje na sliki 8.20.





Slika 8.19: Celoten model za majhne signale za vezje na sliki 8.18.



Slika 8.20: Model za majhne signale v srednjefrekvenčnem območju za vezje na sliki 8.18.

Zanimale nas bodo lastnosti dvovhodnega vezja, ki je na sliki 8.20 obdano s črtkano črto. To vezje predstavlja model tranzistorja za majhne signale v orientaciji s skupnim kolektorjem. Na svojem izhodu (emitorju) je tranzistor obremenjen z vzporedno vezavo uporov  $R_E$  in  $R_L$  s skupno impedanco  $R_E R_L / (R_E + R_L)$  in admitanco  $R_E^{-1} + R_L^{-1}$ .

Obnašanje tranzistorja za majhne signale v orientaciji s skupnim kolektorjem opisuje enačba

$$\begin{bmatrix} I_b \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11C} & y_{12C} \\ y_{21C} & y_{22C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{bc} \\ U_{ec} \end{bmatrix} = [Y_C] \begin{bmatrix} U_{bc} \\ U_{ec} \end{bmatrix}. \quad (8.63)$$

Pri določanju matrike admitančnih parametrov za orientacijo s skupnim kolektorjem izhajamo iz nedoločene admitančne matrike (8.30) v kateri črtamo vrstico in stolpec, ki pripadata skupni sponki (kolektorju). Dobimo

$$[Y_C] = \begin{matrix} & \text{B} & & \text{E} \\ \text{B} & \begin{bmatrix} g_{11} & -g_{11} \\ -(g_{11} + g_{21}) & g_{11} + g_{21} + g_{22} \end{bmatrix} & & \\ \text{E} & & & \end{matrix} = \begin{bmatrix} y_{11C} & y_{12C} \\ y_{21C} & y_{22C} \end{bmatrix}. \quad (8.64)$$

Matrika  $[Y_C]$  je hkrati tudi matrika admitančnih parametrov s črtkano črto obdanega dvovhodnega vezja na sliki 8.20. Determinanta te matrike je enaka  $D_{Y_C} = g_{11}(g_{11} + g_{21} + g_{22}) - g_{11}(g_{11} + g_{21}) = g_{11}g_{22}$ . Sedaj se lahko lotimo izračuna vhodnih in prevajalnih funkcij tranzistorja v orientaciji s skupnim kolektorjem.

**Napetostno ojačenje** dobimo s pomočjo enačbe (2.46) v katero namesto  $Y_L$  vstavimo  $Y_{TL} = R_E^{-1} + R_L^{-1}$ .

$$A_U = \frac{U_{ec}}{U_{bc}} = -\frac{y_{21C}}{y_{22C} + R_E^{-1} + R_L^{-1}} = \frac{g_{11} + g_{21}}{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (8.65)$$

Največje napetostno ojačenje dobimo, ko sta  $R_E$  in  $R_L$  zelo velika.

$$A_{U,\max} = \frac{g_{11} + g_{21}}{g_{11} + g_{21} + g_{22}} = 1 - \frac{g_{22}}{g_{11} + g_{21} + g_{22}} \stackrel{g_{22} \ll g_{21}}{\approx} 1. \quad (8.66)$$

Vidimo, da je največje napetostno ojačenje manjše od 1. Ker je  $g_{22} \ll g_{21}$ , je skoraj enako 1. Zaradi te lastnosti orientacijo s skupnim kolektorjem imenujemo tudi **napetostni sledilnik** oziroma **emitorski sledilnik**.

**Tokovno ojačenje** sledi iz enačbe (2.52) kamor namesto  $Z_L$  vstavimo  $Z_{TL} = R_E R_L / (R_E + R_L)$ .

$$A_I = \frac{I_e}{I_b} = \frac{y_{21C}}{y_{11C} + D_{Y_C} \frac{R_E R_L}{R_E + R_L}} = -\frac{g_{11} + g_{21}}{g_{11} + g_{11} g_{22} \frac{R_E R_L}{R_E + R_L}} = -\frac{1 + \beta}{1 + g_{22} \frac{R_E R_L}{R_E + R_L}}. \quad (8.67)$$

Če je  $R_E R_L / (R_E + R_L)$  mnogo manjše od  $g_{22}^{-1}$  (ko sta  $R_E$  in  $R_L$  majhna) je tokovno ojačenje največje in enako

$$A_{I,\max} = -(1 + \beta). \quad (8.68)$$

Celotno vezje na sliki 8.20, ki leži desno od baze tranzistorja, lahko nadomestimo z **vhodno admitanco** tranzistorja (enačba (2.55)).

$$Y_{in} = \frac{I_b}{U_{bc}} = y_{11C} - \frac{y_{12C} y_{21C}}{y_{22C} + R_E^{-1} + R_L^{-1}} = g_{11} - \frac{g_{11}(g_{11} + g_{21})}{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (8.69)$$

Po izpostavitvi  $g_{11}$  in nekaj preurejanja dobimo

$$Y_{in} = g_{11} \frac{g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}}{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}} = \frac{g_{11}}{1 + \frac{g_{11} + g_{21}}{g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}}}. \quad (8.70)$$

Vidimo, da je vhodna admitanca manjša od  $g_{11}$ . Najmanjša postane, ko sta  $R_E$  in  $R_L$  mnogo večja od  $g_{22}^{-1}$ .

$$Y_{in,\min} = \frac{g_{11}}{1 + \frac{g_{11} + g_{21}}{g_{22}}} \stackrel{g_{11} \ll g_{21}}{\approx} \frac{g_{11}}{1 + \frac{g_{21}}{g_{22}}}. \quad (8.71)$$

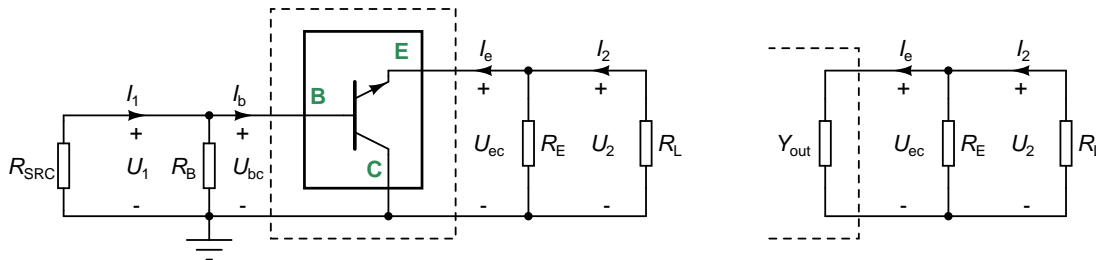
V zvezi z vhodno impedanco tranzistorja v orientaciji s skupnim kolektorjem ( $Z_{in} = 1/Y_{in}$ ) srečamo pogosto še drugo obliko izraza (8.70).

$$Z_{in} = g_{11}^{-1} \left( 1 + \frac{g_{11} + g_{21}}{g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}} \right) = g_{11}^{-1} + \frac{1 + \beta}{g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}} = g_{11}^{-1} + (1 + \beta) Z_E. \quad (8.72)$$

Z  $Z_E$  smo označili impedanco vzporedne vezave  $R_E$ ,  $R_L$  in  $g_{22}^{-1}$ .

$$Z_E = \frac{1}{g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (8.73)$$

Če za kratek čas odmislimo  $g_{22}^{-1}$ , ki je ponavadi mnogo večji od  $R_E$  in  $R_L$  (in zato ne igra bistvene vloge v vzporedni vezavi), vidimo, da (8.72) pravzaprav predstavlja preslikavo impedance z emitorske (izhodne) strani na bazno (vhodno) stran. Pri tem se impedanca priključena na izhod tranzistorja pomnoži z  $1 + \beta$  in tako močno poveča.



Slika 8.21: Za določanje izhodne admittance tranzistorja  $Y_{\text{out}}$  izklopimo signalni vir, ki se spremeni v kratak stik (levo). Celotno vezje levo od emitorja tranzistorja lahko nadomestimo z izhodno admittance tranzistorja (desno).

Pri določanju **izhodne admittance** najprej izklopimo signalni vir (slika 8.21). Tranzistor je levo od baze priključen na vzporedno vezavo  $R_{\text{SRC}}$  in  $R_B$  katere admittance je enaka  $Y_{\text{TS}} = R_{\text{SRC}}^{-1} + R_B^{-1}$ . Spet uporabimo enačbo (2.57) v kateri  $Y_{\text{SRC}}$  nadomestimo z  $Y_{\text{TS}}$ .

$$Y_{\text{out}} = \frac{I_e}{U_{\text{ec}}} = y_{22\text{C}} - \frac{y_{12\text{C}}y_{21\text{C}}}{y_{11\text{C}} + R_{\text{SRC}}^{-1} + R_B^{-1}} = g_{11} + g_{21} + g_{22} - \frac{g_{11}(g_{11} + g_{21})}{g_{11} + R_{\text{SRC}}^{-1} + R_B^{-1}}. \quad (8.74)$$

Izraz za  $Y_{\text{out}}$  lahko poenostavimo

$$Y_{\text{out}} = g_{22} + (g_{11} + g_{21}) \left( 1 - \frac{g_{11}}{g_{11} + R_{\text{SRC}}^{-1} + R_B^{-1}} \right) = g_{22} + (g_{11} + g_{21}) \frac{R_{\text{SRC}}^{-1} + R_B^{-1}}{g_{11} + R_{\text{SRC}}^{-1} + R_B^{-1}}. \quad (8.75)$$

Če velja  $R_{\text{SRC}}^{-1} + R_B^{-1} \gg g_{11}$  (če je  $R_{\text{SRC}}$  ali  $R_B$  majhen v primerjavi z  $g_{11}^{-1}$ ), se izraz (8.75) še bolj poenostavi.

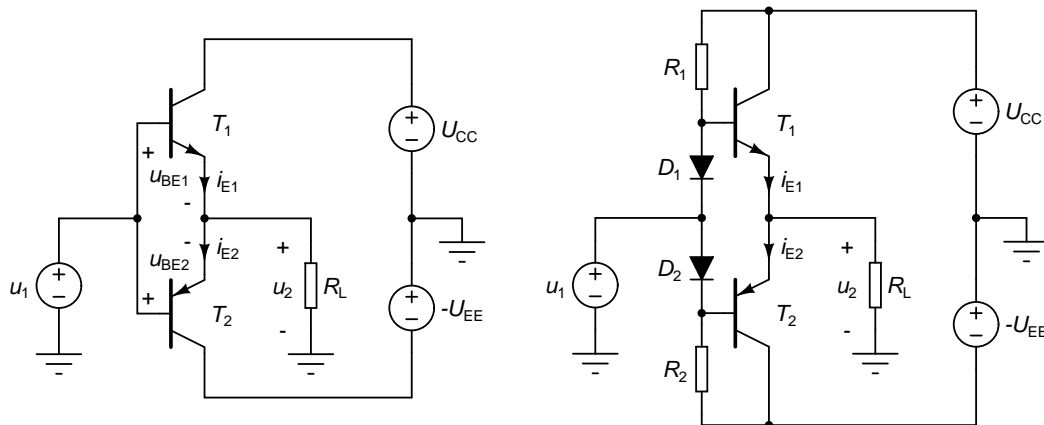
$$Y_{\text{out}} \approx g_{11} + g_{21} + g_{22} \stackrel{g_{11}, g_{22} \ll g_{21}}{\approx} g_{21}. \quad (8.76)$$

Orientacija s skupnim kolektorjem ima torej nizko vhodno admittance in visoko izhodno admittance ( $g_{21}$ ). Zaradi visoke izhodne admittance je zelo primerna za krmiljenje nizkoohmskih bremen, kot so naprimer zvočniki. Ponavadi se nahaja v končnih stopnjah ojačevalnikov. Ker pa je napetostno ojačenje tranzistorja v orientaciji s skupnim kolektorjem malo manj kot 1, potrebujemo še predhodno ojačevalno stopnjo, ki zagotovi zadostno napetostno ojačenje. Druga pogosta uporaba orientacije s skupnim kolektorjem je izvedba napetostnih virov, ki prav tako zahtevajo visoko izhodno admittance (nizko izhodno impedanco).

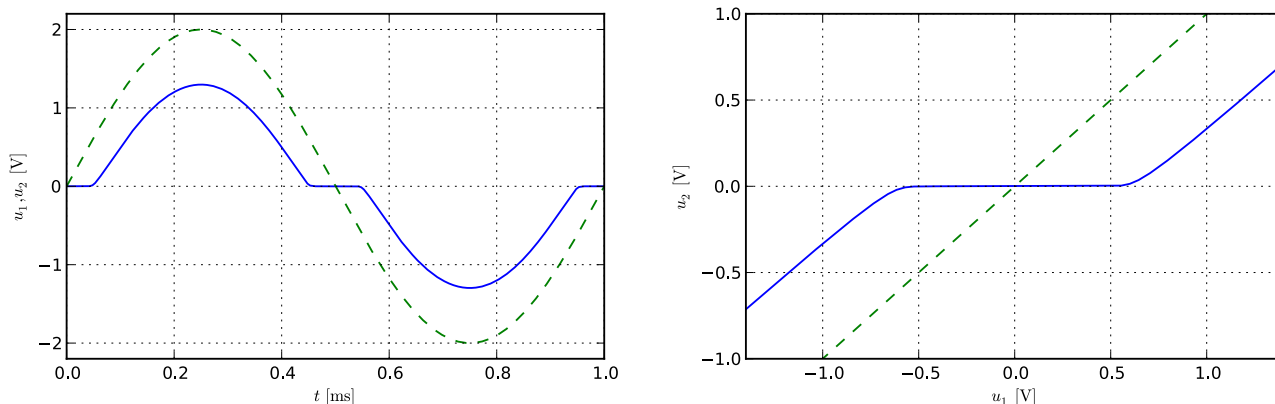
**Primer 8.6:** Vzemimo, da imamo tranzistor s parametri (8.3)-(8.5) ter  $R_E = 5\text{k}\Omega$ ,  $R_L = 1\text{k}\Omega$ ,  $R_1 = R_2 = 100\text{k}\Omega$  in  $R_{\text{SRC}} = 100\Omega$ . Napetostno ojačenje tranzistorja v orientaciji s skupnim kolektorjem je enako  $A_U = 0,9695$ , največje ojačenje pa je  $A_{U,\text{max}} = 0,9995$ . Tokovno ojačenje znaša  $A_I = -434$ , največ pa je lahko  $A_{I,\text{max}} = -441$ .

Vhodna admittance tranzistorja je  $Y_{\text{in}} = 2,68\mu\text{S}$  (kar ustreza  $373\text{k}\Omega$ ). Najmanjša možna vhodna admittance je  $Y_{\text{in},\text{min}} = 41,2\text{nS}$  (kar ustreza  $24,3\text{M}\Omega$ ). Izhodna admittance znaša  $Y_{\text{out}} = 38,5\text{mS}$  (kar ustreza  $26,0\Omega$ ). To je zelo blizu vrednosti  $g_{21} = 38,68\text{mS}$ , ki jo dobimo s poenostavljenim izrazom (8.76).  $\triangle$

Poglejmo si eno pogostejših uporab orientacije s skupnim kolektorjem. Slika 8.22 (levo) prikazuje zasnovano **končne ojačevalne stopnje z NPN in PNP tranzistorjema (ang. push-pull vezava)**, ki imata enake karakteristike. Takima tranzistorjema pravimo, da sta **komplementarna**. Tranzistorja sta vezana v orientaciji s skupnim kolektorjem. Breme predstavlja upor  $R_L$ . Napajalni napetosti sta ponavadi simetrični ( $U_{\text{CC}} = -U_{\text{EE}} > 0$ ).



Slika 8.22: Končna ojačevalna stopnja s komplementarnima tranzistorjema v orientaciji s skupnim kolektorjem. Idejna zasnova vezja (levo) in dopolnjeno vezje, ki nima mrtvega območja (desno).



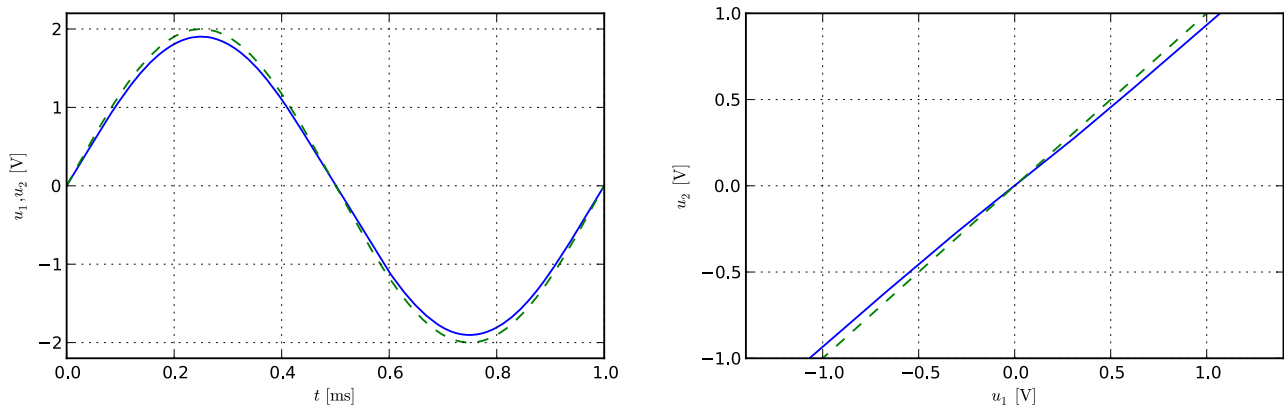
Slika 8.23: Levo: časovni potek izhodne napetosti (polna črta) za sinusno vhodno napetost (črtkana črta) za vezje na sliki 8.22 (levo). Desno: odvisnost izhodne od vhodne napetosti. Črtkana črta prikazuje idealen potek  $u_2 = u_1$ .

Za pozitivne vrednosti  $u_1$  napaja breme NPN tranzistor  $T_1$ , za negativne pa PNP tranzistor  $T_2$ . Ker sta napetosti  $u_{BE1}$  in  $-u_{BE2}$  obeh tranzistorjev v aktivnem področju enaki kolenski napetosti  $U_K = 0,7V$ , pričakujemo, da bo napetost na bremenu  $u_2$  za  $U_K$  nižja od vhodne napetosti  $u_1$ .

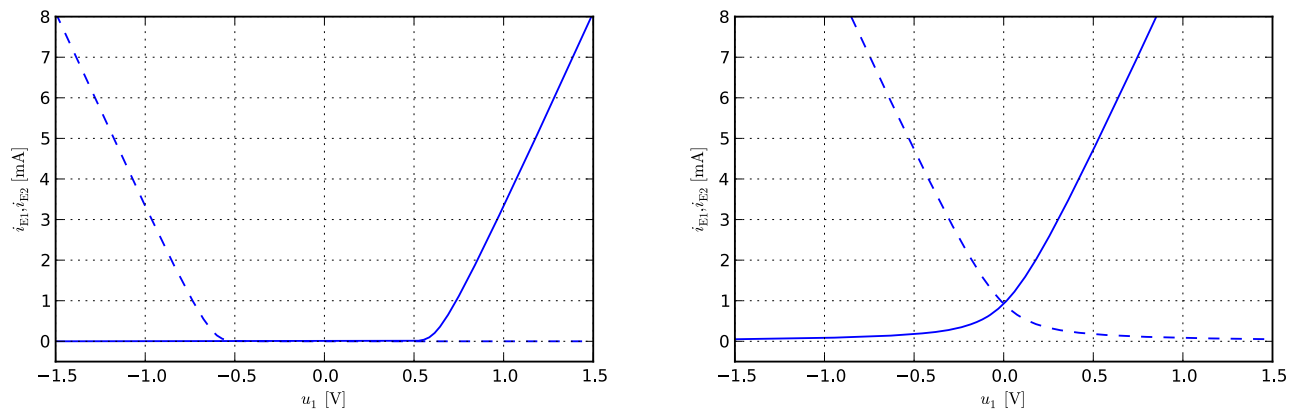
Vezje na videz ne počne nič koristnega, saj je izhodna napetost enaka vhodni. Pomen vezja postane očiten, ko se zavemo, da je bazni tok za  $1 + \beta$  krat manjši od emitorkega toka, ki teče tudi skozi breme. To pomeni, da z majhnimi vhodnimi tokovi vira  $u_1$  lahko krmilimo velike tokove skozi breme  $R_L$ . Vendar pa ima vezje eno veliko pomanjkljivost. Če je vhodna napetost sinusna, je izhodna napetost le podobna sinusni, saj so vrednosti okoli 0V porezane. Pravimo, da ima vezje **mrtvo območje** (slika 8.23, levo). Mrtvo območje je lepo vidno, če narišemo odvisnost izhodne od vhodne napetosti (slika 8.23, desno).

Mrtvega območja se lahko znebimo, če poskrbimo, da sta ob  $u_1 = 0$  oba tranzistorja odprta (za  $T_1$  to pomeni, da je  $u_{BE1} = U_K$ ). Za dodatnih  $U_K = 0.7V$  napetosti poskrbita diodi  $D_1$  in  $D_2$ , ki ju napajamo preko uporov  $R_1 = R_2$  (slika 8.22, desno). Potek izhodne napetosti in odvisnost  $u_2(u_1)$  sta prikazana na sliki 8.24.

Odpravljanje mrtvega območja pa ima tudi svojo ceno. Za vezje z mrtvim območjem (slika 8.22, levo) pri  $u_1 = 0$  emitorska tokova ne tečeta (slika 8.25, levo). V nasprotju s tem v vezju, kjer odpravimo mrtvo območje s pomočjo



Slika 8.24: Levo: časovni potek izhodne napetosti (polna črta) za sinusno vhodno napetost (črtkana črta) za vezje na sliki 8.22 (desno). Desno: odvisnost izhodne od vhodne napetosti. Črtkana črta prikazuje idealen potek  $u_2 = u_1$ .



Slika 8.25: Levo: odvisnost emitorskih tokov  $i_{E1}$  (polna črta) in  $i_{E2}$  (črtkana črta) od vhodne napetosti  $u_1$  za vezje na sliki 8.22 (levo). Desno: emitorski tokovi za vezje na sliki 8.22 (desno).

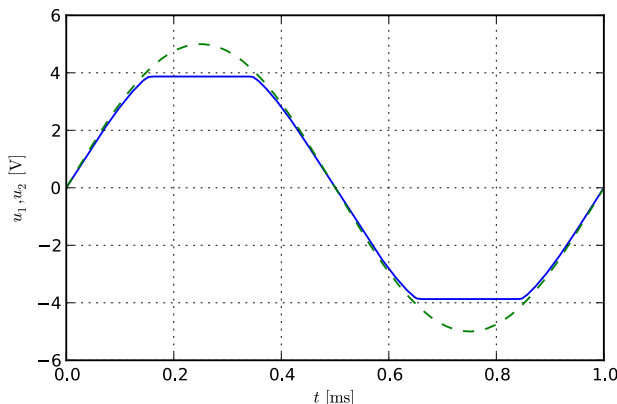
diod (slika 8.22, desno), teče nek emitorski tok tudi pri  $u_1 = 0$  (slika 8.25, desno). Njegovo velikost določata upora  $R_1$  in  $R_2$ . Ta tok povzroča, da se tranzistorja segrevata, tudi ko ni vhodnega signala.

Vezje na sliki 8.22 (desno) ima še eno slabo lastnost. Če izberemo prevelik  $R_1 = R_2$ , je signal pri velikih amplitudah porezan mnogo prej, preden tranzistor doseže mejo aktivnega področja (ko velja  $u_2 = U_{CC} - U_K$ ). Z večanjem  $u_1$  se namreč manjša napetost na diodi  $D_1$ . Ko se dioda zapre, vhodni signal preneha krmiliti tranzistor  $T_1$ , ki ga sedaj krmili samo še  $R_1$ . Ker je tedaj tranzistor  $T_2$  že zaprt, je tok bremena enak emitornemu toku  $i_{E1}$ . Njegovo največjo vrednost  $i_{E1,\max}$  določa enačba

$$U_{CC} - R_1 \frac{i_{E1,\max}}{1 + \beta} - U_K - R_L i_{E1,\max} = 0. \quad (8.77)$$

Največja napetost na bremenu je zato enaka

$$u_{2,\max} = R_L i_{E1,\max} = (U_{CC} - U_K) \left( 1 + \frac{R_1}{R_L} \frac{1}{1 + \beta} \right)^{-1}. \quad (8.78)$$



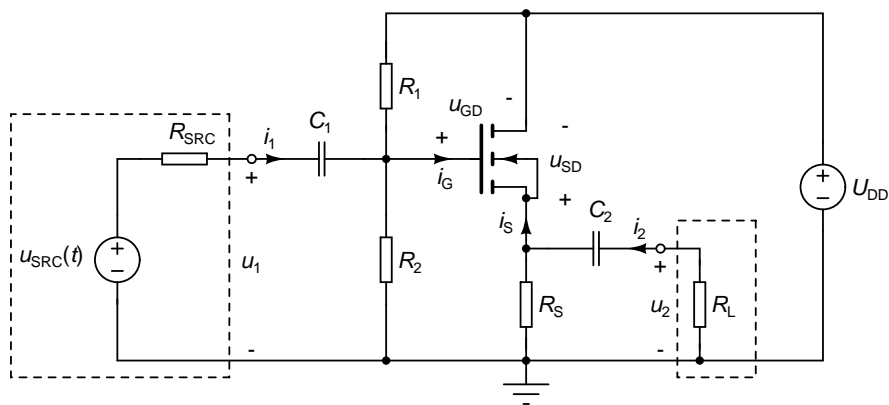
Slika 8.26: Rezanje izhodne napetosti zaradi zaprtja diod  $D_1$  in  $D_2$  v vezju na sliki 8.22 (desno). Črtkana črta prikazuje potek vhodne napetosti.

Napetost  $u_2$  je omejena tudi navzdol. Da dobimo spodnjo mejo  $u_2$  moramo v enačbo (8.78) vstaviti  $R_2$  in  $U_{EE}+U_K$  namesto  $R_1$  in  $U_{CC}-U_K$ . Razmere za  $\beta = 200$ ,  $R_1 = R_2 = 2\text{k}\Omega$ ,  $R_L = 100$  in  $U_{CC} = -U_{EE} = 5\text{V}$  prikazuje slika 8.26. S pomočjo (8.78) dobimo  $u_{2,\text{max}} = 3,91\text{V}$ .

Ob ustrezno načrtovanem vezju velja za izhodno admitanco vezja za majhne signale enačba (8.76). Parameter  $g_{21}$  je odvisen od toka kolektorja v delovni točki ( $I_{CQ}$ ), ki je zaradi velikega  $\beta$  približno enak emitorskemu toku in s tem tudi toku bremena. Tako je pri  $I_E = 1\text{mA}$  toka skozi breme izhodna admitanca enaka  $38,7\text{mS}$ , pri  $100\text{mA}$  pa znaša že  $3,87\text{S}$  (kar ustreza  $0,26\Omega$ ). S tokom bremena spreminjajoča se izhodna admitanca je eden od virov nelinearnosti v opisani končni ojačevalni stopnji. Nelinearnost lahko v veliki meri odpravimo s pomočjo negativne povratne vezave. O slednji bomo več povedali v poglavju 11.

## 8.6 Orientacija s skupnim ponorom

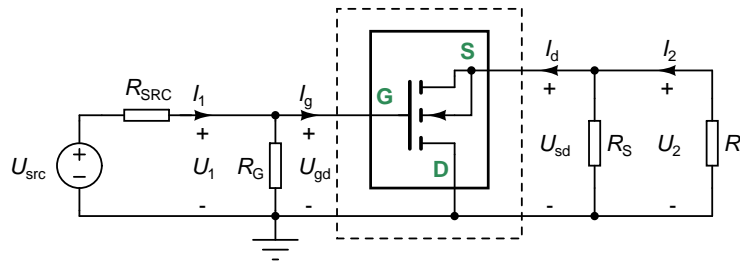
Orientacija unipolarnih tranzistorjev s skupnim ponorom je sorodna orientaciji bipolarnih tranzistorjev s skupnim kolektorjem. Vezje, v katerem MOS tranzistor nastopa v orientaciji s skupnim ponorom, je na sliki 8.16.



Slika 8.27: Ojačevalnik z MOS tranzistorjem v orientaciji s skupnim ponorom. Črtkan okvir na levi strani obdaja signalni vir, na desni strani pa breme.

Model vezja za majhne signale dobimo, ko upoštevamo, da napajalni vir  $U_{DD}$  predstavlja kratek stik za izmenične

signale. Upora  $R_1$  in  $R_2$  se vežeta vzporedno in skupaj tvorita  $R_G = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ . Upoštevamo še, da v srednjefrekvenčnem območju predstavljata kondenzatorja  $C_1$  in  $C_2$  kratek stik za izmenične signale in dobimo vezje na sliki 8.28.



Slika 8.28: Model za majhne signale v srednjefrekvenčnem območju za vezje na sliki 8.27.

Model vezja za majhne signale je na las podoben modelu, ki smo ga dobili za bipolarni tranzistor v orientaciji s skupnim kolektorjem (slika 8.20). Majhna odstopanja od delovne točke povezujejo admitančni parametri tranzistorja v orientaciji s skupnim ponorom.

$$\begin{bmatrix} I_g \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11D} & y_{12D} \\ y_{21D} & y_{22D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{gd} \\ U_{sd} \end{bmatrix} = [Y_D] \begin{bmatrix} U_{gd} \\ U_{sd} \end{bmatrix}. \quad (8.79)$$

Tudi matrika admitančnih parametrov MOS tranzistorja v orientaciji s skupnim ponorom je zelo podobna tisti za bipolarni tranzistor v orientaciji s skupnim kolektorjem (8.64), le da sedaj velja  $g_{11} = 0$ .

$$[Y_D] = \begin{matrix} & \begin{matrix} G & S \end{matrix} \\ \begin{matrix} G \\ S \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -g_{21} & g_{21} + g_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} y_{11D} & y_{12D} \\ y_{21D} & y_{22D} \end{bmatrix}. \quad (8.80)$$

Če v enačbah (8.65)-(8.74) zamenjamo  $U_{bc}$ ,  $U_{ec}$ ,  $I_b$ ,  $I_e$ ,  $R_E$  in  $R_B$  z  $U_{gd}$ ,  $U_{sd}$ ,  $I_g$ ,  $I_s$ ,  $R_S$  in  $R_G$  ter upoštevamo  $g_{11} = 0$ , dobimo pripadajoče izraze za vhodne in prevajalne funkcije MOS tranzistorja v orientaciji s skupnim ponorom.

**Napetostno ojačenje** (enačba (8.65)) znaša

$$A_U = \frac{U_{sd}}{U_{gd}} = \frac{g_{21}}{g_{21} + g_{22} + R_S^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (8.81)$$

Največje napetostno ojačenje dobimo, ko sta  $R_S$  in  $R_L$  zelo velika.

$$A_{U,\max} = \frac{g_{21}}{g_{21} + g_{22}} = 1 - \frac{g_{22}}{g_{21} + g_{22}} \stackrel{g_{22} \ll g_{21}}{\approx} 1. \quad (8.82)$$

**Tokovno ojačenje** tranzistorja je enako

$$A_I = \frac{I_s}{I_g} = -\infty. \quad (8.83)$$

Ojačenje je neskončno, ker je tok v vrata tranzistorja  $I_g = 0$ . To pa ne pomeni, da ima tudi ojačevalnik neskončno tokovno ojačenje. Vhodni tok  $I_1$  je določen z  $R_G$ . Tokovno ojačenje tako znaša

$$A_{I,\text{oj}} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{-\frac{U_2}{R_L}}{\frac{U_1}{R_G}} = -\frac{U_2 R_G}{U_1 R_L} = -A_U \frac{R_G}{R_L} = -\frac{g_{21}}{g_{21} + g_{22} + R_S^{-1} + R_L^{-1}} \frac{R_G}{R_L}. \quad (8.84)$$

Vhodna admitanca tranzistorja (enačba (8.70)) je enaka

$$Y_{\text{in}} = \frac{I_g}{U_{\text{gd}}} = 0. \quad (8.85)$$

Izhodna admitanca sledi iz (8.74).

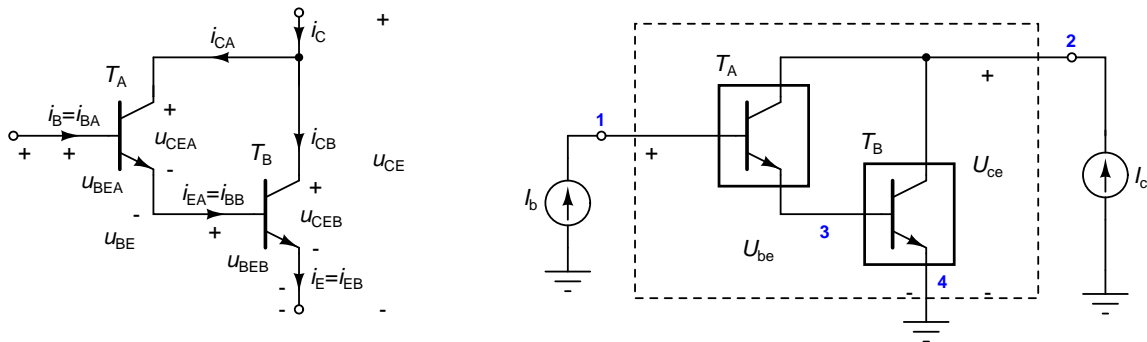
$$Y_{\text{out}} = \frac{I_s}{U_{\text{sd}}} = g_{21} + g_{22} \stackrel{g_{22} \ll g_{21}}{\approx} g_{21} \quad (8.86)$$

**Primer 8.7:** Recimo, da so admitančni parametri tranzistorja enaki (8.9)-(8.10),  $R_S = 5\text{k}\Omega$ ,  $R_L = 20\text{k}\Omega$  in  $R_{\text{SRC}} = 100\Omega$ . Napetostno ojačenje znaša  $A_U = 0,941$  in ne more biti večje od  $A_{U,\text{max}} = 0,999$ . Izhodna admitanca je enaka  $Y_{\text{out}} = 4,02\text{mS}$  (kar ustreza  $249\Omega$ ).  $\triangle$

Orientacija MOS tranzistorja s skupnim ponorom se uporablja v podobne namene kot orientacija bipolarnega tranzistorja s skupnim kolektorjem. Za obe je značilno napetostno ojačenje blizu 1, veliko tokovno ojačenje, majhna vhodna admitanca in velika izhodna admitanca ( $g_{21}$ ). Zaradi velike izhodne admittance uporabljamo tranzistor v orientaciji s skupnim ponorom (ali kolektorjem) kot napetostni vir. V to skupino spada tudi vezje s komplementarnima tranzistorjema v orientaciji s skupnim kolektorjem, ki smo ga spoznali v poglavju 8.5.

## 8.7 Darlingtonova vezava

Ta vezava se uporablja pri bipolarnih tranzistorjih. Ime je dobila po svojem izumitelju Sidneyu Darlingtonu, ki je vložil patent zanjo leta 1952 [16]. Kolektorja dveh tranzistorjev povežemo skupaj, emitorski tok prvega tranzistorja pa peljemo v bazo drugega tranzistorja. Tako dobimo nov trolepni element, ki je podoben bipolarnemu tranzistorju tipa NPN in ima veliko tokovno ojačenje. Slika 8.29 (levo) prikazuje Darlingtonovo vezavo dveh NPN tranzistorjev.



Slika 8.29: Darlingtonova vezava dveh NPN tranzistorjev (levo) in pripadajoč model vezja za majhne signale v srednjefrekvenčnem območju z vzbujanjem (desno).

Ponavadi v Darlingtonovo vezavo povežemo dva enaka tranzistorja. Za določanje delovne točke vezij v katerih tranzistorja delujeta v aktivnem področju predpostavimo, da je kolektorski tok tranzistorja neodvisen od napetosti  $u_{CE}$  (oziroma  $V_{AF} \rightarrow \infty$ ). Tako lahko uporabimo že znane enačbe (6.5)-(6.6) in dobimo

$$U_{BE} = U_{BEA} + U_{BEB} = 2U_K, \quad (8.87)$$

$$\begin{aligned} I_C &= I_{CA} + I_{CB} = \beta_F I_{BA} + I_{CEO} + \beta_F I_{BB} + I_{CEO} \\ &= \beta_F I_B + I_{CEO} + \beta_F ((1 + \beta_F) I_B + I_{CEO}) + I_{CEO} \\ &= \beta_F (2 + \beta_F) I_B + (2 + \beta_F) I_{CEO} \\ &= (2 + \beta_F) (\beta_F I_B + I_{CEO}), \end{aligned} \quad (8.88)$$



pri čemer je  $U_K = 0,7V$ . Vidimo, da se pri računanju delovne točke Darlingtonova vezava obnaša kot tranzistor z  $\beta'_F = (2 + \beta_F)\beta_F \approx \beta_F^2$  in tokom  $I'_{CEO} = (2 + \beta_F)I_{CEO} \approx \beta_F I_{CEO}$ .

Na sliki 8.29 (desno) je prikazan model vezja za majhne signale v srednjefrekvenčnem območju, ki mu je že dodano vzbujanje s pomočjo katerega bomo določili matriko admitančnih parametrov. Sponki 1 in 2 predstavljata bazo in kolektor, sponka 4 pa emitor Darlingtonove vezave. Notranje vozlišče (stičišče emitorja  $T_A$  z bazo  $T_B$ ) označimo s 3. Da določimo admitančne parametre Darlingtonove vezave potrebujemo admitančne parametre obeh tranzistorjev. Tranzistorja ne delujeta v enaki delovni točki, saj je kolektorki tok  $T_A$  mnogo manjši od kolektorskega toka  $T_B$ .

Da ostanejo enačbe obvladljive, bomo naredili nekaj poenostavitev. Predpostavili bomo, da je  $\beta_F$  velik in velja  $\beta_A \approx \beta_F \approx \beta_B$ . To tudi drži, če je  $V_{AF}$  dovolj velik, napetosti  $U_{CE}$  pa dovolj majhne. Tako lahko povsod v enačbah za oba tranzistorja uporabljamo kar  $\beta$ . Tok  $I_{CEO}$  bomo zanemarili, saj je velikostnega reda  $\mu A$ . Za napetosti med kolektorjem in emitorjem velja  $U_{CE} = U_{CEB} = U_{CEA} + U_K \approx U_{CEA}$ .

Ob povedanem za kolektorski tok  $T_B$  velja

$$I_{CB} \approx \beta I_{EA} = \beta \left( I_{CA} + \frac{1}{\beta} I_{CA} \right) \approx \beta I_{CA}. \quad (8.89)$$

Kolektorski tok Darlingtonove vezave je približno enak

$$I_C = I_{CA} + I_{CB} \approx \frac{I_{CB}}{\beta} + I_{CB} \approx I_{CB}. \quad (8.90)$$

Če za tranzistor  $T_A$  predpostavimo admitančne parametre za orientacijo s skupnim emitorjem  $g_{11A} = g_{11}$ ,  $g_{12A} = 0$ ,  $g_{21A} = g_{21}$  in  $g_{22A} = g_{22}$ , potem lahko admitančne parametre tranzistorja  $T_B$  izrazimo kot

$$g_{21B} = \frac{I_{CB}}{V_T} \approx \frac{\beta I_{CA}}{V_T} = \beta g_{21}, \quad (8.91)$$

$$g_{11B} = \frac{g_{21B}}{\beta} \approx \frac{\beta g_{21}}{\beta} = \beta g_{11}, \quad (8.92)$$

$$g_{22B} = \frac{I_{CB}}{U_{CEB} + V_{AF}} \approx \frac{\beta I_{CA}}{U_{CEA} + V_{AF}} = \beta g_{22}, \quad (8.93)$$

$$g_{12B} = 0. \quad (8.94)$$

Vidimo, da so admitančni parametri tranzistorja  $T_B$  za  $\beta$  krat večji od parametrov tranzistorja  $T_A$ . Ker iščemo admitančne parametre Darlingtonove vezave za orientacijo s skupnim emitorjem (sponko 4), bo ta sponka predstavljala referenčno vozlišče. V vozliščno admitančno matriko tranzistor  $T_A$  prispeva

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccc} g_{11} & 0 & -g_{11} \\ g_{21} & g_{22} & -(g_{21} + g_{22}) \\ -(g_{11} + g_{21}) & -g_{22} & g_{11} + g_{21} + g_{22} \end{array} \right], \end{matrix} \quad (8.95)$$

tranzistor  $T_B$  pa

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22B} & g_{21B} \\ 0 & 0 & g_{11B} \end{array} \right] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta g_{22} & \beta g_{21} \\ 0 & 0 & \beta g_{11} \end{array} \right]. \end{matrix} \quad (8.96)$$

Ko prispevka (8.95) in (8.96) združimo skupaj s prispevkoma tokovnih virov, dobimo sistem enačb z neznankami  $U_{be}$ ,  $U_{ce}$  in  $V_4$ , ki ga v obliki razširjene matrike sistema lahko zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & -g_{11} \\ g_{21} & (1 + \beta)g_{22} & (\beta - 1)g_{21} - g_{22} \\ -(g_{11} + g_{21}) & -g_{22} & (1 + \beta)g_{11} + g_{21} + g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.97)$$

Ob upoštevanju  $g_{22} \ll g_{21}$ ,  $\beta \gg 1$ ,  $\beta g_{11} = g_{21}$  in  $g_{21} \gg g_{11}$  lahko sistem (8.97) poenostavimo v

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & -g_{11} \\ g_{21} & \beta g_{22} & \beta g_{21} \\ -g_{21} & -g_{22} & 2g_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.98)$$

Da pridemo do matrike admitančnih parametrov, moramo eliminirati tretjo vrstico in stolpec (neznanko  $V_4$ ). Po eliminaciji dobimo sistem enačb

$$\begin{bmatrix} g_{11} - \frac{g_{11}g_{21}}{2g_{21}} & -\frac{g_{11}g_{22}}{2g_{21}} \\ g_{21} + \frac{\beta}{2}g_{21} & \beta g_{22} + \frac{\beta}{2}g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{be} \\ U_{ce} \end{bmatrix}. \quad (8.99)$$

Če upoštevamo  $g_{21} = \beta g_{11}$  in  $\beta \gg 1$ , lahko naredimo še nekaj poenostavitev, ki nas pripeljejo do končne oblike sistema enačb (8.99).

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}g_{11} & -\frac{1}{2\beta}g_{22} \\ \frac{\beta}{2}g_{21} & \frac{3\beta}{2}g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{be} \\ U_{ce} \end{bmatrix}. \quad (8.100)$$

Iz enačbe (8.100) lahko razberemo admitančne parametre Darlingtonove vezave za orientacijo s skupnim emitorjem (sponko 4). Pri tem povsod velja približna enakost ( $\approx$ ), saj smo na poti do rezultata naredili kar nekaj poenostavitev.

$$g_{21DE} \approx \frac{\beta}{2}g_{21} = \frac{\beta I_{CA}}{2V_T} \approx \frac{I_{CB}}{2V_T} \approx \frac{I_C}{2V_T}, \quad (8.101)$$

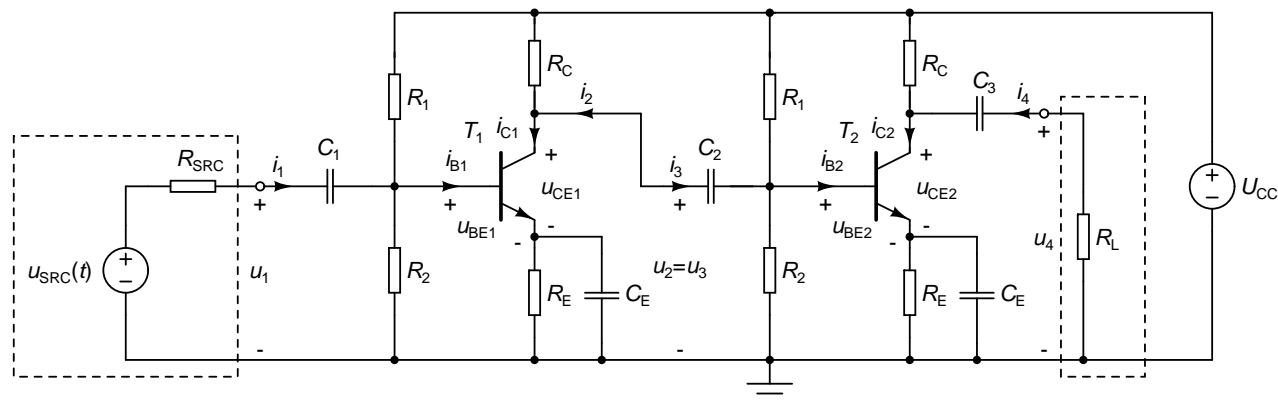
$$g_{11DE} \approx \frac{1}{2}g_{11} \approx \frac{g_{21}}{2\beta} \approx \frac{I_{CA}/\beta}{2V_T} \approx \frac{I_{CB}/\beta^2}{2V_T} \approx \frac{I_C/\beta^2}{2V_T} \approx \frac{g_{21DE}}{\beta^2}, \quad (8.102)$$

$$g_{22DE} \approx \frac{3\beta}{2}g_{22} \approx \frac{3\beta}{2} \frac{I_{CA}}{U_{CEA} + V_{AF}} \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{I_{CB}}{U_{CEB} + V_{AF}} \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{I_C}{U_{CE} + V_{AF}}, \quad (8.103)$$

$$g_{12DE} \approx -\frac{1}{2\beta}g_{22} \approx -\frac{1}{2\beta} \cdot \frac{2}{3\beta}g_{22DE} = -\frac{1}{3\beta^2}g_{22DE} \ll g_{22DE}. \quad (8.104)$$

Vidimo, da je parameter  $g_{12DE}$  Darlingtonove vezave različen od nič, čeprav imata oba tranzistorja  $g_{12} = 0$ . Je pa še vedno zanemarljiv, saj je mnogo manjši od ostalih admitančnih parametrov Darlingtonove vezave ( $g_{22DE}$ ). Enačbi, ki za Darlingtonovo vezavo med seboj povezujeta majhne odmike od delovne točke, se v matrični obliki glasita

$$\begin{bmatrix} g_{11DE} & g_{12DE} \\ g_{21DE} & g_{22DE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix} = [Y_{DE}] \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{be} \\ U_{ce} \end{bmatrix}. \quad (8.105)$$

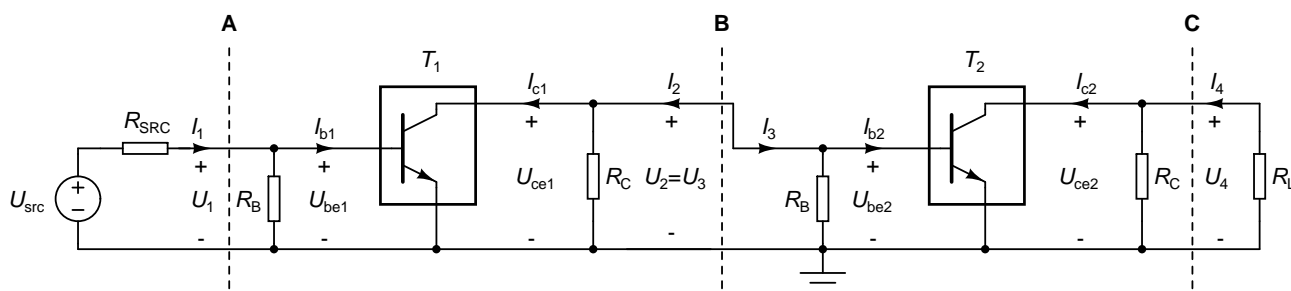


Slika 8.30: Kaskadna vezava dveh enakih ojačevalnih stopenj s tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem. Črtkan okvir na levi strani obdaja signalni vir, na desni strani pa breme.

## 8.8 Kaskadna vezava ojačevalnih stopenj

Pri kaskadni vezavi dveh ojačevalnih stopenj pripeljemo signal iz izhoda prve ojačevalne stopnje v vhod druge ojačevalne stopnje. Vhod prve ojačevalne stopnje postane vhod ojačevalnika, izhod druge ojačevalne stopnje pa izhod ojačevalnika. Določanje vhodnih in prevajalnih funkcij tako sestavljenega ojačevalnika si bomo ogledali na primeru kaskadne vezave dveh ojačevalnih stopenj v orientaciji s skupnim emitorjem (slika 8.30).

Delovna točka je za oba tranzistorja enaka. Posledično so enaki tudi admitančni parametri. V srednjefrekvenčnem območju so kapacitivnosti  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  in  $C_E$  dovolj velike, da kondenzatorji predstavljajo kratek stik za izmenične signale. Ker tudi napajalni vir predstavlja kratek stik za izmenične signale, se upora  $R_1$  in  $R_2$  vežeta vzporedno v  $R_B = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ , in dobimo model vezja za majhne signale, ki je prikazan na sliki 8.31.



Slika 8.31: Model za majhne signale v srednjefrekvenčnem območju za vezje na sliki 8.30. Črtkane črte razmejujejo posamezne sklope v vezju. A razmejuje signalni vir od prve ojačevalne stopnje, B prvo od druge ojačevalne stopnje in C drugo ojačevalno stopnjo od bremena.

Začnimo pri vhodnih admitancah tranzistorjev. Za orientacijo s skupnim emitorjem le te niso odvisne od zaključitve tranzistorja na kolektorski strani. Tako sta vhodni admitanci v tranzistorja  $T_1$  in  $T_2$  enaki

$$Y_{in1} = \frac{I_{b1}}{U_{be1}} = g_{11}, \quad (8.106)$$

$$Y_{in2} = \frac{I_{b2}}{U_{be2}} = g_{11} = Y_{in1}. \quad (8.107)$$

Če izklopimo signalni vir ( $U_{src}$  nadomestimo s kratkim stikom), lahko vezje levo od kolektorja tranzistorja nadomestimo z izhodno admitanco tranzistorja, ki za orientacijo s skupnim emitorjem ni odvisna od zaključitve na bazni strani tranzistorja. Dobimo

$$Y_{out1} = \frac{I_{c1}}{U_{ce1}} = g_{22}, \quad (8.108)$$

$$Y_{out2} = \frac{I_{c2}}{U_{ce2}} = g_{22} = Y_{out1}. \quad (8.109)$$

Tranzistor  $T_1$  čuti desno od svojega kolektorja breme, ki ga tvori vzporedna vezava  $R_C$ ,  $R_B$  in vhodne admitance tranzistorja  $T_2$  ( $Y_{in2}$ ). Njegovo napetostno ojačenje je tako enako

$$A_{U1} = \frac{U_{ce1}}{U_{be1}} = -\frac{g_{21}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_B^{-1} + Y_{in2}} = -\frac{g_{21}}{g_{11} + g_{22} + R_C^{-1} + R_B^{-1}}. \quad (8.110)$$

Tranzistor  $T_2$  čuti na svoji kolektorski strani kot breme vzporedno vezavo uporov  $R_C$  in  $R_L$ . Njegovo napetostno ojačenje je

$$A_{U2} = \frac{U_{ce2}}{U_{be2}} = -\frac{g_{21}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (8.111)$$

Če upoštevamo, da je  $U_1 = U_{be1}$ ,  $U_2 = U_3 = U_{ce1} = U_{be2}$  in  $U_4 = U_{ce2}$ , lahko **napetostno ojačenje celotnega ojačevalnika** dobimo kot

$$\begin{aligned} A_U &= \frac{U_4}{U_1} = \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{U_4}{U_3} = \frac{U_{ce1}}{U_{be1}} \cdot \frac{U_{ce2}}{U_{be2}} = A_{U1} \cdot A_{U2} \\ &= \frac{g_{21}^2}{(g_{11} + g_{22} + R_C^{-1} + R_B^{-1})(g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1})} \end{aligned} \quad (8.112)$$

in je pozitivno, kar pomeni, da ojačevalnik ne obrača faze napetosti. Tokovno ojačenje tranzistorja  $T_1$  je enako

$$A_{I1} = \frac{I_{c1}}{I_{b1}} = \frac{\beta}{1 + \frac{g_{22}}{g_{11} + R_C^{-1} + R_B^{-1}}}, \quad (8.113)$$

tranzistorja  $T_2$  pa

$$A_{I2} = \frac{I_{c2}}{I_{b2}} = \frac{\beta}{1 + \frac{g_{22}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}}. \quad (8.114)$$

Da bi dobili celotno tokovno ojačenje od vhoda ( $I_1$ ) do izhoda ( $I_2$ ) ojačevalnika, moramo upoštevati še tokovne delilnike, ki nastopajo na poti od vhoda proti izhodu. Prvi tak delilnik tvorita  $R_B$  prve ojačevalne stopnje in vhodna admitanca tranzistorja  $T_1$  ( $Y_{in1}$ ). Zaradi njega priteče le del toka  $I_1$  v bazo  $T_1$ . Velja

$$\frac{I_{b1}}{I_1} = \frac{Y_{in1}}{Y_{in1} + R_B^{-1}} = \frac{g_{11}}{g_{11} + R_B^{-1}}. \quad (8.115)$$

Naslednji delilnik tvorijo  $R_C$  prve ojačevalne stopnje,  $R_B$  druge ojačevalne stopnje in vhodna admitanca tranzistorja  $T_2$ . Zaradi njega le del toka  $-I_{c1}$  konča kot bazni tok  $I_{b2}$ .

$$\frac{I_{b2}}{-I_{c1}} = \frac{Y_{in2}}{Y_{in2} + R_B^{-1} + R_C^{-1}} = \frac{g_{11}}{g_{11} + R_B^{-1} + R_C^{-1}}. \quad (8.116)$$

Zadnji tokovni delilnik tvorita  $R_C$  druge ojačevalne stopnje in  $R_L$ . Zaradi njega le del toka  $I_{c2}$  teče preko bremena kot  $I_4$ .

$$\frac{I_4}{I_{c2}} = \frac{R_L^{-1}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (8.117)$$

**Tokovno ojačenje ojačevalnika** lahko izrazimo s pomočjo (8.113)-(8.117).

$$\begin{aligned} A_I &= \frac{I_4}{I_1} = \frac{I_{b1}}{I_1} \cdot \frac{-I_{c1}}{I_{b1}} \cdot \frac{I_{b2}}{-I_{c1}} \cdot \frac{I_{c2}}{I_{b2}} \cdot \frac{I_4}{I_{c2}} = -\frac{I_{b1}}{I_1} \cdot A_{I1} \cdot \frac{I_{b2}}{-I_{c1}} \cdot A_{I2} \cdot \frac{I_4}{I_{c2}} \\ &= -\frac{\beta^2}{\left(1 + \frac{g_{22}}{g_{11} + R_C^{-1} + R_B^{-1}}\right)\left(1 + \frac{g_{22}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}\right)} \cdot \frac{g_{11}}{g_{11} + R_B^{-1}} \cdot \frac{g_{11}}{g_{11} + R_B^{-1} + R_C^{-1}} \cdot \frac{R_L^{-1}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}. \end{aligned} \quad (8.118)$$

Celotno tokovno ojačenje je negativno, kar pomeni, da ojačevalnik obrača fazo toka. **Vhodna admitanca ojačevalnika** (z njo lahko nadomestimo vezje desno od črtkane črte A na sliki 8.31) je enaka vzporedni vezavi  $R_B$  in vhodne admitance tranzistorja  $T_1$  ( $Y_{in1}$ ).

$$Y_{in} = R_B^{-1} + Y_{in1} = g_{11} + R_B^{-1}. \quad (8.119)$$

Z **izhodno admitanco ojačevalnika** lahko nadomestimo vezje levo od črtkane črte C na sliki 8.31, če izklopimo signalni vir ( $U_{src}$  nadomestimo s kratkim stikom). Enaka je admitanca vzporedne vezave  $R_C$  in izhodne admitance tranzistorja  $T_2$ . ( $Y_{out2}$ ).

$$Y_{out} = R_C^{-1} + Y_{out2} = g_{22} + R_C^{-1}. \quad (8.120)$$

**Primer 8.8:** Vzemimo, da imamo tranzistor s parametri (8.3)-(8.5) ter  $R_C = 5\text{k}\Omega$ ,  $R_1 = 200\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 50\text{k}\Omega$ ,  $R_L = 1\text{k}\Omega$  in  $R_{SRC} = 100\Omega$ . Upornost  $R_B$  znaša  $40\text{k}\Omega$ . Napetostno ojačenje prvega tranzistorja je enako  $A_{U1} = -116,8$ , drugega tranzistorja pa  $-31,75$ . Celotno napetostno ojačenje tako znaša  $A_U = 3710$ .

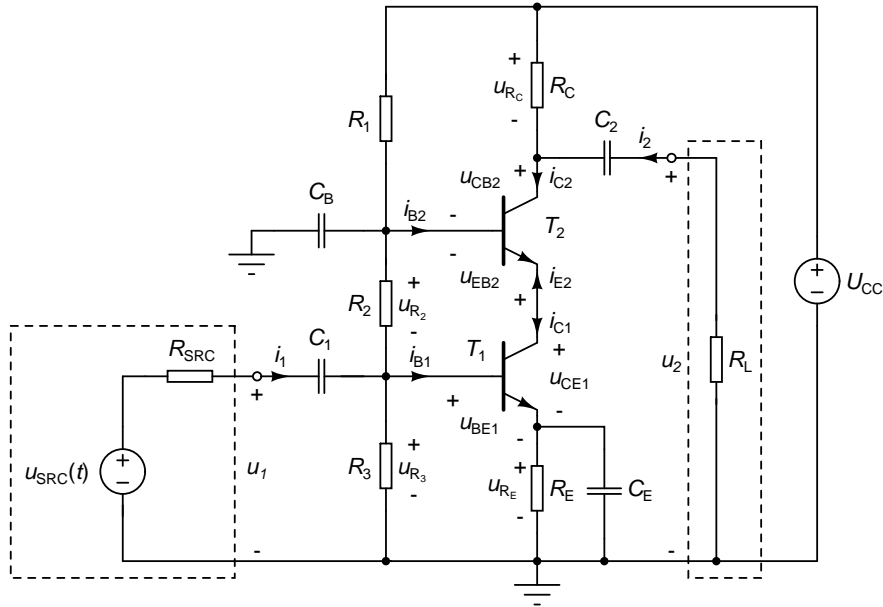
Tokovno ojačenje tranzistorja  $T_1$  je enako  $A_{I1} = 415,8$ , tranzistorja  $T_2$  pa  $433,4$ . Tokovni delilnik na vhodu spusti  $\frac{I_{b1}}{I_1} = 0,779$  vhodnega toka v  $T_1$ . V tranzistor  $T_2$  priteče  $\frac{I_{b2}}{-I_{c1}} = 0,281$  toka, ki priteče iz  $T_1$ . V breme teče  $\frac{I_4}{I_{c2}} = 0,833$  izhodnega toka tranzistorja  $T_2$ . Celotno tokovno ojačenje znaša  $A_I = -32855$ . Vhodna admitanca v ojačevalnik znaša  $Y_{in} = 112,9\mu\text{S}$  (vhodna impedanca  $8,86\text{k}\Omega$ ), izhodna admitanca pa  $Y_{out} = 218,2\mu\text{S}$  (izhodna impedanca  $4,58\text{k}\Omega$ ).  $\triangle$

## 8.9 Kaskodna vezava

Pri kaskodni vezavi imamo opravka s kaskado dveh ojačevalnikov, od katerih je prvi v orientaciji s skupnim emitorjem (izvorom), drugi pa v orientaciji s skupno bazo (vrati). Ime „kaskodna vezava“ izvira iz časov elektronk, ko sta Hunt in Hickman (1939) sorodno vezavo elektronk v angleščini poimenovala „cascade to cathode“ [17]. Shema kaskodnega ojačevalnika z NPN tranzistorjema je na sliki 8.32.

Poglejmo si najprej določanje delovne točke ojačevalnika. Predpostavimo, da je tok, ki teče preko uporov  $R_1$ ,  $R_2$  in  $R_3$  mnogo večji od obeh baznih tokov tranzistorjev. V tem primeru lahko smatramo, da je napetostni delilnik, ki ga tvorijo  $R_1$ ,  $R_2$  in  $R_3$ , neobremenjen. Tok, ki teče preko upora  $R_E$ , je enak emitorskemu toku tranzistorja  $T_1$ , ta pa je za  $\beta_F \gg 1$  praktično enak kolektorskemu toku  $I_{C1}$ . Upoštevamo še, da je v delovni točki  $U_{BE1} = U_K = 0,7\text{V}$  in dobimo

$$I_{C1} = \frac{U_{R3} - U_{BE1}}{R_E} = \frac{\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} U_{CC} - U_K}{R_E}. \quad (8.121)$$



Slika 8.32: Kaskodna vezava Z NPN tranzistorjema. Črtkan okvir na levi strani obdaja signalni vir, na desni strani pa breme.

Kolektorski tok tranzistorja  $T_1$  je enak emitorskemu toku  $T_2$ , ki pa je za  $\beta_F \gg 1$  praktično enak  $I_{C2}$ . Velja torej  $I_{C2} = I_{C1}$ . Napetost  $U_{CE1}$  dobimo kot razliko med potencialoma kolektorja in emitorja tranzistorja  $T_1$ . Pri tem upoštevamo, da v delovni točki velja  $U_{BE1} = U_{BE2} = U_K$ .

$$U_{CE1} = (U_{R2} + U_{R3} - U_{BE2}) - (U_{R3} - U_{BE1}) = U_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} U_{CC}. \quad (8.122)$$

Na podoben način dobimo še  $U_{CE2}$ .

$$U_{CE2} = (U_{CC} - U_{RC}) - (U_{R2} + U_{R3} - U_{BE2}) = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} U_{CC} - I_{C2} R_C + U_K. \quad (8.123)$$

Predpostavili bomo, da sta tranzistorja enaka. Za velike  $\beta_F$  velja  $I_{C1} = I_{C2}$ , kar pomeni, da imata oba tranzistorja enako vrednost parametrov  $g_{21}$  (enačba (8.3)).

$$g_{21} = \frac{I_{C1}}{V_T} = \frac{I_{C2}}{V_T}, \quad (8.124)$$

Ker v splošnem velja  $U_{CE1} \neq U_{CE2}$ , ne moremo takoj predpostaviti, da imata oba tranzistorja enak  $g_{22}$ . Če je parameter  $V_{AF}$  velik v primerjavi z  $U_{CE1}$  in  $U_{CE2}$  (kar ponavadi drži), sledi iz enačbe (8.4), da sta vrednosti  $g_{22}$  za oba tranzistorja približno enaki

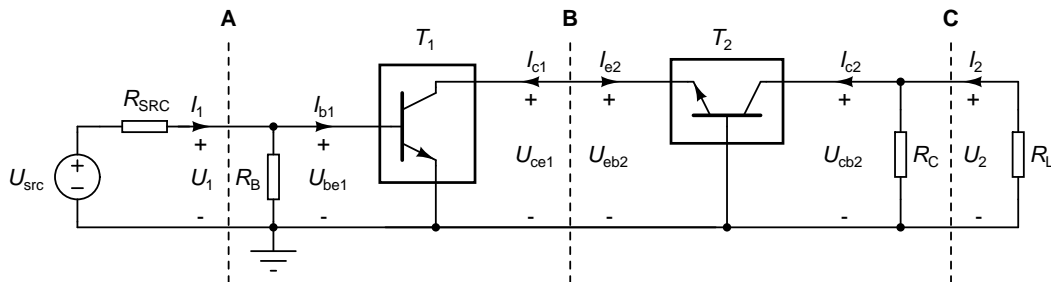
$$g_{22} = \frac{I_{C1}}{U_{CE1} + V_{AF}} \approx \frac{I_{C1}}{V_{AF}} = \frac{I_{C2}}{V_{AF}}. \quad (8.125)$$

Podobno sklepanje lahko uporabimo tudi za  $\beta$  (enačba (8.2)), ki je za oba tranzistorja približno enak  $\beta_F$ . Nazadnje iz (8.5) sledi še, da je parameter  $g_{11}$  prav tako enak za oba tranzistorja.

$$g_{11} = \frac{g_{21}}{\beta} \approx \frac{g_{21}}{\beta_F}. \quad (8.126)$$

**Primer 8.9:** Recimo, da je napajalna napetost enaka  $U_{CC} = 10V$ , vrednosti uporov pa so  $R_1 = 68k\Omega$ ,  $R_2 = 33k\Omega$ ,  $R_3 = 22k\Omega$ ,  $R_C = 2,7k\Omega$  in  $R_E = 1k\Omega$ . Za delovno točko dobimo  $I_{C1} = I_{C2} = 1,09mA$ ,  $U_{CE1} = 2,68V$  in  $U_{CE2} = 3,29V$ . Tok napetostnega delilnika, ki ga tvorijo upori  $R_1$ ,  $R_2$  in  $R_3$ , je enak  $U_{CC}/(R_1 + R_2 + R_3) = 81,3\mu A$ . Pri  $\beta_F = 400$  znaša bazni tok tranzistorjev približno  $I_{C1}/\beta_F = 2,7\mu A$ , s čimer je naša predpostavka o neobremenjenosti napetostnega delilnika upravičena.

Če je parameter  $V_{AF} = 50V$  in temperatura  $300K$ , so admitančni parametri tranzistorjev dobljeni s poenostavljenimi enačbami (8.124)-(8.126) enaki  $g_{21} = 42,1mS$ ,  $g_{11} = 105\mu S$  in  $g_{22} = 21,8\mu S$ . Če uporabimo enačbo (8.2), dobimo za tranzistor  $T_1$   $\beta = 421$  za tranzistor  $T_2$  pa  $\beta = 426$ . Natančni vrednosti  $g_{11}$  za oba tranzistorja sta  $99,9\mu S$  in  $98,8\mu S$ , natančni vrednosti  $g_{22}$  pa  $20,7\mu S$  in  $20,4\mu S$  (enačbi (8.5) in (8.4)). Vidimo, da so napake, ki nastanejo zaradi poenostavitve, majhne. Prav tako vidimo, da imata tranzistorja praktično enake admitančne parametre in enak  $\beta$ .  $\triangle$



Slika 8.33: Model za majhne signale v srednjefrekvenčnem območju za vezje na sliki 8.32. Črtkane črte razmejujejo posamezne sklope v vezju. A razmejuje signalni vir od prve ojačevalne stopnje, B prvo od druge ojačevalne stopnje in C drugo ojačevalno stopnjo od bremena.

Model vezja za majhne signale v srednjefrekvenčnem območju dobimo, če upoštevamo, da napajalni vir in kondenzatorja  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_B$  in  $C_E$  za izmenične signale predstavljajo kratek stik. Pri tem  $C_B$  skupaj z napajalnim virom kratko sklone  $R_1$  ter vzporedno poveže  $R_2$  in  $R_3$  v  $R_B = R_2 R_3 / (R_2 + R_3)$ . Dobimo vezje na sliki 8.33. Iz slike je lepo razvidno, da je tranzistor  $T_1$  v orientaciji s skupnim emitorjem,  $T_2$  pa v orientaciji s skupno bazo.

Pri kaskadni vezavi ojačevalnih stopenj začnemo določanje **vhodnih admitanč v tranzistorje** pri izhodu vezja. Vzrok tiči v dejstvu, da je izhod tranzistorja med drugim obremenjen tudi z vhodno impedanco tranzistorja v naslednji ojačevalni stopnji. Ker pa je vhodna impedanca v splošnem odvisna od zaključitve na izhodu, moramo začeti s tistim tranzistorjem, katerega breme v celoti poznamo. Tako je vhodna admitanca v tranzistor  $T_2$  (orientacija s skupno bazo) enaka

$$Y_{in2} = \frac{I_{e2}}{U_{eb2}} = g_{11B} - \frac{g_{12B}g_{21B}}{g_{22B} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} = g_{11} + g_{21} + g_{22} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (8.127)$$

Pri tem smo uporabili admitančne parametre tranzistorja za orientacijo s skupno bazo, ki so podani z (8.31). Na tem mestu se spomnimo neenačbe (8.38) in jo še enkrat ponovimo.

$$g_{11} \leq Y_{in2} \leq g_{11} + g_{21} + g_{22} \approx g_{21}. \quad (8.128)$$

Tranzistor  $T_1$  (v orientaciji s skupnim emitorjem) je na kolektorski strani obremenjen z vhodno admitanco tranzistorja  $T_2$ . Njegova vhodna admitanca ni odvisna od obremenitve na izhodu (kolektorju) in znaša

$$Y_{in1} = \frac{I_{b1}}{U_{be1}} = g_{11} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{22} + Y_{in2}} = g_{11}. \quad (8.129)$$

Ker je tranzistor  $T_1$  vhodni tranzistor ojačevalnika, je vhodna admitanca v ojačevalnik enaka

$$Y_{\text{in}} = \frac{I_1}{U_1} = Y_{\text{in1}} + R_{\text{B}}^{-1} = g_{11} + R_{\text{B}}^{-1}. \quad (8.130)$$

Vidimo, da se vhod ojačevalnika obanaša podobno, kot vhod ojačevalne stopnje s skupnim emitorjem. Ker so **izhodne admitance** ojačevalnih stopenj in s tem tudi tranzistorjev v splošnem odvisne od zaključitev na vhodih posameznih stopenj, jih začnemo določati od stopnje na strani vhoda vezja proti stopnji na strani izhoda. Izhodna admitanca tranzistorja  $T_1$  (skupni emitor) je neodvisna od zaključitve na njegovem vhodu (bazi), ki jo tvorita  $R_{\text{SRC}}$  in  $R_{\text{B}}$ .

$$Y_{\text{out1}} = \frac{I_{\text{c1}}}{U_{\text{ce1}}} = g_{22} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{22} + R_{\text{SRC}}^{-1} + R_{\text{B}}^{-1}} = g_{22}. \quad (8.131)$$

Tranzistor  $T_2$  (skupna baza) je na svojem vhodu (emitorju) obremenjen z izhodno admitanco  $T_1$  ( $Y_{\text{out1}} = g_{22}$ ).

$$Y_{\text{out2}} = \frac{I_{\text{c2}}}{U_{\text{cb2}}} = g_{22\text{B}} - \frac{g_{12\text{B}}g_{21\text{B}}}{g_{11\text{B}} + Y_{\text{out1}}} = g_{22} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{11} + g_{21} + 2g_{22}}. \quad (8.132)$$

Pri določanju izhodnih admitanc smo predpostavili, da je signalni vir  $U_{\text{src}}$  izklopljen (nadomesti ga kratek stik). Izraz (8.132) lahko poenostavimo, če upoštevamo  $g_{22} \ll g_{21}$ . Dobimo

$$Y_{\text{out2}} = g_{22} \left( 1 - \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11} + g_{21} + 2g_{22}} \right) = \frac{(g_{11} + g_{22})g_{22}}{g_{11} + g_{21} + 2g_{22}} \approx \frac{(g_{11} + g_{22})g_{22}}{g_{11} + g_{21}} = \frac{g_{22}}{1 + \beta} \left( 1 + \frac{g_{22}}{g_{11}} \right). \quad (8.133)$$

Če velja še  $g_{22} < g_{11}$  (kar ponavadi drži), je izhodna impedanca manjša od  $2g_{22}/(1 + \beta)$ . Vidimo, da je izhodna admitanca tranzistorja  $T_2$  (izhodnega tranzistorja) največ dvakrat večja od najnižje možne izhodne admitance, ki jo lahko dobimo s tranzistorjem v orientaciji s skupno bazo (8.43). Zaradi tega je kaskodna vezava pogosto uporabljana za izvedbo tokovnih virov z visoko notranjo upornostjo. Izhodna admitanca ojačevalnika (ko izklopimo signalni vir  $U_{\text{src}}$ ) je enaka

$$Y_{\text{out}} = \frac{I_2}{U_2} = Y_{\text{out2}} + R_{\text{C}}^{-1} = \frac{g_{22}}{1 + \beta} \left( 1 + \frac{g_{22}}{g_{11}} \right) + R_{\text{C}}^{-1}. \quad (8.134)$$

Izhod tranzistorja  $T_1$  (kolektor) je obremenjen z admitanco  $Y_{\text{in2}}$ . Njegovo **napetostno ojačenje** tranzistorja tako znaša

$$A_{\text{U1}} = \frac{U_{\text{ce1}}}{U_{\text{be1}}} = -\frac{g_{21}}{g_{22} + Y_{\text{in2}}}. \quad (8.135)$$

Ker vezje ponavadi načrtujemo tako, da je  $R_{\text{C}}^{-1} + R_{\text{L}}^{-1} \gg g_{22}$ , velja  $Y_{\text{in2}} \approx Y_{\text{in,max}} \approx g_{21}$ . Napetostno ojačenje je zato enako

$$A_{\text{U1}} \approx -\frac{g_{21}}{g_{22} + g_{21}} \approx -1. \quad (8.136)$$

Zaradi visoke admitance  $Y_{\text{in2}}$ , s katero je obremenjen  $T_1$ , se njegovo napetostno ojačenje sesede. Napetostno ojačenje tranzistorja  $T_2$  je enako

$$A_{\text{U2}} = \frac{U_{\text{cb2}}}{U_{\text{eb2}}} = \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{22} + R_{\text{C}}^{-1} + R_{\text{L}}^{-1}}. \quad (8.137)$$



Celotno napetostno ojačenje kaskodne vezave ob upoštevanju  $R_C^{-1} + R_L^{-1} \gg g_{22}$  in  $U_{ce1} = U_{eb2}$  znaša

$$A_U = \frac{U_{cb2}}{U_{be1}} = \frac{U_{ce1}}{U_{be1}} \cdot \frac{U_{cb2}}{U_{eb2}} = A_{U1} A_{U2} \approx -\frac{g_{21} + g_{22}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (8.138)$$

Če zanemarimo  $g_{22}$  v primerjavi z  $g_{21}$ , je izraz (8.138) enak izrazu za napetostno ojačenje tranzistorja v orientaciji s skupnim emitorjem (8.12). Kar se napetostnega ojačenja tiče, se kaskodni ojačevalnik obnaša enako, kot tranzistor v orientaciji s skupnim emitorjem.

**Tokovno ojačenje** tranzistorja  $T_1$  je enako

$$A_{I1} = \frac{I_{c1}}{I_{b1}} = \frac{g_{21}}{g_{11} + g_{11}g_{22}Y_{in2}^{-1}} = \frac{g_{21}}{g_{11}} \frac{1}{1 + \frac{g_{22}}{Y_{in2}}}. \quad (8.139)$$

Ker je ponavadi  $R_C^{-1} + R_L^{-1} \gg g_{22}$ , velja  $Y_{in2} \approx g_{21} \gg g_{22}$ . Dobimo

$$A_{I1} \approx \frac{g_{21}}{g_{11}} = \beta \quad (8.140)$$

Tokovno ojačenje tranzistorja  $T_1$  je enako največjemu tokovnemu ojačenju tranzistorja v orientaciji s skupnim emitorjem (8.15). Tranzistor  $T_2$  ima tokovno ojačenje

$$A_{I2} = \frac{I_{c2}}{I_{e1}} = -\frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11} + g_{21} + g_{22} + \frac{g_{11}g_{22}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}}. \quad (8.141)$$

Ker je  $R_C^{-1} + R_L^{-1} \gg g_{22}$ , je tokovno ojačenje

$$A_{I2} = -\frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11} + g_{21} + g_{22}} \stackrel{g_{22} \ll g_{21}}{\approx} -\frac{g_{21}}{g_{11} + g_{21}} = -\frac{\beta}{1 + \beta} \approx -1. \quad (8.142)$$

Celotno tokovno ojačenje kaskodne vezave ob upoštevanju  $R_C^{-1} + R_L^{-1} \ll g_{22}$  in  $I_{c1} = -I_{e2}$  znaša

$$A_I = \frac{I_{c2}}{I_{b1}} = \frac{-I_{c1}}{I_{b1}} \cdot \frac{I_{c2}}{I_{e2}} = -A_{I1} A_{I2} \approx \beta. \quad (8.143)$$

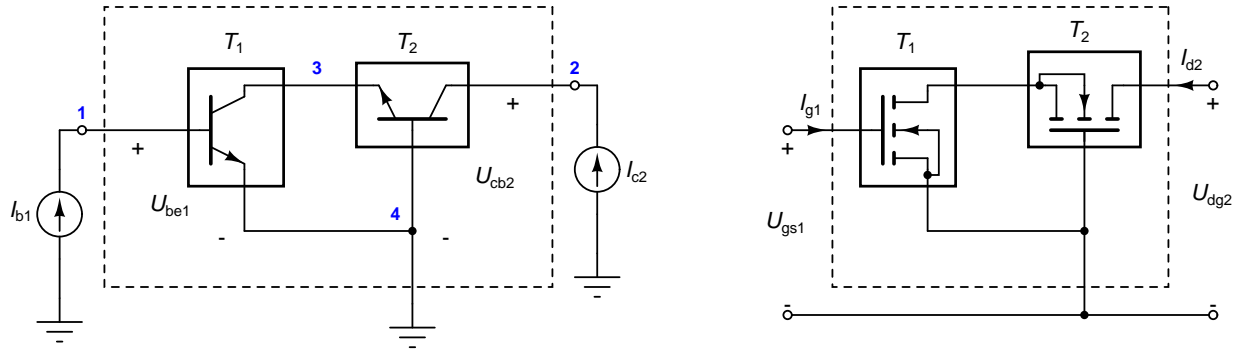
Vidimo, da se tudi glede tokovnega ojačenja kaskodna vezava obnaša enako, kot tranzistor v orientaciji s skupnim emitorjem.

Poglejmo si še **matriko admitančnih parametrov za kaskodno vezavo** dveh enakih bipolarnih tranzistorjev. Slika 8.34 (levo) nam bo služila kot izhodišče. Vozlišče 4 bo naše referenčno vozlišče. Zapišimo enačbe, ki opisujejo vezje v obliki razširjene matrike. Tranzistor  $T_1$  prispeva v vozliščno admitančno matriko

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & 0 & g_{22} \end{array} \right], \end{array} \quad (8.144)$$

tranzistor  $T_2$  pa

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & -(g_{21} + g_{22}) \\ 0 & -g_{22} & g_{11} + g_{21} + g_{22} \end{array} \right]. \end{array} \quad (8.145)$$



Slika 8.34: Vezje za določanje admittančne matrike kaskodne vezave dveh enakih bipolarnih tranzistorjev (levo). Model vezja za majhne signale za kaskodno vezavo dveh enakih MOS tranzistorjev (desno).

Sistem enačb zapisan v obliki razširjene matrike sistema je

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & -(g_{21} + g_{22}) \\ g_{21} & -g_{22} & g_{11} + g_{21} + 2g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{be1} \\ U_{cb2} \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{b1} \\ I_{c2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.146)$$

Neznanke v tem sistemu so  $U_{be1}$ ,  $U_{cb2}$  in  $V_3$ . Eliminirali bomo tretjo enačbo in neznanko  $V_3$ . Po eliminaciji dobimo sistem enačb

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11} + g_{21} + 2g_{22}} & g_{22} \left(1 - \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11} + g_{21} + 2g_{22}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{be1} \\ U_{cb2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{b1} \\ I_{c2} \end{bmatrix}. \quad (8.147)$$

Če upoštevamo še  $g_{22} \ll g_{21}$ , lahko sistem (8.147) poenostavimo v

$$[Y_{CE}] \begin{bmatrix} U_{be1} \\ U_{cb2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11CE} & g_{12CE} \\ g_{21CE} & g_{22CE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{be1} \\ U_{cb2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ \frac{\beta g_{21}}{1 + \beta} & \frac{g_{22}}{1 + \beta} \left(1 + \frac{g_{22}}{g_{11}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{be1} \\ U_{cb2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{b1} \\ I_{c2} \end{bmatrix}. \quad (8.148)$$

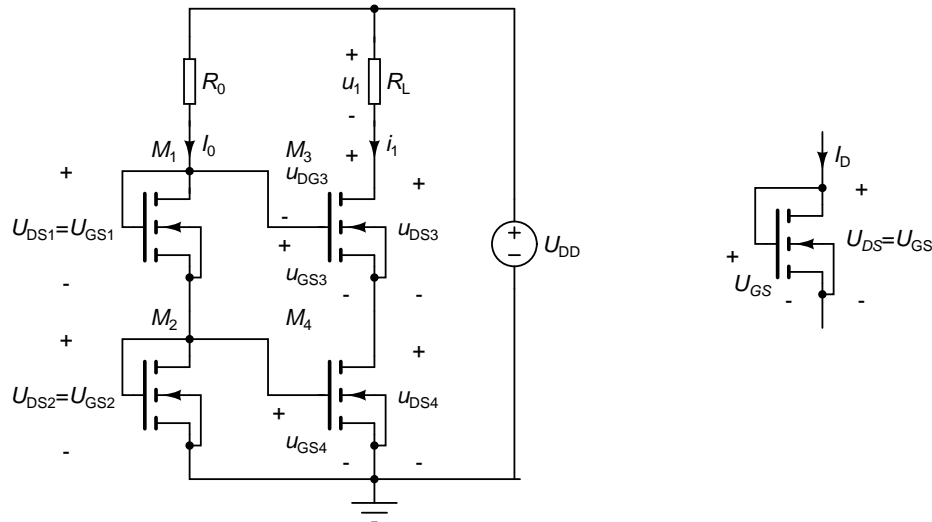
Vidimo, da sta admittančna parametra  $g_{11CE}$  in  $g_{12CE}$  enaka, kot pri orientaciji s skupnim emitorjem. Za velike  $\beta$  (skoraj zmeraj) to velja tudi za  $g_{21CE}$ . Parameter  $g_{22CE}$  pa je precej manjši od sorodnega parametra za tranzistor v orientaciji s skupnim emitorjem. Vse to še enkrat potrjuje naše ugotovitve, da so vse lastnosti kaskodne vezave dveh tranzistorjev praktično enake lastnostim orientacije s skupnim emitorjem, razen izhodne admittance  $g_{22CE}$ , ki je mnogo manjša.

**Tudi MOS tranzistorje lahko zvežemo v kaskodno vezavo.** Model vezja za majhne signale prikazuje slika 8.34 (desno). Matriko admittančnih parametrov kaskodne vezave dobimo iz že znanega rezultata za bipolarni tranzistorje (8.147) v katerega vstavimo  $g_{11} = 0$  in upoštevamo  $g_{22} \ll g_{21}$ . Dobimo

$$[Y_{CS}] \begin{bmatrix} U_{gs1} \\ U_{dg2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11CS} & g_{12CS} \\ g_{21CS} & g_{22CS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{gs1} \\ U_{dg2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} \frac{g_{22}}{g_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{gs1} \\ U_{dg2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{g1} \\ I_{d2} \end{bmatrix}. \quad (8.149)$$

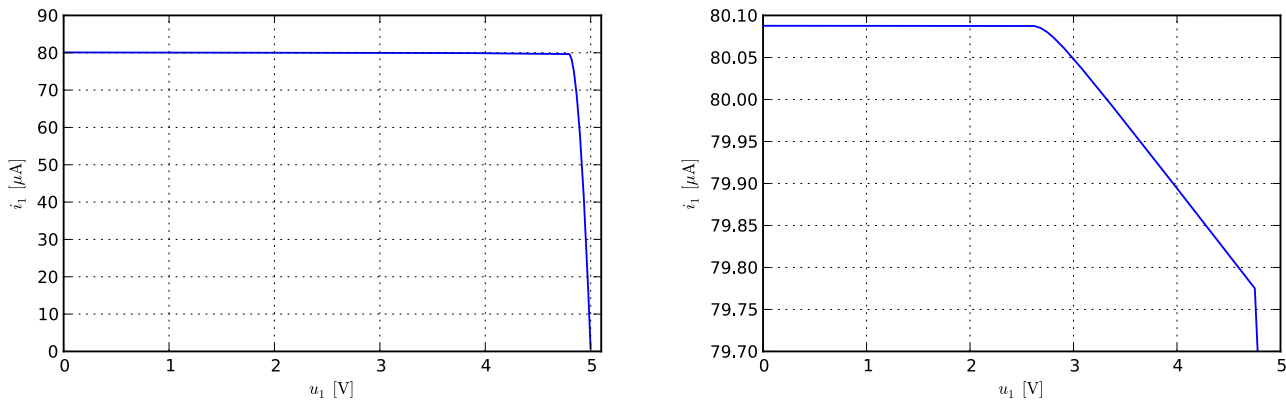
Tudi v tem primeru velja, da so admittančni parametri enaki parametrom orientacije s skupnim izvorom. Izjema je  $g_{22CS}$ , ki je  $g_{21}/g_{22}$  krat manjši.

Kot smo že prej povedali, je kaskodna vezava pogosto uporabljena za izvedbo kakovostnih tokovnih virov z visoko notranjo upornostjo. Poglejmo si **kaskodno tokovno zrcalo z MOS tranzistorji**, ki je na sliki 8.35 (levo). Kaskodno vezavo tvorita tranzistorja  $M_3$  (skupna vrata) in  $M_4$  (skupen izvor).



Slika 8.35: Kaskodno tokovno zrcalo z MOS tranzistorji (levo) in dvopol ki ga uporabimo pri nastavljanju toka zrcala (desno).

Da je tranzistor  $M_3$  v orietaciji s skupnimi vrati, ni takoj očitno. Tokovi skozi  $R_0$ ,  $M_1$  in  $M_2$  se ne spreminjajo, ko se spreminja breme  $R_L$ , saj v vrata tranzistorjev ne teče tok ( $i_G = 0$ ). Posledično se potencial vrat tranzistorja  $M_3$  ne spreminja, kar pomeni, da so vrata tranzistorja  $M_3$  ozemljena v modelu za majhne signale,  $M_3$  pa deluje v orientaciji s skupnimi vrati.



Slika 8.36: Odvisnost toka  $i_1$  od napetosti  $u_1$  (levo) in povečan graf odvisnosti (desno).

Pri izračunu delovne točke bomo predpostavili  $\lambda = 0$ . Tok  $i_0$  nastavimo s pomočjo upora  $R_0$ . Da bi ga lahko določili, analizirajmo dvopol na sliki 8.35 (desno). Za  $M_1$  in  $M_2$  velja  $U_{DS} = U_{GS}$  zaradi česar deluje tranzistor v področju nasičenja. Velja enačba

$$I_D = \frac{K}{2}(U_{GS} - U_T)^2 = \frac{K}{2}(U_{DS} - U_T)^2. \quad (8.150)$$

Ker imamo v levi veji tokovnega zrcala dva taka dvopola z enakim tokom  $I_0$ , velja

$$I_0 R_0 + U_{DS1} + U_{DS2} = I_0 R_0 + 2U_{DS1} = U_{DD}. \quad (8.151)$$

S pomočjo (8.150) izrazimo  $U_{DS1}$  z  $I_0$  in dobimo enačbo

$$I_0 R_0 + 2 \left( U_T + \sqrt{\frac{2I_0}{K}} \right) = U_{DD}, \quad (8.152)$$

iz katere lahko določimo  $R_0$  pri katerem teče tok  $I_0$

$$R_0 = \frac{U_{DD} - 2U_T}{I_0} - \sqrt{\frac{8}{KI_0}}. \quad (8.153)$$

Prav nam bo prišla tudi vrednost  $U_{GS} - U_T$  v delovni točki.

$$U_{GS} - U_T = \sqrt{\frac{2I_0}{K}}. \quad (8.154)$$

Zaradi enakih napetosti potencialov vrat bo tok ponora tranzistorjev  $M_3$  in  $M_4$  ( $i_1$ ) enak  $I_0$ . S tranzistorji, ki imajo  $K = 4\text{mA/V}^2$  in  $U_T = 2\text{V}$ , ter napajanjem  $U_{DD} = 5\text{V}$  potrebujemo za tok  $I_0 = i_1 = 80\mu\text{A}$  upor  $R_0 = 7,5\text{k}\Omega$ . Napetost  $U_{DS} = U_{GS}$  tranzistorjev  $M_1$  in  $M_2$  tedaj znaša  $2,2\text{V}$ .

Tudi v tem primeru velja, da je izhodna admitanca tokovnega vira (tista, ki jo čuti breme  $R_L$ ) enaka izhodni admitanci kaskodne vezave, ki poganja tok  $i_0$  skozi breme. Ta je enaka  $g_{22CS} = g_{22}^2/g_{21}$ . Če upoštevamo, da je napetost  $U_{DS}$  delovne točke tranzistorjev majhna, tako da je  $\lambda U_{DS} \approx 0$ , potem sta admitančna parametra orientacije s skupnim izvorom  $g_{21} = 2I_0/(U_{GS} - U_T) = \sqrt{2I_0K}$  in  $g_{22} = \lambda I_0$ .

Hitrost spreminjanja toka bremena  $i_1$  v odvisnosti od napetosti na bremenu  $u_1$  je (podobno kot za navadno tokovno zrcalo v poglavju 8.2) enaka

$$\frac{di_1}{du_1} = -g_{22CS} = -\frac{g_{22}^2}{g_{21}} = -\sqrt{\frac{\lambda^4 I_0^3}{2K}}. \quad (8.155)$$

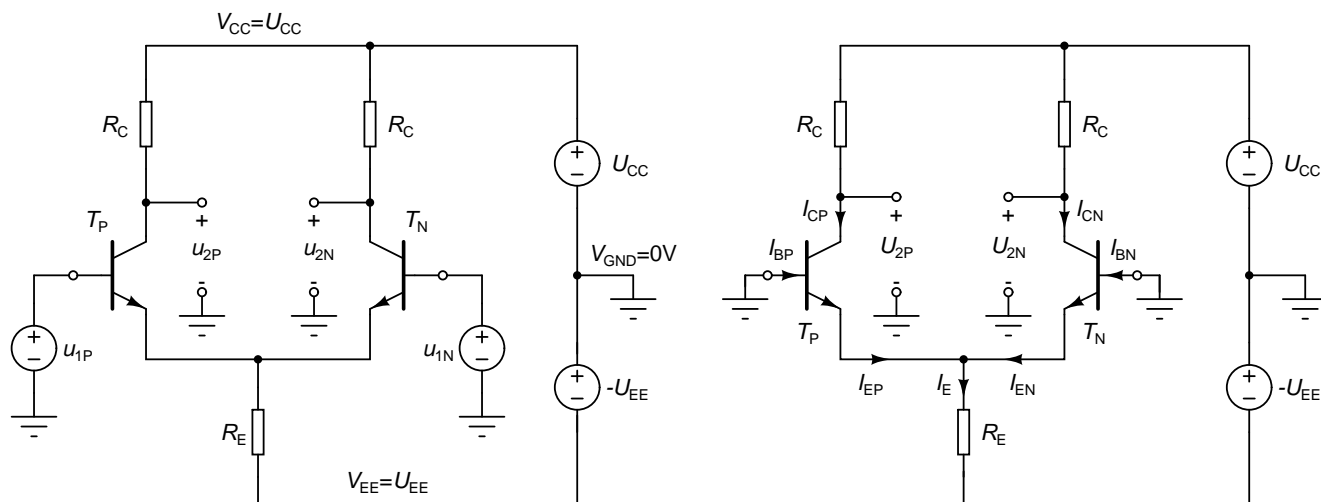
Če je  $\lambda = 0.002\text{V}^{-1}$ ,  $K = 4\text{mA/V}^2$  in  $I_0 = 80\mu\text{A}$ , znaša  $-di_1/du_1 = 32\text{pS}$ , kar ustreza notranji upornosti vira  $1/g_{22CS} = 31,25\text{G}\Omega$ . Odvisnost toka  $i_1$  od napetosti  $u_1$  je prikazana na sliki 8.36 (levo). Čeprav izgleda, kot da se vezje obnaša kot dober tokovni vir z notranjo upornostjo  $31,25\text{G}\Omega$  za napetosti  $u_1 < 4,8\text{V}$ , pa povečana slika (desno) razkrije, da se kakovost tokovnega vira pokvari že pri napetosti  $u_1 = 2,6\text{V}$ .

Ker sta v levi veji zaporedno vezana enaka dvopola, ki ju tvorita  $M_1$  in  $M_2$ , velja  $u_{DS1} = u_{DS2}$ . Če je breme  $R_L$  enako  $R_0$ , za desno vejo velja  $u_{DS3} = u_{DS1}$  in  $u_{DS4} = u_{DS2}$ . Z večanjem  $R_L$  raste tudi  $u_1$ . Večanje  $u_1$  gre na račun napetosti  $u_{DS3}$  tranzistorja  $M_3$ , ki je izhodni tranzistor tokovnega vira in krmili breme. Vzrok za to je izhodna admitanca  $M_3$  (skupna vrata), ki je mnogo manjša od izhodne admitance  $M_4$  (skupni izvor). Zaradi tega se ob povečevanju  $u_1$  napetost  $u_{DG3}$  manjša precej hitreje, kot  $u_{DS4}$ .

Ko napetost  $u_{DG3}$  in z njo  $u_{DS3}$  doseže mejo nasičenja ( $u_{DS3} = u_{GS3} - U_T = 0,2\text{V}$ ), pade  $M_3$  v linearno področje in enačbe, ki smo jih izpeljali, ne veljajo več. V linearnem področju se  $M_3$  za nizke  $u_{DS3}$  obnaša kot upor s prevodnostjo  $di_D/du_{DS} \approx K(U_{GS} - U_T)$ , ki je približno enaka vrednosti  $g_{21}$  v področju nasičenja. Tranzistor  $M_4$  ostaja v področju nasičenja, njegova izhodna admitanca pa je enaka  $g_{22}$ . Ker je admitanca  $M_3$  v linearnem področju ( $g_{21}$ ) precej večja od njej zaporedno vezane izhodne admitance  $M_4$  ( $g_{22}$ ), se tokovno zrcalo obnaša podobno kot tisto v poglavju 8.2. Izhodna admitanca, ki jo sedaj čuti breme je približno enaka izhodni admitanci  $M_4$  in znaša  $g_{22} \approx \lambda I_0 = 0,16\mu\text{S}$  (izhodna impedanca  $6,25\text{M}\Omega$ ). Vezje deluje na ta način od  $u_1 = 2,6\text{V}$  do  $u_1 = 4,8\text{V}$ .

Če se  $u_1$  večja še naprej, se večja na račun  $u_{DS4}$  tranzistorja  $M_4$ , nekaj malega pa tudi na račun  $u_{DS3}$ . Ko še  $M_4$  pade v linearno področje (pri  $u_{DS4} < 0,2\text{V}$ ), se vezje preneha obnašati kot tokovni vir. Tedaj je napetost  $u_{DS3}$  že skoraj  $0\text{V}$ . Tako drugi prelom karakteristike nastopi pri  $u_1 = U_{DD} - u_{DS3} - u_{DS4} \approx 5\text{V} - 0\text{V} - 0,2\text{V} = 4,8\text{V}$ . Od te točke naprej se vezje ne obnaša več kot tokovni vir.

## 8.10 Diferencialni ojačevalnik



Slika 8.37: Neobremenjen diferencialni ojačevalnik z vhodnima signaloma  $u_{1P}$  in  $u_{1N}$  ter izhodnima signaloma  $u_{2P}$  in  $u_{2N}$  (levo). Določanje delovne točke diferencialnega ojačevalnika (desno).

Diferencialni ojačevalnik je prikazan na sliki 8.37 (levo). Samo ime je nekoliko ponesrečeno izbrano, saj je dobesedno prevzeto iz angleškega jezika (differential amplifier). Tovrsten ojačevalnik ne ojačuje majhnih (diferencialnih) signalov, temveč razlike med signali. Bolj primerno ime bi bilo diferenčni ojačevalnik. Ker pa se je ime „diferencialni“ že tako zelo udomačilo, ga bomo uporabljali tudi v tej knjigi.

Diferencialni ojačevalnik je sestavljen iz dveh enakih tranzistorjev  $T_P$  in  $T_N$ . Za razliko od ostalih do sedaj opisanih vezij ima dvojno napajanje, ki ga tvorita enosmerna napajalna vira  $U_{CC}$  in  $-U_{EE}$ , dva vhodna signala ( $u_{1P}$  in  $u_{1N}$ ) ter dva izhodna signala ( $u_{2P}$  in  $u_{2N}$ ). Vhodna signalna vira  $u_{1P}$  in  $u_{1N}$  sta enosmerno sklopljena z vodom ojačevalnika. Pri tem ni potrebna prilagoditev napetostnih nivojev, saj sta bazi tranzistorjev v delovni točki na potencialu  $0V$ . Potencial skrajne zgornje točke vezja je  $V_{CC} = U_{CC} > 0$ , skrajne spodnje točke pa  $V_{EE} = U_{EE} < 0$ .

Vse vhodne ( $u_{1P}$ ,  $u_{1N}$ ) in izhodne ( $u_{2P}$  in  $u_{2N}$ ) signale merimo kot napetosti proti referenčni sponki, ki ima potencial  $V_{GND} = 0V$ . Potenciala baz sta zato enaka vhodnima napetostima. **Diferencialni ojačevalnik na sliki 8.37 (levo) ojačuje tudi enosmerne signale**, saj na obeh vhodih nimamo veznih kondenzatorjev.

**Pri določanju delovne točke diferencialnega ojačevalnika** (slika 8.37, desno) signalna vira izklopimo in nadomestimo s kratkim stikom. Potenciala baz obeh tranzistorjev zato postanega enaka  $0V$ . Predpostavili bomo, da je kolektorski tok tranzistorja neodvisen od  $u_{CE}$  in zanemarili  $I_{CEO}$ . Upoštevali bomo tudi, da je  $\beta_F$  velik.

Tok  $I_E$  dobimo z upoštevanjem  $U_{BE} = U_K = 0,7V$ .

$$I_E = \frac{-U_{EE} - U_K}{R_E}. \quad (8.156)$$

Zaradi simetrije vezja se  $I_E$  razdeli na dva enaka dela  $I_{EP} = I_{EN} = I_E/2$ . Kolektorski tok tranzistorjev v delovni točki zato znaša

$$I_{CP} = I_{CN} = \frac{I_E}{2} \frac{\beta_F}{1 + \beta_F} \approx \frac{I_E}{2}. \quad (8.157)$$

Zaradi simetrije sta enaka tudi potenciala kolektorjev  $U_{2P}$  in  $U_{2N}$ .

$$U_{2P} = U_{2N} = U_{CC} - R_C I_{CP} \approx U_{CC} - R_C \frac{I_E}{2}. \quad (8.158)$$

Napetosti  $U_{CEP}$  sta enaki za oba tranzistorja.

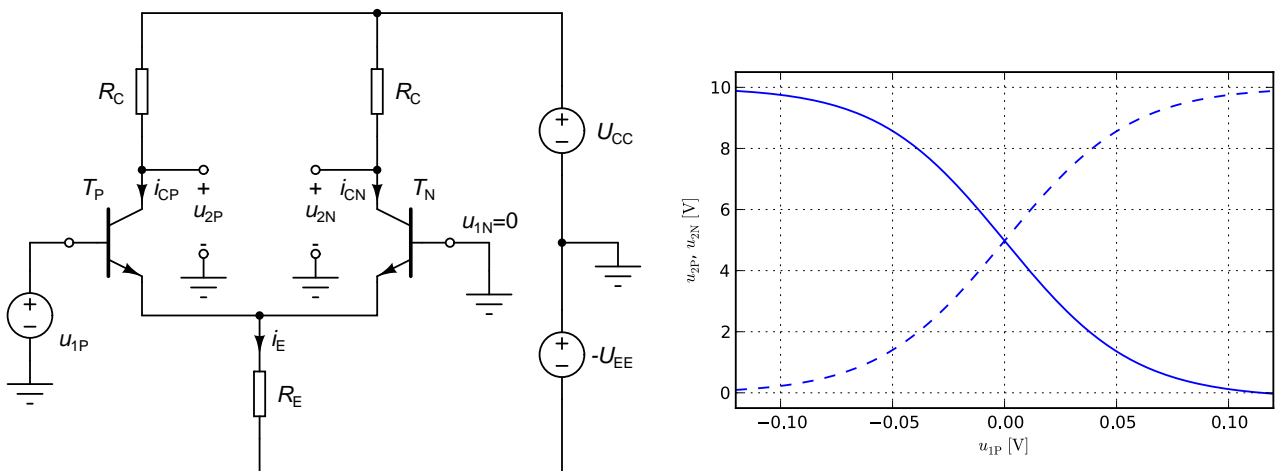
$$U_{CEP} = U_{CEN} = U_{CC} - U_{EE} - R_C I_{CP} - R_E I_E \approx U_{CC} - U_{EE} - R_C \frac{I_E}{2} - R_E I_E. \quad (8.159)$$

Tokova, ki tečeta v bazi tranzistorjev, imenujemo tudi **vhodna napajalna tokova**. V delovni točki sta enaka

$$I_{BP} = I_{BN} = \frac{I_{EP}}{1 + \beta_F} = \frac{I_E}{2(1 + \beta_F)}. \quad (8.160)$$

**Primer 8.10:** Vzemimo tranzistorja z  $\beta_F = 400$  in  $V_{AF} = 50V$ , napajanje  $U_{CC} = -U_{EE} = 10V$  ter upora  $R_C = 5k\Omega$  in  $R_E = 4,65k\Omega$ . Tok  $I_E$  znaša  $2mA$ . Ob upoštevanju, da je  $\beta_F$  velik, sta kolektorska tokova  $I_{CP} = I_{CN} = I_E/2 = 1mA$ . Kolektorska potenciala sta  $U_{2P} = U_{2N} = 5V$ , napetosti  $U_{CEP} = U_{CEN}$  pa  $5,7V$ . Vhodna napajalna tokova znašata  $I_{BP} = I_{BN} = 2,49\mu A$ .

Admitančni parametri tranzistorjev (enačbe (8.3)-(8.5)) so v tej delovni točki enaki  $g_{11} = 86,8\mu S$ ,  $g_{21} = 38,7mS$  in  $g_{22} = 18,0\mu S$ . Za  $\beta$  dobimo  $445,6$ .  $\triangle$



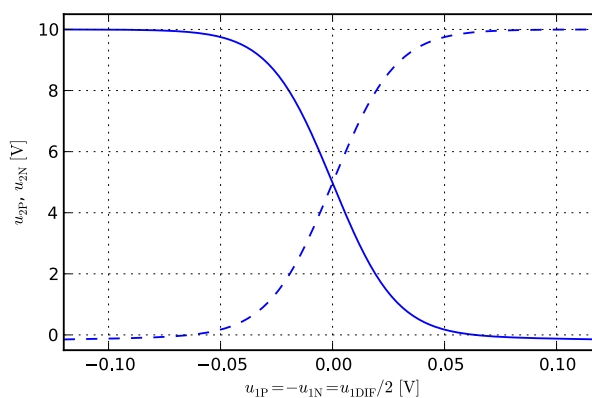
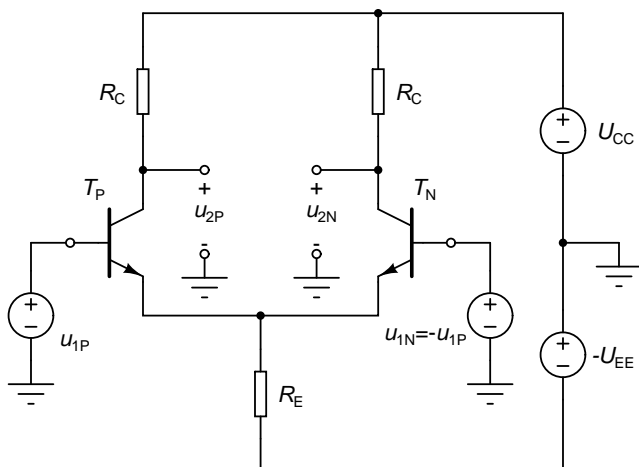
Slika 8.38: Enostransko krmiljenje pri katerem je  $u_{1N} = 0$  (levo) in odziv diferencialnega ojačevalnika (desno). Polna črta predstavlja  $u_{2P}$ , črtkana pa  $u_{2N}$ .

$$U_{CC} = -U_{EE} = 10V, R_C = 5k\Omega \text{ in } R_E = 4,65k\Omega.$$

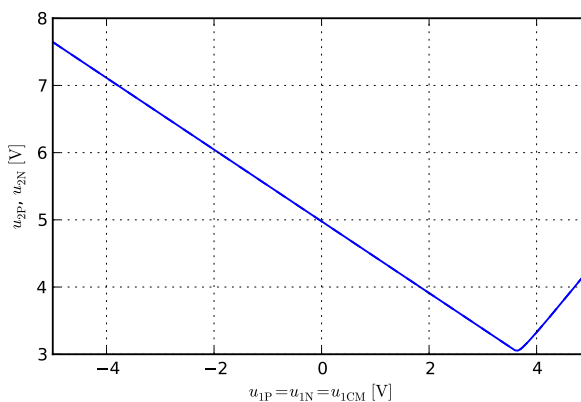
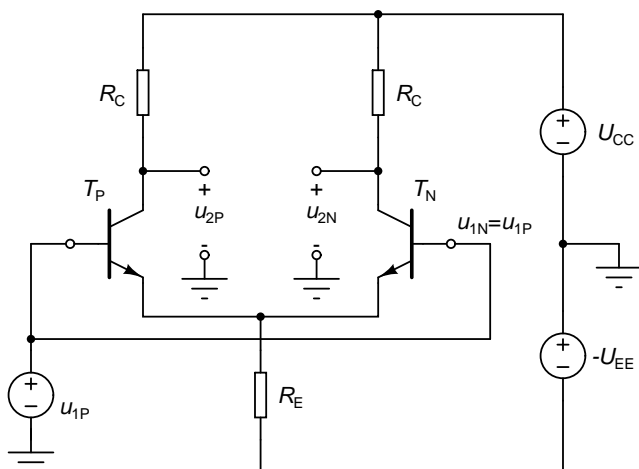
Ko postanejo vhodni signali različni od  $0V$ , začneta potenciala kolektorjev (in z njima izhodni napetosti) odstopati od svojih vrednosti v delovni točki. Pogledali si bomo odzive za tri osnovne načine krmiljenja diferencialnega ojačevalnika. Zaradi lažjega razumevanja bomo opazovali kar neobremenjen ojačevalnik.

Pri **enostranskem krmiljenju** je le ena od obeh vhodnih napetosti različna od  $0$ . Slika 8.38 prikazuje shemo in odziv za primer, ko je  $u_{1P} \neq 0$  in  $u_{1N} = 0$ . Čeprav krmilimo le levi tranzistor  $T_P$ , pa se odziva tudi kolektor desnega tranzistorja  $T_N$ . Povečanje kolektorskega toka  $i_{CP}$ , zaradi katerega se potencial  $u_{2CP}$  zniža, ima za posledico povečanje  $i_E$ . Ta zaradi večjega padca napetosti na  $R_E$  dvigne potenciala emitorja  $T_N$ . S tem mu zmanjša napetost  $u_{BE}$  in z njo tudi kolektorski tok  $i_{2N}$ . Manjši kolektorski tok pa povzroči povečanje napetosti  $u_{CN}$ .

Pri **diferencialnem krmiljenju** je  $u_{1P} = -u_{1N} = u_{1DIF}/2$ . Z  $u_{1DIF}$ , ki jo imenujemo tudi **vhodna diferencialna napetost**, smo označili razliko  $u_{1P} - u_{1N}$ . Odziv (slika 8.39) je podoben, kot pri enostranskem krmiljenju, le da



Slika 8.39: Diferencialno krmiljenje z  $u_{1P} = -u_{1N} = u_{1DIF}$  (levo), in odziv diferencialnega ojačevalnika (desno). Polna črta predstavlja  $u_{2P}$ , črtkana pa  $u_{2N}$ .  $U_{CC} = -U_{EE} = 10V$ ,  $R_C = 5k\Omega$  in  $R_E = 4,65k\Omega$ .

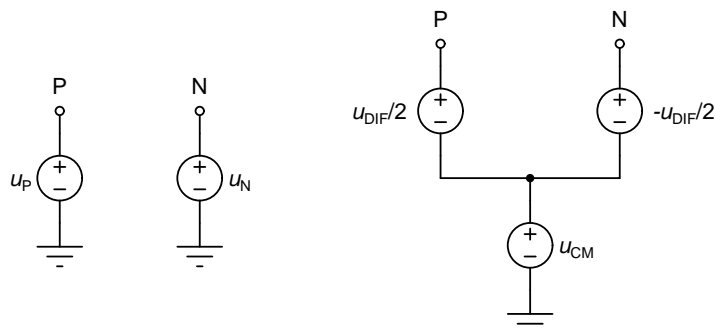


Slika 8.40: Sofazno krmiljenje z  $u_{1P} = u_{1N} = u_{1CM}$  (levo), in odziv diferencialnega ojačevalnika (desno).  $U_{CC} = -U_{EE} = 10V$ ,  $R_C = 5k\Omega$  in  $R_E = 4,65k\Omega$ .

je strmina odziva dvakrat večja, saj ojačevalnik krmilimo tako na levem, kot tudi na desnem vhodu, kar prispeva k hitrejšemu spreminjanju izhodne napetosti.

**Sofazno krmiljenje** in odziv diferencialnega ojačevalnika sta prikazana na sliki 8.40. Pri tem načinu krmiljenja sta napetosti  $u_{1P}$  in  $u_{1N}$  enaki **vhodni sofazni napetosti**  $u_{1CM}$ . Zaradi simetrije sta pri takem krmiljenju enaki tudi izhodni napetosti ( $u_{2P} = u_{2N}$ ). Iz odziva lahko razberemo še, da se izhoda spreminjata mnogo počasneje, kot pri enostranskem in pri diferencialnem krmiljenju.

Za dober ojačevalnik morata tranzistorja delovati v aktivnem področju, kar pomeni, da mora biti napetost  $u_{CE}$  večja od napetosti  $u_{BE}$ . Zaradi tega pri načrtovanju diferencialnih ojačevalnikov ponavadi izberemo delovno točko izhodnih napetosti ( $U_{2P} = U_{2N}$ ) nekje na sredini med  $U_{CC}$  in  $0V$ . Pri taki izbiri delovne točke izhodni napetosti nikoli nista mnogo nižji od  $0V$ , tudi če dovolimo tranzistorjema, da padeta v področje nasičenja.



Slika 8.41: Razstavljanje para signalov  $u_P$  in  $u_N$  (levo) v sofazni del  $u_{CM}$  in diferencialni del  $u_{DIF}$  (desno).

**Par signalov  $u_P$  in  $u_N$  lahko razbijemo na sofazni del  $u_{CM}$  in diferencialni del  $u_{DIF}$ . Velja**

$$u_{DIF} = u_P - u_N, \quad (8.161)$$

$$u_{CM} = \frac{u_P + u_N}{2}. \quad (8.162)$$

Obratno pot, po kateri dobimo signala, če poznamo sofazni in diferencialni del, opisujeta enačbi

$$u_P = u_{CM} + \frac{u_{DIF}}{2}, \quad (8.163)$$

$$u_N = u_{CM} - \frac{u_{DIF}}{2}. \quad (8.164)$$

Razstavljanje para signalov (slika 8.41, levo) v sofazni in diferencialni del lahko ponazorimo z vezjem na sliki 8.41 (desno). Vidimo, da je enostransko vzbujanje na sliki 8.38 sestavljeno iz diferencialnega vzbujanja  $u_{1DIF} = u_{1P}$  in sofaznega vzbujanja  $u_{1CM} = u_{1P}/2$ .

Dokler sta vhodna signala ( $u_{1P}$ ,  $u_{1N}$ ) in z njima tudi odstopanji ( $u_{1p}$ ,  $u_{1n}$ ) od baznega potenciala v delovni točki (0V) majhni, lahko določimo odstopanje izhodnih signalov ( $u_{2p}$ ,  $u_{2n}$ ) od delovne točke ( $U_{2P}$ ,  $U_{2N}$ ) s pomočjo superpozicije. Pri tem posebej preračunamo odziv na sofazni del ( $u_{1CM} = u_{1cm}$ ) in odziv na diferencialni del ( $u_{1DIF} = u_{1dif}$ ) vhodnega para signalov. Pri tem potrebujemo ojačenje vezja za majhne signale za sofazno in za diferencialno vzbujanje.

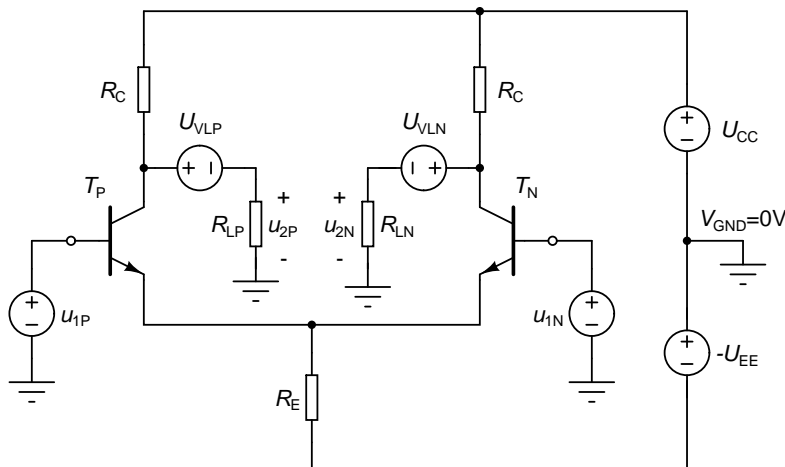
Slika 8.42 prikazuje obremenjen diferencialni ojačevalnik. Breme predstavljata upora  $R_{LP}$  in  $R_{LN}$ . Ker sta potenciala kolektorjev obeh tranzistorjev v delovni točki različna od 0V, moramo enosmerni sklop izvesti s pomočjo prilagoditve napetostnih nivojev, ki jo predstavljata enosmerna napetostna vira  $U_{VLP}$  in  $U_{VLN}$ . Njuna vrednost mora biti enaka potencialu kolektorjev obeh tranzistorjev v delovni točki. Na ta način dosežemo, da pri  $u_{1P} = u_{1N} = 0$  velja  $u_{2P} = u_{2N} = 0$ . V delovni točki zato skozi bremenska upora ne teče tok. Če bi namesto napetostnih virov uporabili vezna kondenzatorja, sklop ne bi bil več enosmeren, ojačevalnik pa ne bi ojačeval enosmernih signalov.

Če upoštevamo, da napajalna vira  $U_{CC}$  in  $U_{EE}$  ter enosmerna napetostna vira  $U_{VLP}$  in  $U_{VLN}$  predstavljajo kratek stik za izmenične signale, dobimo model vezja za majhne signale, ki je prikazan na sliki 8.43. Pri določanju diferencialnega in sofaznega ojačenja bomo predpostavili, da sta bremenska upora enaka ( $R_{LP} = R_{LN} = R_L$ ).

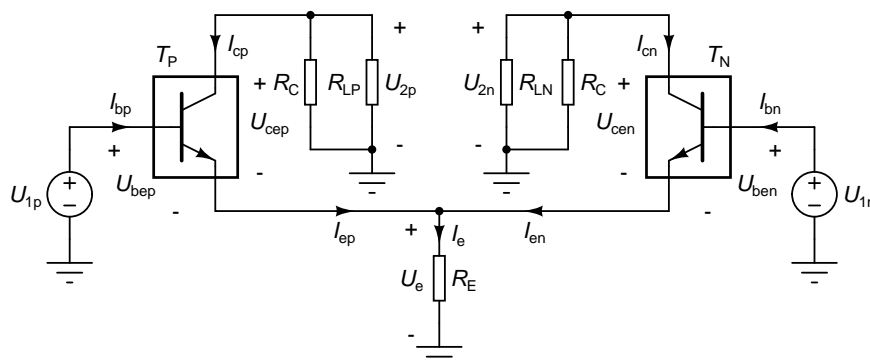
**Pri diferencialnem krmiljenju** za kompleksorje majhnih vhodnih signalov velja  $U_{1n} = -U_{1p}$ . Zaradi simetrije vezja in linearnosti velja  $I_{en} = -I_{ep}$ . To pa pomeni, da je tok  $I_e$  skozi upor  $R_E$  ves čas enak 0A. Padeč napetosti na njem je enak 0V in emitorja obeh tranzistorjev v vezju na sliki 8.43 sta ves čas ozemljena. Tranzistorja  $T_P$  in  $T_N$  delujeta v orientaciji s skupnim emitorjem. Ojačenje orientacije s skupnim emitorjem že poznamo (enačba (8.12)).

$$\frac{U_{2p}}{U_{1p}} = \frac{U_{2n}}{U_{1n}} = -\frac{g_{21}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (8.165)$$





Slika 8.42: Obremenjen diferencialni ojačevalnik z enosmerno sklopljenima bremenskima uporoma \$R\_{LP}\$ in \$R\_{LN}\$. Enosmerna vira \$U\_{VLP}\$ in \$U\_{VLN}\$ skrbita za prilagoditev napetostnih nivojev.



Slika 8.43: Model diferencialnega ojačevalnika za majhne signale.

**Diferencialno napetostno ojačenje** \$A\_{UD}\$ je definirano kot razmerje med izhodno napetostjo \$U\_{1p}\$ in vhodno diferencialno napetostjo \$U\_{1dif} = U\_{1p} - U\_{1n} = 2U\_{1p}\$ pri diferencialnem krmiljenju.

$$A_{UD} = \frac{U_{2p}}{U_{1dif}} = -\frac{U_{2n}}{U_{1dif}} = -\frac{g_{21}}{2(g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1})}. \quad (8.166)$$

**Pri sofaznem krmiljenju** je \$U\_{1p} = U\_{1n} = U\_{1cm}\$. Zaradi simetrije velja \$I\_{ep} = I\_{en}\$ in \$I\_e = 2I\_{ep} = 2I\_{en}\$. Da bo izračun enostavnejši, bomo zanemarili \$g\_{22}\$. Velja \$I\_{ep} = I\_{bp} + I\_{cp} = (g\_{11} + g\_{21})U\_{bep}\$. Vhodno in izhodno napetost lahko izrazimo kot

$$U_{1p} = U_{bep} + I_e R_E = U_{bep} + 2I_{ep} R_E = U_{bep}(1 + 2(g_{11} + g_{21})R_E), \quad (8.167)$$

$$U_{2p} = -I_{cp} \frac{R_C R_L}{R_C + R_L} = -g_{21} U_{bep} \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}. \quad (8.168)$$

**Sofazno napetostno ojačenje** \$A\_{UC}\$ je razmerje med izhodno napetostjo \$U\_{1p}\$ in vhodno sofazno napetostjo \$U\_{1cm} = U\_{1p} = U\_{1n}\$ pri sofaznem krmiljenju.

$$A_{UC} = \frac{U_{2p}}{U_{1cm}} = \frac{U_{2n}}{U_{1cm}} = -\frac{g_{21} \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}}{1 + 2(g_{11} + g_{21})R_E} = -\frac{\beta \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}}{g_{11}^{-1} + 2(1 + \beta)R_E} \stackrel{\beta \gg 1}{\approx} -\frac{R_C R_L}{2R_E(R_C + R_L)}. \quad (8.169)$$

Sedaj lahko s pomočjo superpozicije in (8.163)-(8.164) izrazimo obe izhodni napetosti kot

$$U_{2p} = A_{UC}U_{1cm} + A_{UD}U_{1dif} = A_{UC}\frac{U_{1p} + U_{1n}}{2} + A_{UD}(U_{1p} - U_{1n}), \quad (8.170)$$

$$U_{2n} = A_{UC}U_{1cm} - A_{UD}U_{1dif} = A_{UC}\frac{U_{1p} + U_{1n}}{2} - A_{UD}(U_{1p} - U_{1n}). \quad (8.171)$$

Če izhodna signala  $U_{2p}$  in  $U_{2n}$  razstavimo na diferencialni del  $U_{2dif}$  in sofazni del  $U_{2cm}$ , vidimo, da ob diferencialnem vzbujanju na vhodu ( $U_{1cm} = 0$ ) dobimo samo diferencialni izhodni signal ( $U_{2cm} = 0$ ). Podobno ob sofaznem vzbujanju na vhodu ( $U_{1dif} = 0$ ) dobimo samo sofazni izhodni signal ( $U_{2dif} = 0$ ).

**Rejekcijski faktor**  $F_R$  je definiran kot razmerje med diferencialnim in sofaznim ojačenjem. V angleški literaturi ga najdemo pod imenom **common mode rejection ratio (CMRR)**.

$$F_R = \frac{A_{UD}}{A_{UC}} = \frac{1 + 2(g_{11} + g_{21})R_E}{2(g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1})\frac{R_C R_L}{R_C + R_L}} = \frac{\frac{1}{2} + (g_{11} + g_{21})R_E}{1 + g_{22}\frac{R_C R_L}{R_C + R_L}}. \quad (8.172)$$

Ojačenja in rejekcijski faktor ponavadi podajamo v **decibelih** (dB), ki jih iz ojačenja  $A$  dobimo kot dvajsetkratnik desetiškega logaritma absolutne vrednosti ojačenja  $A$

$$A \text{ [dB]} = 20\log_{10}|A|. \quad (8.173)$$

**Primer 8.11:** Če za diferencialni ojačevalnik iz primera 8.10 vzamemo  $R_L \rightarrow \infty$  (neobremenjen ojačevalnik), je diferencialno ojačenje  $A_{UD} = -88,7$  (39,0dB), sofazno ojačenje  $A_{UC} = -0,535$  (-5,43dB) in rejekcijski faktor  $F_R = 165,9$  (44,4dB).  $\triangle$

Ker je sofazno ojačenje nezaželen pojav v diferencialnem ojačevalniku, si želimo čim večji  $F_R$ . Dosežemo ga v prvi vrsti z velikim  $R_E$ . Vendar pa uporaba velikega  $R_E$  pomeni, da potrebujemo tudi visoko napajalno napetost  $-U_{EE}$  (enačba (8.156)).

**Primer 8.12:** Če bi vzeli  $R_E = 1M\Omega$  in želeli  $I_E = 2mA$ , bi potrebovali napetost  $U_{EE} \approx 2000V$ . To seveda ni izvedljivo.  $\triangle$

Druga pot do velikega  $R_E$  in z njim visokega rejekcijskega faktorja vodi preko **uporabe tokovnega vira namesto  $R_E$**  (slika 8.44). Realni tokovni vir (poglavje 8.3, slika 8.13) ima visoko izhodno upornost, z naraščanjem napetosti na bremenu pa prej ali slej preneha delovati kot tokovni vir in zato ne zahteva visokih napajalnih napetosti.

**Primer 8.13:** Da bi bil tok  $I_E$  enak 2mA, bi ob uporabi Zenerjeve diode z  $U_Z = 4,7V$  in  $I_Z = 5mA$  ter napajalni napetosti  $-U_{EE} = 10V$  potrebovali  $R_2 = (U_Z - U_K)/I_E = 2k\Omega$  in  $R_1 = (-U_{EE} - U_Z)/I_Z = 1,06k\Omega$  (enačbe (8.44)-(8.46)). Pri tem smo predpostavili, da je  $\beta_F$  tranzistorja  $T'$  zelo velik, tako da je njegov bazni tok zanemarljiv v primerjavi z  $I_Z$  in  $I_E$ . Pri kolektorkem toku  $I_C \approx I_E = 2mA$  in temperaturi  $T = 300K$  so admitančni parametri tranzistorja  $T'$  ( $\beta_F = 400$ ,  $V_{AF} = 50V$ ), enaki

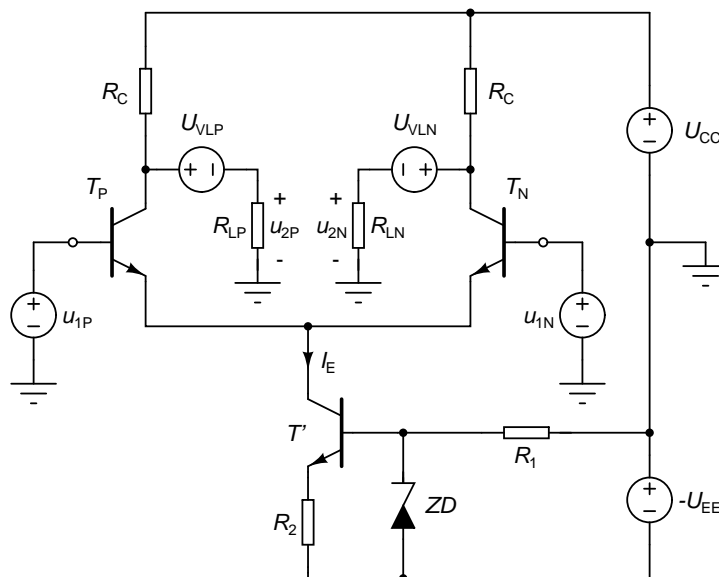
$$g'_{21} = \frac{I_C}{V_T} \approx \frac{I_E}{V_T} = 193\mu S, \quad (8.174)$$

$$g'_{11} = \frac{g'_{21}}{\beta} \approx \frac{g'_{21}}{\beta_F} = 77,4mS, \quad (8.175)$$

$$g'_{22} = \frac{I_C}{U_{CE} + V_{AF}} \approx \frac{I_E}{V_{AF}} = 40\mu S. \quad (8.176)$$

Tak tokovni vir ima izhodno impedanco (enačba (8.48))

$$Z_{out} = \left(1 + \frac{g'_{21} + g'_{22}}{g'_{11} + R_2^{-1}}\right) g'_{22}^{-1}, \quad (8.177)$$



Slika 8.44: Diferencialni ojačevalnik z visokim rejekcijskim faktorjem, ki uporablja tokovni vir namesto upora  $R_E$ . Bremenska upora  $R_{LP} = R_{LN} = R_L$  sta enosmerno sklopljena s pomočjo prilagoditve napetostnih nivojev ( $U_{VLP}$  in  $U_{VLN}$ ).

ki sedaj igra vlogo  $R_E$  v enačbi (8.169). Predpostavimo, da sta bremenska upora enaka ( $R_{LP} = R_{LN} = R_L$ ). Uporaba tokovnega vira ne vpliva na diferencialno ojačenje, ki ostane enako (8.166). Se pa močno zmanjša sofazno ojačenje, ki sedaj znaša

$$A_{UC} = -\frac{g_{21} \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}}{1 + 2(g_{11} + g_{21})Z_{out}}. \quad (8.178)$$

Za  $R_L \rightarrow \infty$ ,  $R_C = 5\text{k}\Omega$  in tranzistorje s parametri podanimi v primeru 8.10, dobimo  $Z_{out} = 2,82\text{M}\Omega$  in  $A_{UC} = 0,88 \cdot 10^{-3}$  oziroma  $-61,1\text{dB}$ . Uporaba tokovnega vira močno poveča rejekcijski faktor, ki je sedaj enak  $1,00 \cdot 10^5$  oziroma  $100\text{dB}$ .  $\triangle$

Enačbi (8.170)-(8.171), ki izražata oba izhodna signala z vhodnima, lahko s pomočjo rejekcijskega faktorja preoblikujemo v

$$U_{2p} = A_{UD} \left( F_R^{-1} \frac{U_{1p} + U_{1n}}{2} + (U_{1p} - U_{1n}) \right), \quad (8.179)$$

$$U_{2n} = A_{UD} \left( F_R^{-1} \frac{U_{1p} + U_{1n}}{2} - (U_{1p} - U_{1n}) \right). \quad (8.180)$$

Če je rejekcijski faktor zelo velik, se enačbi poenostavita v

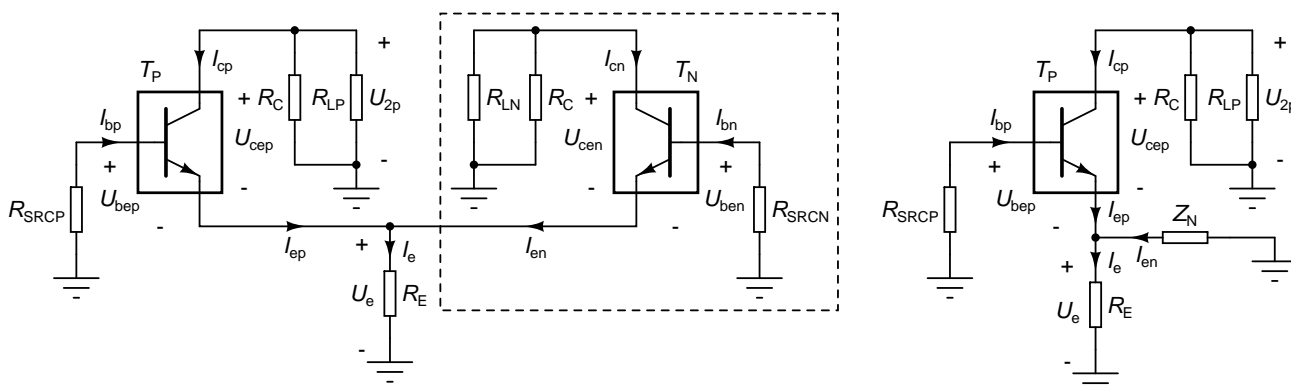
$$U_{2p} = A_{UD} U_{1\text{dif}} = A_{UD} (U_{1p} - U_{1n}), \quad (8.181)$$

$$U_{2n} = -A_{UD} U_{1\text{dif}} = -A_{UD} (U_{1p} - U_{1n}), \quad (8.182)$$

kar pomeni, da ojačevalnik ojačuje le vhodni diferencialni signal (razliko obeh vhodnih napetosti). Vira, ki dajeta vhodni signal v vezje ( $U_{1p}$  in  $U_{1n}$ ), čitita vhodni admitanci obeh vhodov diferencialnega ojačevalnika kot svoje breme. Vhodna admitanca je odvisna od načina krmiljenja ojačevalnika.



Vhodna admitanca za sofazno krmiljenje je majhna, saj ponavadi uporabimo velik  $R_E$  (tokovni vir), pa še ta se pomnoži z  $1 + \beta$ . Če bi uporabili samo upor  $R_E = 4,65\text{k}\Omega$  (slika 8.37, levo), bi bila vhodna admitanca za sofazne signale (ob upoštevanju ostalih podatkov iz primera 8.13) enaka  $Y_{\text{in,cm}} = 0,24\mu\text{S}$ , kar ustreza impedanci  $4,16\text{M}\Omega$ . Vhodna admitanca za diferencialne signale bi bila enaka  $Y_{\text{in,dif}} = g_{11} = 86,6\mu\text{S}$  (vhodna impedanca  $11,5\text{k}\Omega$ ).



Slika 8.47: Določanje izhodne admitance tranzistorja  $T_P$  v diferencialnem ojačevalniku (levo). S črtkano črto obdano vezje lahko nadomestimo z impedanco  $Z_N$  (desno).

**Izhodna admitanca diferencialnega ojačevalnika** je odvisna v prvi vrsti od izhodne admitance tranzistorja, ki je za tranzistor  $T_P$  definirana kot

$$Y_{\text{out,tp}} = \frac{I_{\text{cp}}}{U_{2\text{p}}}. \quad (8.187)$$

Če nas zanima izhodna admitanca tranzistorja  $T_N$ , moramo v vseh izpeljavah zamenjati indeks P z indeksom N. Izhodna impedanca  $Y_{\text{out,tp}}$  je odvisna tako od obeh signalnih virov ( $R_{\text{SRCp}}$  in  $R_{\text{SRCN}}$ ), kot tudi od obremenitve tranzistorja  $T_N$ , ki jo tvorita  $R_C$  in  $R_{\text{LN}}$ . Pri računanju izhodne admitance si pomagamo tako, da s črtkano črto obdano vezje na sliki 8.47 (levo) nadomestimo z impedanco  $Z_N = -U_e/I_{\text{en}}$  (slika 8.47, desno). Impedanca  $Z_N$  se veže vzporedno z  $R_E$ .

Izhodno admitanco tranzistorja  $T_P$  bomo določili za primer, ko je ojačevalnik krmiljen napetostno ( $R_{\text{SRCp}} = R_{\text{SRCN}} = 0\Omega$ ). Tako krmiljenje imamo pri diferencialnih ojačevalnikih z MOS tranzistorji, ne glede na vrednosti  $R_{\text{SRCp}}$  in  $R_{\text{SRCN}}$ . Takrat je namreč  $g_{11} = 0$  in v vhod tranzistorja ne teče tok, zaradi česar lahko zanemarimo vsak  $R_{\text{SRC}}$  v primerjavi z  $g_{11}^{-1}$ . S črtkano črto obdano vezje je pri  $R_{\text{SRCN}} = 0$  pravzaprav tranzistor v orientaciji s skupno bazo, impedanca  $Z_N$  pa je njegova vhodna impedanca. V poglavju 8.3 smo dobili rezultat, da je vhodna admitanca v tranzistor v orientaciji s skupno bazo med  $g_{11}$  in  $g_{11} + g_{21} + g_{22}$  (enačba (8.38)).

Tako velja  $Z_N = g_{11}^{-1}$ , če sta  $R_C$  in  $R_{\text{LN}}$  velika v primerjavi z  $g_{22}^{-1}$ . Če pa je eden od njiju precej manjši od  $g_{22}^{-1}$ , pa velja  $Z_N \approx g_{21}^{-1}$ . V prvem primeru imamo opravka z impedancami reda velikosti od nekaj  $\text{k}\Omega$  do nekaj  $10\text{k}\Omega$ , v drugem primeru pa je impedanca nekaj  $10\Omega$ . Pogledali si bomo obe skrajnosti, da določimo meje, v katerih se giblje  $Y_{\text{out,tp}}$ .

Če velja  $Z_N = (g_{11} + g_{21} + g_{22})^{-1}$ , je impedanca med emitorjem in referenčnim vozliščem tranzistorja  $T_P$  nizka, tranzistor pa deluje v orientaciji s skupnim emitorjem. Velja

$$Y_{\text{out,tp}} = g_{22}. \quad (8.188)$$

Če je  $Z_N = g_{11}^{-1}$ , impedanca med emitorjem in referenčnim vozliščem tranzistorja  $T_P$  ni več zanemarljiva. Zaradi naše prvotne predpostavke o napetostnem krmiljenju pa še vedno velja  $R_{\text{SRCp}} = 0\Omega$ . To pomeni, da deluje  $T_P$  v

orientaciji s skupno bazo. Njegova izhodna admitanca (enačba (8.41)) zato znaša

$$Y_{\text{out,tp}} = \frac{g_{22}}{1 + \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11} + R_E^{-1} + Z_N^{-1}}} < g_{22}. \quad (8.189)$$

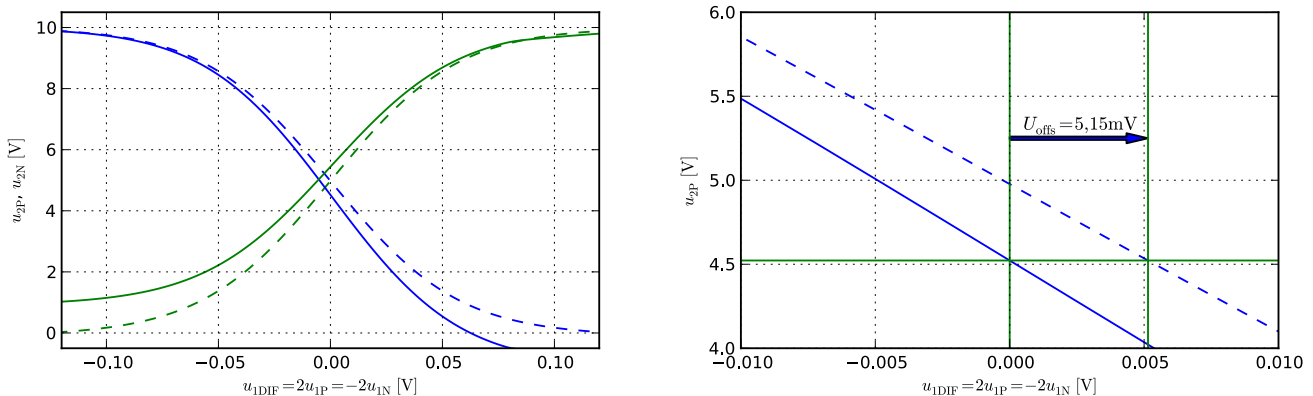
Ponavadi ni samo manjša, ampak precej manjša od  $g_{22}$ . Sklenemo lahko torej: izhodna admitanca tranzistorja pri napetostno krmiljenem diferencialnem ojačevalniku je največ  $g_{22}$ .

Osnovna lastnost diferencialnega ojačevalnika je njegova simetrija. To pomeni, da sta oba kolektorska upora ( $R_C$ ) enaka, prav tako pa tudi tranzistorja  $T_P$  in  $T_N$ . Vendar pa nam nikoli ne uspe izdelati popolnoma simetričnega ojačevalnika. **Nesimetrija ojačevalnika** ima vrsto posledic. Oba vhodna napajalna tokova nista več enaka ( $I_{BP} \neq I_{BN}$ ). Če je nesimetrija majhna, je tudi razlika med  $I_{BP}$  in  $I_{BN}$  majhna. Za diferencialne ojačevalnike pogosto podajamo vhodne napajalne tokove v obliki

$$I_{BP} = I_B + \frac{I_{\text{offs}}}{2}, \quad (8.190)$$

$$I_{BN} = I_B - \frac{I_{\text{offs}}}{2}. \quad (8.191)$$

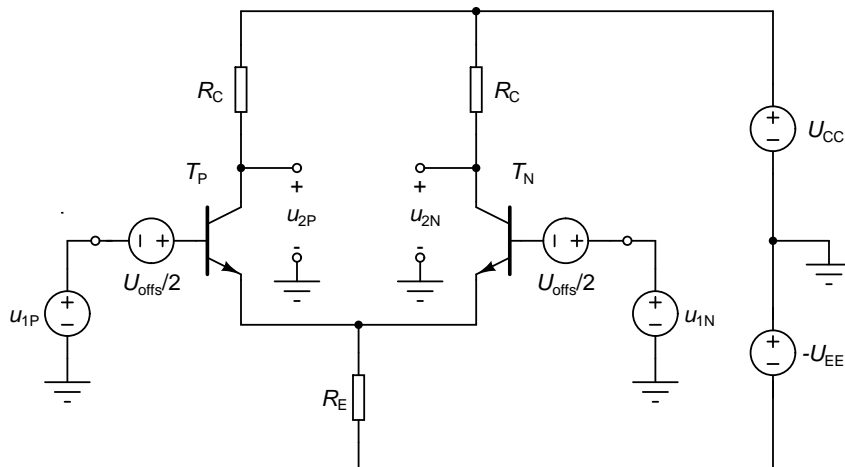
Tok  $I_B$  imenujemo kar vhodni napajalni tok, tok  $I_{\text{offs}}$  pa **vhodni ničelni tok** (ang. **input offset current**). Zaradi naključnosti proizvodnih odstopanj, ki povzročajo nesimetrijo ojačevalnika, je  $I_{\text{offs}}$  naključne narave in pri dobrih ojačevalnikih precej manjši od  $I_B$ .



Slika 8.48: Vpliv nesimetrije (10% odstopanje uporov  $R_C$  od načrtovanih vrednosti) na izhodne napetosti ojačevalnika (levo). Premik karakteristike  $u_{1P}$  za  $U_{\text{offs}}$  zaradi nesimetrije ojačevalnika (desno). Odziv simetričnega ojačevalnika je prikazan s črtkano črto.

Zaradi nesimetrije postaneta delovni točki leve in desne polovice vezja različni. Zaradi različnih delovnih točk in različnih elementov so tudi lastnosti vezja za majhne signale različne za levo in za desno polovico vezja. Slika 8.48 (levo, črtkane črte) prikazuje odziv nesimetričnega diferencialnega ojačevalnika (shema na sliki 8.39) na diferencialno vzbujanje. Nesimetrijo povzročata kolektorska upora, ki odstopata za 10% od načrtovanih vrednosti, eden navzgor in drugi navzdol. Vidimo, da je ojačenje leve polovice vezja zaradi večjega  $R_C$  večje od ojačenja desne polovice. Pri nesimetričnem ojačevalniku dobimo ob čisto diferencialnem vzbujanju tudi nekaj sofaznega odziva, pri čisto sofaznem vzbujanju pa tudi nekaj diferencialnega odziva.

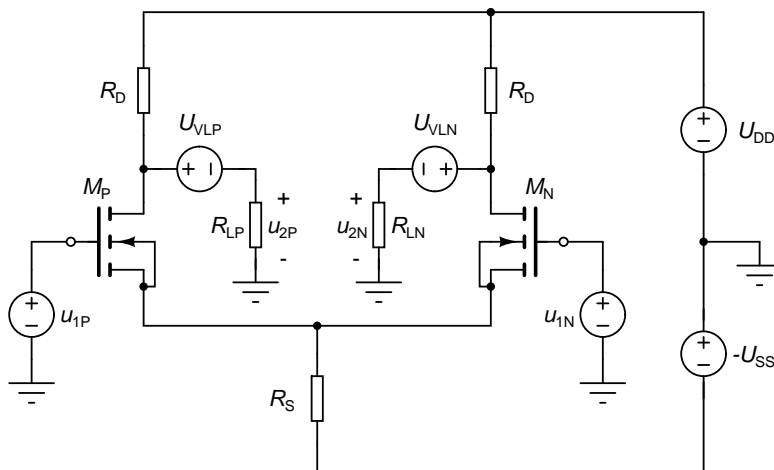
Če opazujemo samo enega od obeh izhodov, vidimo, da se karakteristika ojačevalnika zaradi nesimetrije premakne v levo ali v desno. **Vhodna ničelna napetost** je vhodna diferencialna napetost simetričnega ojačevalnika pri kateri



Slika 8.49: Modeliranje vhodne ničelne napetosti s simetričnim diferencialnim ojačevalnikom in neodvisnima napetostnima viroma  $U_{\text{offs}}/2$  na obeh vhodih.

je izhodna napetost enaka tisti iz nesimetričnega ojačevalnika, ki ga krmilimo z  $u_{1\text{DIF}} = 0\text{V}$ . Označimo jo z  $U_{\text{offs}}$ . V angleški literaturi najdemo to napetost pod imenom **input offset voltage**. Slika 8.48 (desno) prikazuje vpliv nesimetrije na izhodno napetost  $u_{2\text{P}}$  (črtkana črta). Pri prej opisanem 10% odstopanju uporov  $R_C$  leži karakteristika  $u_{2\text{P}}(u_{1\text{DIF}})$  simetričnega ojačevalnika za  $U_{\text{offs}} = 5,15\text{mV}$  desno glede na karakteristiko nesimetričnega ojačevalnika. Podobno odstopanje opazimo tudi pri karakteristiki  $u_{2\text{N}}(u_{1\text{DIF}})$ . Ker so proizvodna odstopanja naključna, sta tako velikost kot tudi predznak vhodne ničelne napetosti naključna.

Vhodno ničelno napetost modeliramo tako, da simetričnemu diferencialnemu ojačevalniku zaporedno z vhodnima napetostima  $u_{1\text{P}}$  in  $u_{1\text{N}}$  vežemo napetostna vira  $U_{\text{offs}}/2$  (slika 8.49). Pri tem se napetost enega vira prišteva k  $u_{1\text{P}}$ , napetost drugega vira pa odšteva od  $u_{1\text{N}}$ .



Slika 8.50: Diferencialni ojačevalnik z MOS tranzistorjema in enosmerno sklopljenima bremenskima uporoma.

**Pri diferencialnem ojačevalniku, ki ga zgradimo z unipolarnimi tranzistorji**, sta vhodna napajalna tokova ponavadi zelo majhna (JFET tranzistorji) ali celo zanemarljiva (MOS tranzistorji). Pri vseh izpeljavah moramo upoštevati  $g_{11} = 0$ . To tudi pomeni, da je ojačevalnik napetostno krmiljen ne glede na vrednost  $R_{\text{SRCP}}$  in  $R_{\text{SRCN}}$ . Slika 8.50 prikazuje diferencialni ojačevalnik z MOS tranzistorjema. Tudi tokrat sta bremenska upora enosmerno sklopljena z izhodoma ojačevalnika preko napetostnih virov  $U_{\text{VLP}}$  in  $U_{\text{VLN}}$ .

Pri izračunu delovne točke predpostavimo  $\lambda = 0$ . Ker je tok ponora  $I_D$  enak toku, ki priteče iz izvora ( $I_S$ ), v delovni točki velja

$$I_D = \frac{K}{2}(U_{GS} - U_T)^2 = \frac{K}{2}(-U_{SS} - 2I_D R_S - U_T)^2. \quad (8.192)$$

Z reševanjem kvadratne enačbe (8.192) dobimo tok  $I_D$ . Sedaj lahko določimo še napetost  $U_{DS}$ .

$$U_{DS} = U_{DD} - U_{SS} - I_D(R_D + 2R_S). \quad (8.193)$$

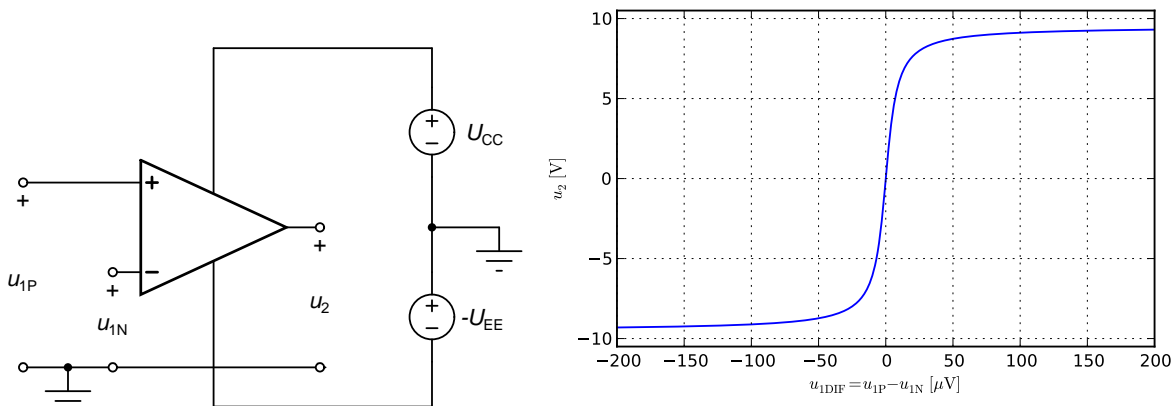
S pomočjo enačb (8.9) in (8.10) določimo admitančna parametra  $g_{21}$  in  $g_{22}$ . Sedaj lahko uporabimo vse rezultate, ki smo jih izpeljali za diferencialni ojačevalnik z bipolaranima tranzistorjema. Pri tem v izrazih zamenjamo  $R_C$  in  $R_E$  z  $R_D$  in  $R_S$ , predpostavimo simetrično breme ( $R_{LP} = R_{LN} = R_L$ ) in upoštevamo  $g_{11} = 0$ . Diferencialno in sofazno ojačenje ter rejekcijski faktor znašajo

$$A_{UD} = -\frac{g_{21}}{2(g_{22} + R_D^{-1} + R_L^{-1})}, \quad (8.194)$$

$$A_{UC} = -\frac{\frac{R_D R_L}{R_D + R_L}}{g_{21}^{-1} + 2R_S}, \quad (8.195)$$

$$F_R = \frac{\frac{1}{2} + g_{21} R_S}{1 + g_{22} \frac{R_D R_L}{R_D + R_L}}. \quad (8.196)$$

Zaradi  $g_{11} = 0$  je vhodna admitanca pri diferencialnem in pri sofaznem krmiljenju enaka  $Y_{in,dif} = Y_{in,cm} = 0$ . Za izhodno admitanco obeh tranzistorjev ( $Y_{out,tp}$  in  $Y_{out,tn}$ ) velja, da v nobenem primeru ne more biti večja od  $g_{22}$ .



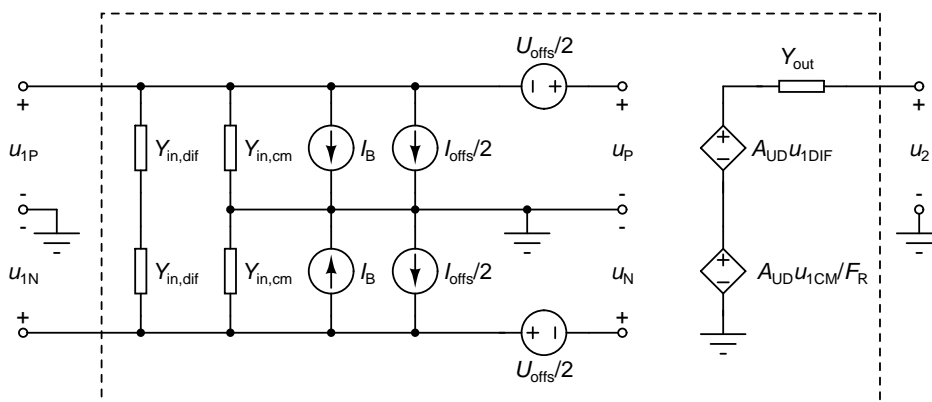
Slika 8.51: Operacijski ojačevalnik (levo) in njegova karakteristika pri diferencialnem krmiljenju (desno).  $U_{CC} = -U_{EE} = 10V$ ,  $A_{UD} = 10^5$ .

Diferencialni ojačevalnik je ponavadi uporabljen kot vhodna ojačevalna stopnja. V tej vlogi nastopa tudi v **operacijskem ojačevalniku**, kjer sta mu dodani še vmesna ojačevalna stopnja in končna močnostna ojačevalna stopnja (ponavadi s komplementarnima tranzistorjema v orientaciji s skupnim kolektorjem ali ponorom - push-pull vezava). Ponavadi imajo operacijski ojačevalniki en izhod. Ker ima končna stopnja, ki jo izvedemo s tranzistorji v orientaciji s skupnim kolektorjem (ponorom) nizko izhodno impedanco, se izhod operacijskega ojačevalnika obnaša kot krmiljen napetostni vir, ki ga krmilita vhodni napetosti. Simbol in osnovna vezava operacijskega ojačevalnika sta prikazana na sliki 8.51 (levo). Odziv pri diferencialnem vzbujanju je prikazan na sliki 8.51 (desno).



Vse stopnje operacijskega ojačevalnika so enosmerno sklopljene. Tipično diferencialno ojačenje v linearnem področju (na sliki 8.51 je to  $-10\mu\text{V} \leq u_{1\text{DIF}} \leq 10\mu\text{V}$ ) znaša  $A_{\text{UD}} = 10^5$  (100dB), rejekcijski faktor  $F_{\text{R}}$  pa je ponavadi večji od 100dB. Izhodno napetost neobremenjenega operacijskega ojačevalnika lahko izrazimo kot

$$u_2 = A_{\text{UD}} \left( F_{\text{R}}^{-1} \frac{U_{1\text{P}} + U_{1\text{N}}}{2} + (U_{1\text{P}} - U_{1\text{N}}) \right) \approx A_{\text{UD}}(U_{1\text{P}} - U_{1\text{N}}) = A_{\text{UD}}u_{1\text{DIF}} \quad (8.197)$$



Slika 8.52: Model operacijskega ojačevalnika v linearnem področju.

$$u_{1\text{DIF}} = u_{1\text{P}} - u_{1\text{N}}, u_{1\text{CM}} = (u_{1\text{P}} + u_{1\text{N}})/2.$$

Model operacijskega ojačevalnika v linearnem področju je prikazan na sliki 8.52. Vhodna impedanca pri diferencialnem krmiljenju ( $1/Y_{\text{in,dif}}$ ) je za operacijske ojačevalnike, pri katerih vhodno diferencialno stopnjo izvedemo z bipolarnimi tranzistorji, v območju od nekaj  $10\text{k}\Omega$  do nekaj  $100\text{k}\Omega$ . Če uporabimo JFET ali MOSFET tranzistorje, močno naraste (red velikosti  $1\text{M}\Omega$  in več). Enako velja tudi za vhodno impedanco pri sofaznem krmiljenju ( $1/Y_{\text{in,cm}}$ ). Ta je zelo visoka tudi, če uporabimo bipolarne tranzistorje (8.186), še posebej, če imamo tokovni vir namesto  $R_{\text{E}}$ . Izhodna impedanca  $1/Y_{\text{out}}$  se zaradi izvedbe končne stopnje giblje v območju od nekaj  $10\Omega$  do nekaj  $100\Omega$ .

Vhodna napajalna tokova, ki ju določata  $I_{\text{B}}$  in  $I_{\text{offs}}$ , sta pri JFET, še posebej pa pri MOSFET izvedbah vhodnih stopenj, pogosto zanemarljiva. Če uporabimo bipolarne tranzistorje, je  $I_{\text{B}}$  odvisen od kolektorskega toka v delovni točki in znaša tipično od nekaj  $10\mu\text{A}$  do nekaj  $100\mu\text{A}$ . Vhodni ničelni tok ( $I_{\text{offs}}$ ), ki je posledica proizvodnih odstopanj je ponavadi 10-krat manjši od  $I_{\text{B}}$ . Tipične vrednosti vhodne ničelne napetosti ( $U_{\text{offs}}$ ) so med  $100\mu\text{V}$  in  $10\text{mV}$ .

Operacijski ojačevalniki so pomembni gradniki vezij analogne elektronike, saj s svojo enostavno karakteristiko močno poenostavijo načrtovanje vezij. Praviloma jih uporabljamo s povratno vezavo, ki zmanjša njihovo veliko ojačenje in izboljša linearnost odziva.



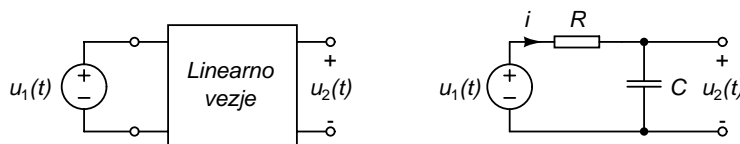
## 9

# Frekvenčna odvisnost linearnih vezij

V poglavju 8 so bile vse vhodne in prevajalne funkcije (ojačenja in admittance) realne. Pri ojačenjih smo se včasih srečali tudi z negativnim ojačenjem, ki je pomenilo, da vezje obrača fazo signala. Ko zapustimo srednjefrekvenčno območje, postanejo vplivi kapacitivnosti in induktivnosti v vezju nezanemarljivi. Vhodne in prevajalne funkcije vezja so sedaj kompleksne in v splošnem frekvenčno odvisne.

## 9.1 Odziv linearnega vezja v časovnem prostoru

Linearno vezje na sliki 9.1 (levo) se na vzbujanje  $u_1(t)$  odziva s signalom  $u_2(t)$ . Odziv je odvisen od vzbujanja in od **začetnega stanja vezja**- napetosti na kondenzatorjih in tokov skozi tuljave ob času  $t = 0$ . Če je vsaj ena od napetosti ali eden od tokov začetnega stanja različen od nič, govorimo o **neničelnem začetnem stanju vezja**. Nasprotje tega pojma je **ničelno začetno stanje** oziroma začetno stanje brez shranjene energije. Pri ničelnem začetnem stanju se vezje odzove samo, če ima neničelno vzbujanje ( $u_1(t) \neq 0$ ).



Slika 9.1: Linearno vezje z vzbujanjem  $u_1(t)$  in odzivom  $u_2(t)$  (levo). Neobremenjen RC člen (desno).

**Primer 9.1:** Vzemimo vezje na sliki 9.1 (desno), ki predstavlja neobremenjen RC člen z napetostnim vzbujanjem. Ker se v lineatni elektroniki ukvarjamo pretežno s sinusnimi vzbujanji in odzivi, bomo predpostavili vzbujanje oblike  $u_1(t) = A \cos(\omega t)$ .

Za tok  $i$  velja  $i = C du_2/dt$ . Napetost  $u_1$  je sestavljena iz padcev napetosti na upor  $R$  in na kondenzatorju  $C$

$$u_1 = Ri + u_2 = RC \frac{du_2}{dt} + u_2. \quad (9.1)$$

Od tod dobimo diferencialno enačbo

$$RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1, \quad (9.2)$$

ki določa obnašanje vezja. Rešitev enačbe je sestavljena iz rešitve homogene diferencialne enačbe

$$RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = 0, \quad (9.3)$$

ki jo označimo z  $u_{2h}$ , in iz partikularne rešitve  $u_{2p}$ , ki je odvisna od oblike vzbujanja. Rešitev homogene diferencialne enačbe je

$$u_{2h} = Ce^{-\frac{t}{RC}}. \quad (9.4)$$

Ker je vzbujanje oblike  $A \cos(\omega t)$ , je partikularna rešitev oblike

$$u_{2p} = B \cos(\omega t + \varphi). \quad (9.5)$$

Pri tem so  $B$ ,  $C$  in  $\varphi$  konstante, ki jih moramo še določiti. Da dobimo  $B$  in  $\varphi$ , vstavimo partikularno rešitev (9.5) v diferencialno enačbo (9.2).

$$-RC\omega B \sin(\omega t + \varphi) + B \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t). \quad (9.6)$$

Preoblikujemo prvi člen tako, da bo izražen s kosinusom.

$$-RC\omega B \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + B \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t). \quad (9.7)$$

Sedaj lahko člene oblike  $\cos(\omega t + \varphi)$  nadomestimo s kompleksorji  $e^{j\varphi}$  in dobimo enačbo

$$-RC\omega B e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})} + B e^{j\varphi} = A. \quad (9.8)$$

Izpostavimo  $B e^{j\varphi}$ .

$$B e^{j\varphi} \left(-RC\omega e^{-j\frac{\pi}{2}} + 1\right) = A. \quad (9.9)$$

Izrazimo  $B e^{j\varphi}$ , ki predstavlja kompleksor partikularne rešitve diferencialne enačbe.

$$U_{2p} = B e^{j\varphi} = \frac{A}{1 + j\omega RC}. \quad (9.10)$$

$B$  in  $\varphi$  lahko dobimo kot absolutno vrednost in argument izraza (9.10).

$$B = \left| \frac{A}{1 + j\omega RC} \right|, \quad (9.11)$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{A}{1 + j\omega RC}\right). \quad (9.12)$$

Če upoštevamo še, da je  $A$  pravzaprav kompleksor vzbujanja  $U_1$ , lahko zapišemo

$$U_{2p} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot U_1. \quad (9.13)$$

Celoten odziv vezja je enak

$$u_2(t) = u_{2h}(t) + u_{2p}(t) = Ce^{-\frac{t}{RC}} + B \cos(\omega t + \varphi). \quad (9.14)$$

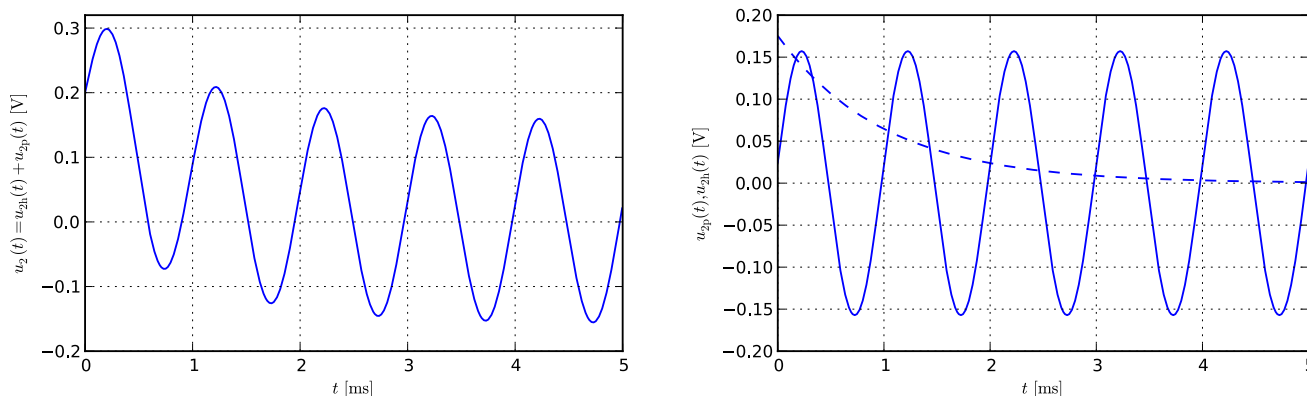
Da določimo še  $C$ , upoštevajmo začetno stanje napetosti na kondenzatorju  $u_2(0) = U_0$ . Skupaj s  $t = 0$  ga vstavimo v (9.14) in dobimo

$$U_0 = C + B \cos(\varphi), \quad (9.15)$$

od koder sledi

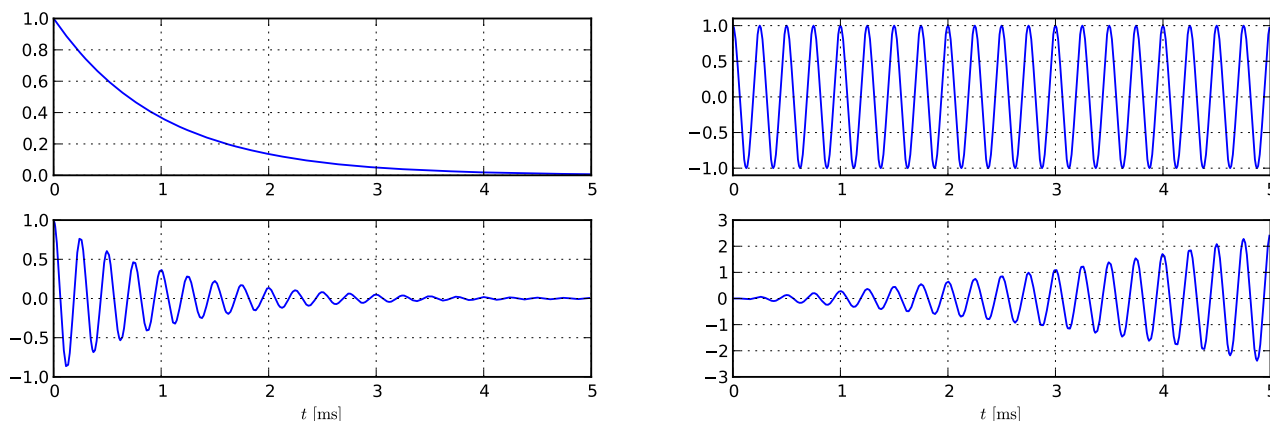
$$C = U_0 - B \cos(\varphi). \quad (9.16)$$

Rešitev homogene diferencialne enačbe imenujemo tudi **prehodni pojav**. Vidimo, da v obravnavanem vezju prehodnega pojava ni ( $C = 0$ ), ko velja  $U_0 = B \cos(\varphi)$ . To se zgodi, če je začetna napetost na kondenzatorju ( $U_0$ ) enaka začetni vrednosti partikularne rešitve  $u_{2p}(0)$ .



Slika 9.2: Levo: odziv vezja na sliki 9.1 (desno) na vzbujanje  $u_1(t) = 1V \cos(\omega t)$ .  
Desno: prehodni pojav (črtkana črta) in partikularna rešitev (polna črta). Vrednosti elementov vezja so  $R = 1k\Omega$ ,  $C = 1\mu F$ ,  $U_0 = 0,2V$ ,  $f = 1kHz$ ,  $\omega = 2\pi f$ .

Za primer, ko so  $R = 1k\Omega$ ,  $C = 1\mu F$ ,  $U_0 = 0,2V$  in  $f = 1kHz$ , je odziv vezja prikazan na sliki 9.2. △



Slika 9.3: Primeri prehodnih pojavov v stabilnih vezjih (levo), mejno stabilnem vezju (desno zgoraj) in nestabilnem vezju (desno spodaj).

**Za stabilna vezja prehodni pojav izzveni** ( $u_{2h}(\infty) = 0$ ) **ne glede na vzbujanje na vhodu** (slika 9.3, levo). Po dovolj dolgem času se stabilno vezje odziva samo še s partikularno rešitvijo pripadajoče diferencialne enačbe. Vezje na sliki 9.1 (desno) je stabilno, saj prehodni pojav (9.4) za pozitivne vrednosti  $R$  prej ali slej zamre. **Mejno stabilna vezja** imajo prehodni pojav, ki v nekaterih primerih zamre, v drugih pa ne (primer odziva, ki ne zamre, je na sliki 9.3, desno zgoraj). Prehodni pojav **nestabilnih linearnih vezij** s časom raste in preseže vsako mejo (slika 9.3, desno spodaj). Seveda v praksi nikoli ne dobimo neskončno velikih signalov, saj pri dovolj velikih signalih vezje preneha biti linearno, kar ustavi naraščanje amplitude.

V poglavju 7.5 smo pri obravnavi vezja brez besed izpustili prehodni pojav in celoten odziv nelinearnega vezja sestavili zgolj iz delovne točke in odziva na majhno sinusno vzbujanje (partikularne rešitve). Dejansko je odziv sestavljen iz delovne točke, prehodnega pojava in odziva na majhno sinusno vzbujanje.

Prehodni pojav lahko določimo samo, če poznamo začetno stanje vezja. Pri stabilnih vezjih prehodni pojav ne igra velike vloge, saj prej ali slej zamre. Zanima nas kvečjemu kako hitro zamre, saj takrat takrat v odzivu vezja ostaneta samo delovna točka in odziv na majhno sinusno vzbujanje.

Prehodni pojav igra glavno vlogo v linearnih vezjih, ki se odzivajo, tudi ko niso vzbujana. Izhodni signal večine takih vezij, ki jih imenujemo tudi **oscilatorji**, je periodičen, vezja pa mejno stabilna. Pri oscilatorjih nimamo vzbujanja in je zato partikularna rešitev enaka 0. Odziv vezja je sestavljen samo iz delovne točke in prehodnega pojava.

## 9.2 Prevajalna funkcija vezja

Za splošno linearno vezje (slika 9.1, levo) lahko pokažemo [18], da vzbujanje  $u_1(t)$  in odziv  $u_2(t)$  povezuje navadna diferencialna enačba oblike

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} u_2 + \dots + a_1 \frac{d}{dt} u_2 + a_0 u_2 = b_m \frac{d^m}{dt^m} u_1 + \dots + b_1 \frac{d}{dt} u_1 + b_0 u_1, \quad (9.17)$$

kjer so  $a_i$  in  $b_i$  realni koeficienti. Poleg koeficientov poznamo še vrednosti odziva  $u_2(t)$  in njegovih prvih  $n - 1$  odvodov ob času  $t = 0$ . Te vrednosti so odvisne od začetnega stanja vezja ter začetnih vrednosti vzbujanja  $u_1(t)$  in njegovih odvodov. Če upoštevamo, da je Laplaceov transform [19] odvoda enak

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right] = s^n X(s) - s^{n-1} x(t)|_{t=0} - s^{n-2} \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0} - \dots - \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0}, \quad (9.18)$$

lahko s pomočjo Laplaceove transformacije enačbo (9.17) prevedemo v **prostor kompleksne frekvence**.

$$(a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0) U_2(s) = (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) U_1(s) + c_{l-1} s^{l-1} + \dots + c_1 s + c_0. \quad (9.19)$$

Pri tem je  $s$  kompleksna spremenljivka, ki ji pravimo tudi kompleksna frekvenca. Koeficienti  $c_i$  so odvisni od začetnih vrednosti vzbujanja  $u_1(t)$  in odziva  $u_2(t)$  ter začetnih vrednosti njihovih odvodov. Začetno vrednost odziva  $u_2(0)$  in začetne vrednosti njegovih odvodov lahko izrazimo z začetnim stanjem vezja ter začetnimi vrednostmi vzbujanja in njegovih odvodov.  $l$  je celo število, ki je enako večjemu od števil  $n$  in  $m$ . Rešitev diferencialne enačbe (9.17) v prostoru kompleksne frekvence lahko zapišemo kot

$$U_2(s) = \underbrace{\frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}}_{\text{prevajalna funkcija vezja } H(s)} U_1(s) + \underbrace{\frac{c_{l-1} s^{l-1} + \dots + c_1 s + c_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}}_{\text{odziv na začetno stanje } U_{20}(s)}. \quad (9.20)$$

Drugi člen odziva (9.20) predstavlja **odziv na začetno stanje vezja in vzbujanja**. Vidimo, da ni odvisen od časovnega poteka vzbujanja, ampak le od začetnega stanja vezja ter začetnih vrednosti vzbujanja in njegovih odvodov, ki so zajeti v koeficientih  $c_i$ . Sorazmernostni faktor med Laplaceovim transformom vzbujanja in prvim členom odziva (9.20) je enak

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (9.21)$$

Imenujemo ga **prevajalna funkcija vezja**. Prevajalna funkcija je kompleksna funkcija kompleksne spremenljivke  $s$ . Poglejmo si sedaj prvi člen na desni strani (9.20). Recimo, da imamo vzbujanje oblike  $u_1(t) = A \cos(\omega t)$  kjer je  $A$  realna konstanta. Laplaceov transform takega vzbujanja je

$$U_1(s) = \frac{As}{s^2 + \omega^2}. \quad (9.22)$$

Po množenju (9.22) s prevajalno funkcijo  $H(s)$  dobimo

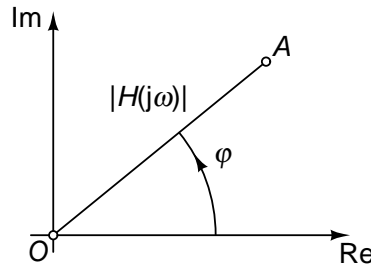
$$H(s)U_1(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \cdot \frac{As}{s^2 + \omega^2}. \quad (9.23)$$

Produkt ulomkov v (9.23) lahko razstavimo v vsoto dveh ulomkov.

$$H(s) \cdot \frac{As}{s^2 + \omega^2} = \frac{b'_m s^m + \dots + b'_1 s + b'_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} + \frac{fs - g\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad (9.24)$$

kjer so  $b'_i$ ,  $f$  in  $g$  realni koeficienti. Če sedaj (9.24) pomnožimo z  $s^2 + \omega^2$ , izraz okrajšamo in vstavimo  $s = j\omega$ , postane prvi člen na desni strani enak 0. Ostane nam

$$H(j\omega) \cdot Aj\omega = fj\omega - g\omega. \quad (9.25)$$



Slika 9.4: Kompleksna vrednost prevajalne funkcije  $H(s)$  pri  $s = j\omega$ . Točka  $A$  na kompleksni ravnini predstavlja vrednost prevajalne funkcije  $H(j\omega)$ . Absolutna vrednost  $|H(j\omega)|$  ustreza dolžini daljice  $OA$ , argument  $\varphi$  pa kotu med realno osjo in daljico  $OA$ .

Zapišimo prevajalno funkcijo v polarni obliki ( $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi}$ ) in delimo z  $j\omega$ .

$$A|H(j\omega)|e^{j\varphi} = f + jg. \quad (9.26)$$

Ker je  $A$  realno število, lahko hitro izrazimo  $f$  in  $g$  tako, da obravnavamo realne in imaginarne dele posebej. Dobimo

$$f = A|H(j\omega)| \cos(\varphi), \quad (9.27)$$

$$g = A|H(j\omega)| \sin(\varphi). \quad (9.28)$$

Dobljeno vstavimo v (9.24).

$$H(s)U_1(s) = \frac{b'_m s^m + \dots + b'_1 s + b'_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} + A|H(j\omega)| \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}. \quad (9.29)$$

Časovni potek, ki ustreza drugemu členu v (9.29) dobimo z inverzno Laplaceovo transformacijo ( $\mathcal{L}^{-1}$ ).

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2} \right] = \cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi) = \cos(\omega t + \varphi). \quad (9.30)$$

Časovni potek, ki ustreza prvemu členu (9.20), je sestavljen iz **prehodnega pojava zaradi vzbujanja vezja** ( $u_{21}(t)$ ) in **partikularne rešitve** ( $u_{2p}(t)$ ).

$$\mathcal{L}^{-1}(H(s)U_1(s)) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b'_m s^m + \dots + b'_1 s + b'_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}\right]}_{\text{prehodni pojav zaradi vzbujanja } u_{21}(t)} + \underbrace{A|H(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{partikularna rešitev } u_{2p}(t)}. \quad (9.31)$$

Celoten odziv vezja je tako enak

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}(H(s)U_1(s) + U_{20}(s)) \\ &= \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_{l-1}s^{l-1} + \dots + c_1 s + c_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} + \frac{b'_m s^m + \dots + b'_1 s + b'_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}\right]}_{\text{prehodni pojav } u_{2h}(t)=u_{20}(t)+u_{21}(t)} + \underbrace{A|H(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{partikularna rešitev } u_{2p}(t)}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Pri tem je prehodni pojav sestavljen iz odziva na začetno stanje vezja in vzbujanja ter prehodnega pojava zaradi vzbujanja. V linearni elektroniki nas ponavadi zanima partikularna rešitev (odziv na vzbujanje). Ta je pri vzbujanju oblike  $A \cos(\omega t)$  določena z vrednostjo prevajalne funkcije pri  $s = j\omega$  in amplitudo vzbujanja. Če je vrednost prevajalne funkcije  $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi}$ , potem je odziv na vzbujanje enak

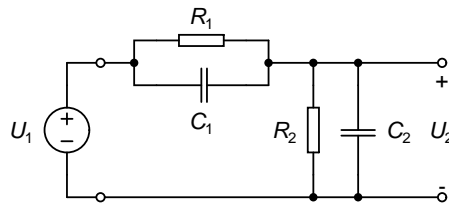
$$u_{2p}(t) = A|H(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi). \quad (9.33)$$

Vidimo, da je amplituda odziva enaka amplitudi vzbujanja pomnoženi z absolutno vrednostjo prevajalne funkcije. Odziv prehiteva vzbujanje za fazo  $\varphi$ , ki je enaka argumentu prevajalne funkcije. Absolutno vrednost in argument prevajalne funkcije ilustrira slika 9.4. Na prevajalno funkcijo lahko pogledamo tudi z vidika kompleksorjev, ki pripadata vzbujanju  $U_1$  in partikularni rešitvi oziroma odzivu na vzbujanje  $U_{2p}$ . Velja

$$U_{2p} = H(j\omega)U_1. \quad (9.34)$$

**Iz izraza (9.34) je očitno, da je zveza med obema kompleksorjem odvisna od krožne frekvence  $\omega = 2\pi f$ .** Da lahko določimo odziv na sinusno vzbujanje  $U_1$ , je potrebno določiti vrednost prevajalne funkcije  $H(j\omega)$ . Njeno vrednost smo izpeljali iz diferencialne enačbe, ki povezuje vzbujanje in odziv vezja.

Do prevajalne funkcije pa vodi tudi krajša pot. Če obravnavamo reaktivne elemente (tuljave, kondenzatorje, pa tudi kapacitivnosti polprevodniških elementov) kot impedance  $j\omega L$  oziroma  $1/(j\omega C)$ , lahko prevajalno funkcijo  $H(j\omega)$  izrazimo s pomočjo analize vezja v frekvenčnem prostoru.



Slika 9.5: RC delilnik napetosti.

**Primer 9.2:** Določimo prevajalno funkcijo vezja na sliki 9.5. Če vzamemo, da je admitanca kondenzatorja enaka  $j\omega C$ , potem je admitanca vzporedne vezave  $R_1$  in  $C_1$  enaka

$$Y_1 = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 = \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{R_1}. \quad (9.35)$$



Admitanca vzporedne vezave  $R_2$  in  $C_2$  je

$$Y_2 = \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{R_2}. \quad (9.36)$$

Če kot vzbujanje vzamemo  $U_1$ , kot odziv pa  $U_2$ , se vezje obnaša kot delilnik napetosti. Razmerje  $U_2/U_1$  je enako prevajalni funkciji  $H(j\omega)$  in znaša

$$H(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Y_2^{-1}}{Y_1^{-1} + Y_2^{-1}} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2)}. \quad (9.37)$$

△

**Primer 9.3:** Podobno lahko dobimo tudi prevajalno funkcijo za vezje na slike 9.1 (desno). Lahko pa jo dobimo iz izraza (9.13) kot kvocient  $U_{2p}/U_1$ . Prevajalna funkcija tega vezja je

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}. \quad (9.38)$$

△

Vsa napetostna in tokovna ojačenja ter vhodne in izhodne admitance, ki smo jih določili v poglavju 8, so pravzaprav prevajalne funkcije. Ker pa smo jih določali za vezja, ki ne vsebujejo reaktivnih elementov, so bile te prevajalne funkcije realne in neodvisne od frekvence. Njihove vrednosti opisujejo prevajanje signalov skozi vezje v srednjefrekvenčnem območju, kjer je obnašanje vezja neodvisno od frekvence.

### 9.3 Ničle in poli prevajalne funkcije ter njihov vpliv na prehodni pojav

Vrednostim  $s$ , pri katerih je prevajalna funkcija  $H(s)$  enaka 0, pravimo **ničle prevajalne funkcije**. Po drugi strani se vrednosti  $s$ , pri katerih je vrednost prevajalne funkcije neskončna, imenujejo **poli prevajalne funkcije**. Vezja, ki od frekvenčno odvisnih elementov vsebujejo samo kondenzatorje in tuljave, imajo končno število polov in ničel. Njihove prevajalne funkcije lahko zapišemo v obliki

$$H(s) = H_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}. \quad (9.39)$$

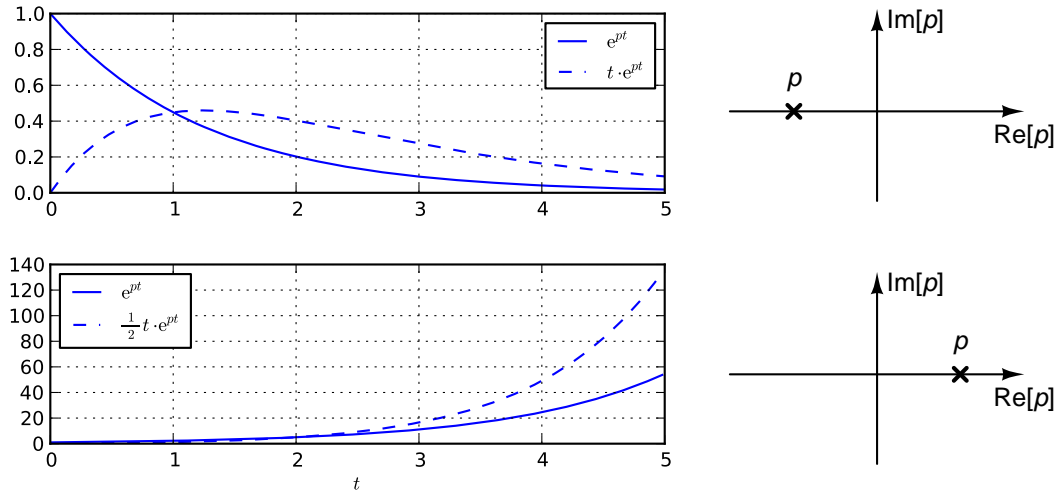
Pri tem smo ničle prevajalne funkcije označili z  $z_i$ , pole pa z  $p_i$ . Da je odziv vezja realen, mora biti vrednost prevajalne funkcije  $H(s)$  pri realnih rednostih  $s$  realna. To pomeni, da morajo biti poli in ničle realna števila, ali pa nastopati v konjugirano kompleksnih parih. Realna mora biti tudi konstanta  $H_0$ . Če je kompleksno število  $s = a + bj$  pol (ničla) prevajalne funkcije, je pol (ničla) tudi  $s^* = a - bj$ .

Če je  $p$  pol izraza  $(s - p)^{k-1} H(s)$ , ni pa pol izraza  $(s - p)^k H(s)$ , mu pravimo tudi  **$k$ -kratni pol prevajalne funkcije**. Podobno, če je  $z$  ničla izraza  $H(s)/(s - z)^{k-1}$ , ni pa ničla izraza  $H(s)/(s - z)^k$ , je  $z$   **$k$ -kratna ničla prevajalne funkcije**.  $k$  imenujemo tudi **kratnost ničle oziroma pola**. Neko kompleksno število  $s$  ne more biti hkrati pol in ničla, saj bi se v tem primeru pripadajoči členi v števcu in imenovalcu krajšali.

Poli prevajalne funkcije določajo obliko prehodnega pojava v izhodnem signalu  $u_2(t)$ . Prehodni pojav lahko zapišemo z inverzno Laplaceovo transformacijo (enačba (9.32)).

$$u_{2h}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{c_{l-1}s^{l-1} + \cdots + c_1s + c_0}{a_n s^n + \cdots + a_1s + a_0} + \frac{b'_m s^m + \cdots + b'_1s + b'_0}{a_n s^n + \cdots + a_1s + a_0} \right]. \quad (9.40)$$

Vidimo, da imamo opravka z ulomkom, ki ima v imenovalcu izraz  $a_n s^n + \cdots + a_1s + a_0$ . Ničle tega izraza so poli prevajalne funkcije. Izraz v oglatih oklepajih (9.40) lahko zapišemo kot vsoto delnih (parcialnih) ulomkov, ki



Slika 9.6: Primer prehodnega pojava, ki ustreza polu  $p = -0,8$  (levo zgoraj) in polu  $p = 0,8$  (levo spodaj). Lega polov v kompleksni ravnini (desno). Polna črta prikazuje primer poteka prehodnega pojava za enojni pol ( $k = 1$ ), črtkana pa za dvojnega ( $k = 2$ ).

jih lahko nato vsakega posebej prevedemo v časovni prostor s pomočjo inverzne Laplaceove transformacije [19]. Če je  $p$  enojen realen pol prevajalne funkcije ( $k = 1$ ), je delni ulomek oblike

$$\frac{\alpha}{s - p}. \quad (9.41)$$

Takemu ulomku ustreza prehodni pojav s časovnim potekom oblike

$$C e^{pt}, \quad (9.42)$$

kjer je koeficient  $C$  odvisen od začetnih pogojev. Če je  $p < 0$  je prehodni pojav eksponentna funkcija, ki upada proti 0 (slika 9.6, levo zgoraj, polna črta). Če je  $p > 0$ , eksponentna funkcija narašča proti neskončnosti (slika 9.6, levo spodaj, polna črta). Pole predočimo na kompleksni ravnini s križci (slika 9.6, desno), ničle pa s krožci. Za večkratne realne pole ( $k > 1$ ) je pripadajoča vsota delnih ulomkov

$$\frac{\alpha_1}{s - p} + \frac{\alpha_2}{(s - p)^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{(s - p)^k}, \quad (9.43)$$

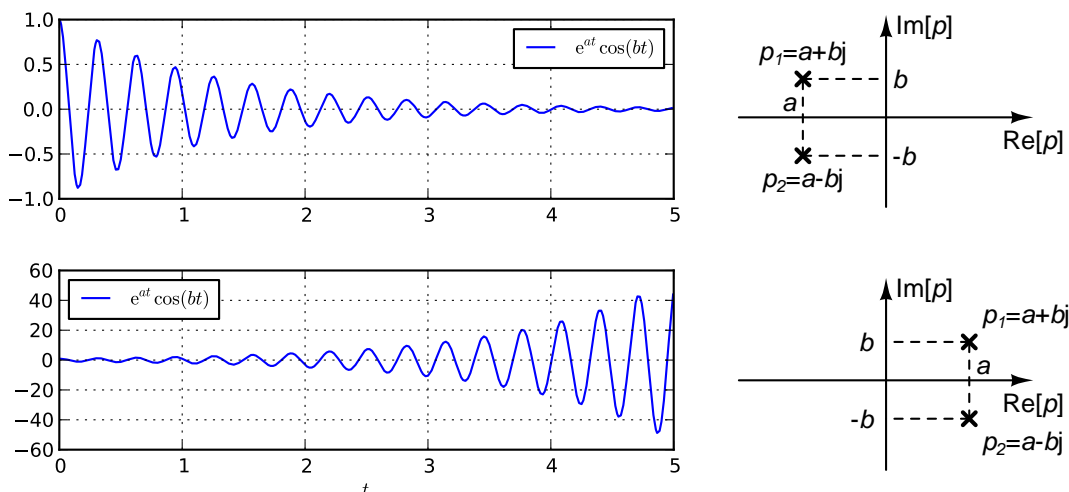
kjer so  $\alpha_i$  realni koeficienti. Prehodni pojav je v tem primeru produkt polinoma  $P_{k-1}(t)$  stopnje  $k - 1$  in eksponentne funkcije  $e^{pt}$ .

$$P_{k-1}(t) e^{pt}. \quad (9.44)$$

Koeficienti polinoma  $P_{k-1}(t)$  so odvisni od začetnih pogojev. Za velike vrednosti  $t$  prevlada eksponentni člen in potek je podoben, kot za enojen pol. Spet velja, da za  $p < 0$  prehodni pojav upada proti 0, za  $p > 0$  pa narašča proti neskončnosti (slika 9.6, levo, črtkana črta). Bolj, ko je pol  $p$  oddaljen od imaginarne osi, hitreje je upadanje proti 0 (za  $p < 0$ ) oziroma naraščanje proti neskončnosti (za  $p > 0$ ).

Če imamo opravka s konjugirano kompleksnim parom enojnih polov  $p = a \pm bj$ , je pripadajoč delni ulomek oblike

$$\frac{\alpha s + \beta}{s^2 - 2as + \omega_0^2}, \quad (9.45)$$



Slika 9.7: Primer prehodnega pojava, ki ustreza konjugirano kompleksnemu paru polov  $p = -0,8 \pm 20j$  (levo zgoraj) in  $p = 0,8 \pm 20j$  (levo spodaj). Lega polov v kompleksni ravnini (desno).

kjer je  $\omega_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$  **naravna krožna frekvenca**, ki pripada paru konjugirano kompleksnih polov. Prehodni pojav je v tem primeru oblike

$$Ce^{at} \cos(bt + \varphi), \quad (9.46)$$

kjer sta  $C$  in  $\varphi$  odvisna od začetnih pogojev. Frekvenco nihanja določa  $b$  in je enaka  $b/(2\pi)$ . Če se pola odmikata od realne osi (večji  $b$ ), frekvenca nihanja prehodnega pojava raste. Če je realni del polov negativen ( $a < 0$ ), amplituda nihanja prehodnega pojava upada (slika 9.7, zgoraj). V nasprotnem primeru  $a > 0$  amplituda nihanja raste (slika 9.7, spodaj). Absolutna vrednost  $|a|$  določa hitrost naraščanja oziroma upadanja amplitude. Večja razdalja polov od imaginarne osi (večji  $|a|$ ) pomeni hitrejšo naraščanje oziroma upadanje amplitude nihanja.

Če je konjugirano kompleksen par polov večkratno ( $k > 1$ ), so pripadajoči delni ulomki oblike

$$\frac{\alpha_1 s + \beta_1}{s^2 - 2as + \omega_0^2} + \frac{\alpha_2 s + \beta_2}{(s^2 - 2as + \omega_0^2)^2} + \dots + \frac{\alpha_k s + \beta_k}{(s^2 - 2as + \omega_0^2)^k}, \quad (9.47)$$

Prehodni pojav je v tem primeru sestavljen iz členov oblike

$$P_{k-1}(t)e^{at} \cos(bt + \varphi), \quad (9.48)$$

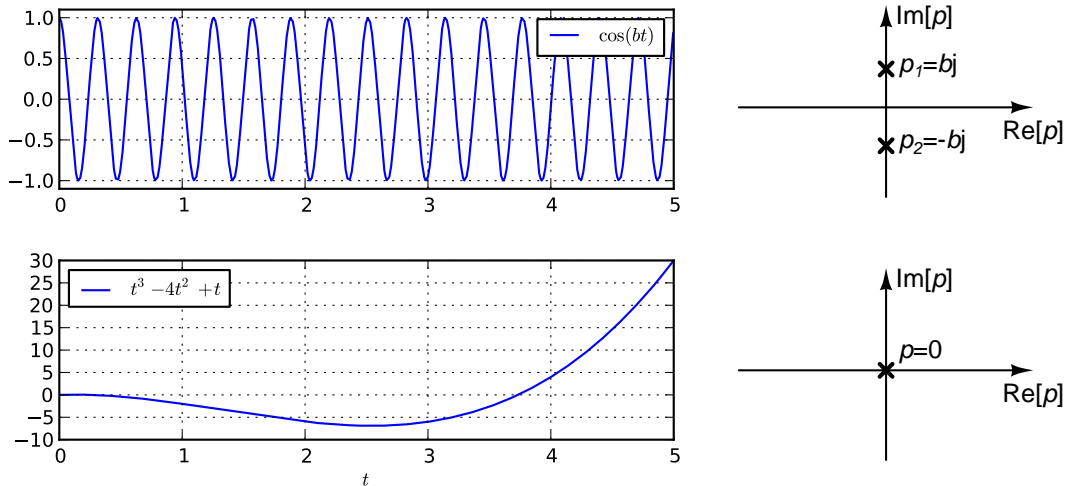
kjer je  $P_{k-1}(t)$  polinom stopnje  $k - 1$ , katerega koeficienti so določeni z začetnimi pogoji. Tudi v tem primeru za velike vrednosti časa  $t$  prevlada eksponentni potek nad polinomom.

Poseben primer predstavljajo poli na imaginarni osi. V primeru, da imamo opravka s konjugirano kompleksnim parom enojnih polov na imaginarni osi ( $p = \pm bj$ ), je pripadajoči delni ulomek oblike

$$\frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (9.49)$$

Naravna krožna frekvenca  $\omega_0$  je v tem primeru enaka imaginarnemu delu polov ( $\omega_0 = b$ ). Prehodni pojav je neduženo sinusno nihanje ( $a = 0$ ) oblike

$$\cos(bt + \varphi), \quad (9.50)$$



Slika 9.8: Primer prehodnega pojava, ki ustreza konjugirano kompleksnemu paru imaginarnih polov  $p = \pm 20j$  (levo zgoraj) in štirikratnemu ( $k = 4$ ) polu v izhodišču  $p = 0$  (levo spodaj). Lega polov v kompleksni ravnini (desno).

ki je prikazano na sliki 9.8 (levo zgoraj). To obliko prehodnega pojava izkoriščajo oscilatorji za generiranje sinusnega nihanja. Če je par polov večkratno ( $k > 1$ ), so delni ulomki enake oblike, kot je podana v enačbi (9.47), le da je sedaj  $\omega_0 = b$  in  $a = 0$ . Prehodni pojav je v tem primeru sestavljen iz členov oblike

$$P_{k-1}(t) \cos(bt + \varphi). \quad (9.51)$$

Ostane nam še primer, ko imamo  $k$ -kraten pol v koordinatnem izhodišču ( $p = 0$ ). Pripadajoči delni ulomki so oblike

$$\frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{s^k}, \quad (9.52)$$

prehodni pojav pa je podan s polinomom  $P_{k-1}(t)$  stopnje  $k - 1$  (primer za  $k = 4$  je na sliki 9.8, levo spodaj).

Vidimo, da prehodni pojav izzveni, če ležijo poli, ki ga povzročajo, levo od imaginarne osi ( $\Re(p) < 0$ ). To potrjujejo tudi enačbe (9.42), (9.44), (9.46) in (9.48) ter slik 9.6 (levo zgoraj) in 9.7 (levo zgoraj). Pravimo, da **je vezje stabilno, če so vsi poli prevajalne funkcije na levi strani imaginarne osi**. Če kateri od polov ležijo na imaginarni osi ( $\Re(p) = 0$ ), je vezje **mejno stabilno**. Če leži vsaj en pol na desni strani imaginarne osi ( $\Re(p) > 0$ ), prehodni pojav po velikosti raste preko vseh meja, vezje pa je **nestabilno**, kot to ilustrirata sliki 9.6 (levo spodaj) in 9.7 (levo spodaj).

**Primer 9.4:** Poglejmo si pole in ničle prevajalne funkcije  $H(s) = U_2/U_1$  vezja na sliki 9.5. Določili smo jo že v primeru 9.2 in je podana z (9.37). Na tem mestu jo ponovimo še enkrat v prostoru kompleksne frekvence  $s$ .

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + sR_1C_1}{1 + s \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}(C_1 + C_2)}. \quad (9.53)$$

Da določimo ničle, moramo rešiti enačbo

$$1 + sR_1C_1 = 0, \quad (9.54)$$

kar nam da edino ničlo prevajalne funkcije

$$z = -\frac{1}{R_1 C_1}. \quad (9.55)$$

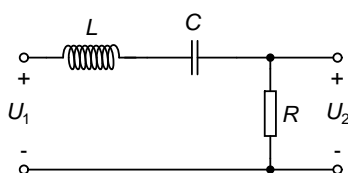
Podobno z reševanjem enačbe

$$1 + s \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2) = 0 \quad (9.56)$$

pridemo do edinega pola

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}. \quad (9.57)$$

Ker vsi poli ležijo na levi strani imaginarne osi ( $\text{Im}(p) < 0$ ), je vezje stabilno.  $\triangle$



Slika 9.9: Nihajni krog.

**Primer 9.5:** Za nihajni krog na sliki 9.9 določimo prevajalno funkcijo, pole in ničle. Vezje lahko analiziramo kot delilnik napetosti med impedancama  $Z_1 = j\omega L + 1/(j\omega C)$  in  $Z_2 = R$ .

$$H(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}. \quad (9.58)$$

Za določanje polov in ničel potrebujemo prevajalno funkcijo v prostoru kompleksne frekvence. Dobimo jo, če v izrazu (9.58) zamenjamo  $j\omega$  s kompleksno frekvenco  $s$ . Dobimo

$$H(s) = \frac{sRC}{1 + sRC + s^2 LC}. \quad (9.59)$$

Prevajalna funkcija ima ničlo v koordinatnem izhodišču  $z = 0$  in dva pola. Da dobimo oba pola, moramo poiskati tiste vrednosti  $s$ , pri katerih je imenovalec prevajalne funkcije enak 0.

$$1 + sRC + s^2 LC = 0. \quad (9.60)$$

Opravka imamo s kvadratno enačbo oblike  $as^2 + bs + c = 0$ , kjer je

$$a = LC, \quad (9.61)$$

$$b = RC, \quad (9.62)$$

$$c = 1. \quad (9.63)$$

O vrsti polov (realna ali kompleksna) odloča diskriminanta enačbe

$$D = b^2 - 4ac = (RC)^2 - 4LC. \quad (9.64)$$

Če je diskriminanta pozitivna, imamo par realnih polov.

$$s = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (9.65)$$

Ker je izraz pod korenem zmeraj manjši od  $(R/(2L))^2$ , noben od realnih polov ne more zaiti na desno stran imaginarne osi in vezje je zmeraj stabilno. Če je diskriminanta negativna, sta pola konjugirano kompleksna.

$$s = -\frac{b}{2a} \pm j\frac{\sqrt{-D}}{2a} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = a \pm jb. \quad (9.66)$$

Odtod dobimo

$$a = -\frac{R}{2L}, \quad (9.67)$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad (9.68)$$

$$\omega_0 = |p| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (9.69)$$

Tudi za par konjugirano kompleksnih polov velja, da ne moreta zaiti na desno stran imaginarne osi, saj velja  $a < 0$  za vse  $R > 0$ . Vezje je tudi v tem primeru stabilno.  $\triangle$

**Absolutno vrednost pola (ničle)** bomo v nadaljevanju imenovali **pripadajoča krožna frekvenca** pola (ničle). Včasih naletimo tudi na pojem **naravne krožne frekvence** pola (ničle), ki pravzaprav pomeni isto. Pripadajoča krožna frekvenca je razdalja od koordinatnega izhodišča do pola (ničle) v kompleksni ravnini. **Pripadajoča frekvenca**  $f$ , je s pripadajočo krožno frekvenco  $\omega$  povezana z enačbo

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (9.70)$$

## 9.4 Določanje polov prevajalnih funkcij iz enačb vezja

Recimo, da smo vezje, ki ima  $n + 1$  vozlišč in  $m$  napetostnih virov, opisali s sistemom modificiranih vozliščnih enačb, ki se v matrični obliki glasijo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1(n+1)} & \cdots & a_{1(n+m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n(n+1)} & \cdots & a_{n(n+m)} \\ a_{(n+1)1} & \cdots & a_{(n+1)n} & a_{(n+1)(n+1)} & \cdots & a_{(n+1)(n+m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+m)1} & \cdots & a_{(n+m)n} & a_{(n+m)(n+1)} & \cdots & a_{(n+m)(n+m)} \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ I_1 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_{n-1} \\ E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix}. \quad (9.71)$$

Kot neznanke nastopajo vozliščne napetosti  $V_k$  in tokovi napetostnih virov  $I_k$ . Prvih je  $n$ , saj je eno od vozlišč referenčno vozlišče, proti kateremu merimo vozliščne potenciale, drugih pa je toliko, kot napetostnih virov ( $m$ ). Prvih  $n$  enačb opisuje ravnovesje tokov za  $n$  vozlišč (1. Kichoffov zakon), preostalih  $m$  enačb pa predstavlja

enačbe  $m$  napetostnih virov. Vrednosti  $J_k$  na desni strani podajajo vsote vseh tokov, ki jih neodvisni tokovni viri dajejo v  $k$ -to vozlišče, vrednosti  $E_k$  pa napetosti posameznih neodvisnih napetostnih virov, ki jih opisuje zadnjih  $m$  enačb. Če katera njih predstavlja krmiljen napetostni vir, je pripadajoča vrednost  $E_k$  enaka 0. Matrika  $[M]$  vsebuje koeficiente sistema enačb. Če je vezje sestavljeno iz linearnih gradnikov, ki smo jih opisali v poglavju 1.2, so ti koeficienti v prostoru kompleksne frekvence  $s$  izrazljivi kot vsote realnih členov oblike  $G$  in kompleksnih členov oblike  $sC$  ali  $1/(sL)$ .

Imejmo vezje, v katerem smo izklopili vse neodvisne vire (za napetostne vire postavili  $E_k = 0$ , za tokovne vire pa njihove prispevke v koeficientih  $J_k$  postavili na 0), razen enega. Recimo, da je to tokovni vir, ki iz referenčnega vozlišča vleče tok  $I_0$  in ga daje v  $i$ -to vozlišče vezja. Tak tokovni vir se pojavi kot koeficient  $J_i = I_0$  na desni strani sistema enačb (9.71), pri čemer so vsi ostali koeficienti  $J_k$  in  $E_k$  enaki 0. Opazujemo prevajalno funkcijo

$$H(s) = \frac{V_j}{I_0}, \quad (9.72)$$

kjer je  $V_j$  potencial  $j$ -tega vozlišča. Slednjega lahko dobimo kot rešitev sistema enačb

$$[M] \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ I_1 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} = I_0 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{b_i}, \quad (9.73)$$

kjer je  $i$ -ti element vektorja na desni strani enačb ( $b_i$ ) enak 1, ostali pa so enaki 0. Z uporabo Cramerjevega pravila [7] lahko  $V_j$  izrazimo kot

$$V_j = \frac{I_0 \det([M'_{ij}])}{\det([M])}, \quad (9.74)$$

kjer  $\det([M])$  predstavlja determinanto matrike  $[M]$ ,  $[M'_{ij}]$  pa matriko, ki jo dobimo, če v  $[M]$  zamenjamo  $j$ -ti stolpec z vektorjem  $b_i$ . Ker sedaj  $j$ -ti stolpec vsebuje le en od 0 različen element, lahko determinanto matrike  $[M'_{ij}]$  razvijemo po  $j$ -tem stolpcu in dobimo

$$V_j = \frac{I_0 (-1)^{i+j} \det([M_{ij}])}{\det([M])}, \quad (9.75)$$

kjer je  $[M_{ij}]$  podmatrika, ki jo dobimo, če v  $[M]$  zbrisemo  $i$ -to vrstico in  $j$ -ti stolpec. Zmnožku  $(-1)^{i+j} \det([M_{ij}])$  pravimo tudi kofaktor elementa  $a_{ij}$  matrike  $[M]$ . Sledi, da je prevajalna funkcija (9.72) enaka

$$H(s) = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det([M_{ij}])}{\det([M])}. \quad (9.76)$$

Poli prevajalne funkcije nastopijo, ko je izraz  $1/H(s)$  enak 0. Odtod sledi enačba

$$\frac{\det([M])}{\det([M_{ij}])} = 0. \quad (9.77)$$

Obe determinanti v enačbi (9.77) sta funkciji kompleksne frekvence  $s$ . Iz enačbe (9.77) vidimo, da so poli prevajalne funkcije bodisi ničle determinante matrike  $[M]$  ali pa poli poddeterminante  $[M_{ij}]$ . Determinanto poljubne matrike  $[C]$  reda  $n$  lahko izrazimo kot vsoto členov oblike

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} c_{1 i_1} c_{2 i_2} \dots c_{n i_n}, \quad (9.78)$$

kjer je  $c_{ij}$  element  $i$ -te vrstice in  $j$ -tega stolpca matrike,  $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$  pa je enak bodisi 1 ali  $-1$ . Ker so elementi matrike  $[M]$  vsote realnih členov oblike  $G$  in kompleksnih členov oblike  $sC$  oziroma  $1/(sL)$ , ima lahko determinanta podmatrike  $[M_{ij}]$  pol le v koordinatnem izhodišču ( $s = 0$ ). Poli prevajalne funkcije (9.72), ki ne ležijo v koordinatnem izhodišču so torej zagotovo tudi rešitve enačbe

$$\det([M]) = 0. \quad (9.79)$$

Obratna trditev ne drži, saj niso vse od 0 različne rešitve enačbe (9.79) tudi poli prevajalne funkcije (9.72). Če kot odziv vezja namesto  $V_j$  izberemo tok  $j$ -tega napetostnega vira ( $I_j$ ), pridemo spet do enačbe (9.79). Če kot odziv nastopa napetost med  $j$ -tim in  $k$ -tim vozliščem ( $V_j - V_k$ ), lahko prevajalno funkcijo izrazimo kot

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{V_j - V_k}{I_0} = \frac{V_j}{I_0} - \frac{V_k}{I_0} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det([M_{ij}])}{\det([M])} - (-1)^{i+k} \cdot \frac{\det([M_{ik}])}{\det([M])} \\ &= \frac{(-1)^{i+j} \det([M_{ij}]) - (-1)^{i+k} \det([M_{ik}])}{\det([M])}, \end{aligned} \quad (9.80)$$

ki nas spet pripelje do enačbe (9.79). Podobno lahko sklepamo tudi pri ostalih možnih vzbujanjih. Če naprimer vezje vzbujamo z  $i$ -tim napetostnim virom, izpeljave ostanejo enake, le da moramo namesto indeksa  $i$  uporabiti indeks  $n + i$  (indeks enačbe  $i$ -tega napetostnega vira). Če vezje vzbujamo s tokovnim virom  $I_0$ , ki vleče tok iz  $k$ -tega vozlišča in ga daje v  $i$ -to vozlišče, lahko z uporabo superpozicije prevajalno funkcijo zapišemo kot

$$H(s) = H_i(s) - H_k(s). \quad (9.81)$$

Pri tem je  $H_i(s)$  prevajalna funkcija od tokovnega vira, ki vleče tok iz referenčnega vozlišča in ga daje v  $i$ -to vozlišče, do izhodne veličine, ki smo si jo izbrali. Nadaljnji razvoj izraza (9.81) s pomočjo Cramerjevega pravila nas spet pripelje do enačbe (9.79).

**Če vezje opišemo v prostoru kompleksne frekvence  $s$  s sistemom modificiranih vozliščnih enačb, ki vključujejo tudi vzbujanje vezja v obliki neodvisnih virov, so poli poljubne prevajalne funkcije vezja, ki ne ležijo k koordinatnem izhodišču ( $s \neq 0$ ), hkrati tudi rešitve enačbe**

$$\det([M]) = 0, \quad (9.82)$$

**kjer je  $\det([M])$  determinanta matrike koeficientov enačb vezja. Obratna trditev ne drži, saj ni vsaka od 0 različna rešitev enačbe (9.82) tudi pol prevajalnih funkcij vezja.** Ugotovitev bomo potrebovali pri določanju polov oscilatorjev v poglavju 11.

## 9.5 Bodejev diagram

Da določimo odziv vezja na sinusno vzbujanje s krožno frekvenco  $\omega$ , potrebujemo vrednost prevajalne funkcije  $H(s)$  pri  $s = j\omega$ , pri čemer je  $H(s)$  kompleksna funkcija,  $\omega$  pa realno število.  $H(j\omega)$  lahko predočimo z dvema realnima funkcijama

$$A(\omega) = |H(j\omega)|, \quad (9.83)$$

$$\Phi(\omega) = \arg(H(j\omega)) \quad (9.84)$$



s katerima lahko izrazimo prevajalno funkcijo kot

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}. \quad (9.85)$$

Za lažje določanje  $A(\omega)$  in  $\Phi(\omega)$  zapišimo prevajalno funkcijo v malo drugačni obliki

$$H(s) = H'_0 \frac{(1 - s/z_1)(1 - s/z_2) \cdots (1 - s/z_m)}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2) \cdots (1 - s/p_n)} s^{k_0}, \quad (9.86)$$

oziroma

$$H(j\omega) = H'_0 \frac{(1 - j\omega/z_1)(1 - j\omega/z_2) \cdots (1 - j\omega/z_m)}{(1 - j\omega/p_1)(1 - j\omega/p_2) \cdots (1 - j\omega/p_n)} (j\omega)^{k_0}. \quad (9.87)$$

Pri tem je  $H'_0$  realna konstanta,  $k_0$  pa kratnost ničle oziroma pola v koordinatnem izhodišču kompleksne ravnine. Če je  $k_0 > 0$  imamo  $k_0$ -kratno ničlo pri  $z = 0$ , prevajalna funkcija pa ima skupaj  $m + k_0$  ničel in  $n$  polov. Če je  $k_0 < 0$ , imamo  $|k_0|$ -kraten pol pri  $p = 0$ , prevajalna funkcija pa ima  $m$  ničel in  $n - k$  polov.

Funkcija  $A(\omega)$  predstavlja absolutno vrednost prevajalne funkcije pri krožni frekvenci  $\omega$ . Včasih jo imenujemo tudi **amplitudni del prevajalne funkcije**. Njena vrednost se preko celotnega območja frekvenc močno spreminja. Zaradi tega je grafično ne predočamo neposredno, ampak namesto nje rišemo funkcijo

$$A(\omega)[\text{dB}] = 20 \log_{10} |A(\omega)| = 20 \log_{10} (|H(j\omega)|), \quad (9.88)$$

katere enote so **decibeli** (dB). 20dB ustreza vrednosti  $A = 10$ , 40dB pa vrednosti  $A = 100$ . Obratno lahko  $A(\omega)$  izrazimo z  $A(\omega)[\text{dB}]$  kot

$$A(\omega) = 10^{\frac{A(\omega)[\text{dB}]}{20}}. \quad (9.89)$$

Funkcija  $\Phi(\omega)$  predstavlja argument (fazo) prevajalne funkcije in jo zato včasih imenujemo tudi **fazni del prevajalne funkcije**. Ponavadi jo podajamo v stopinjah ali radianih. Zaradi lastnosti logaritma ( $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ ) in dejstva, da je krožna frekvenca  $\omega$  zmeraj pozitivna, lahko  $A(\omega)[\text{dB}]$  izrazimo kot

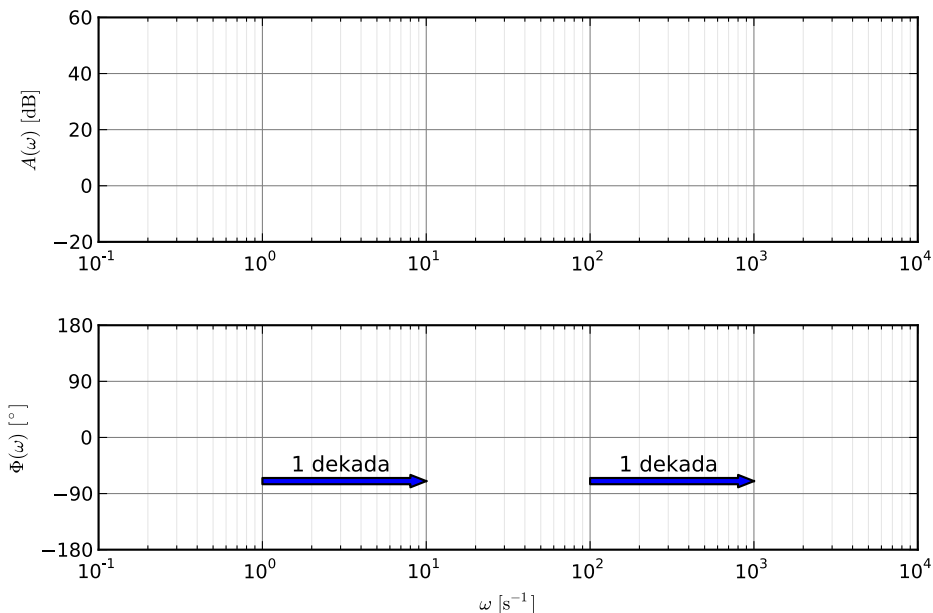
$$A(\omega)[\text{dB}] = 20 \log_{10} |H'_0| + 20k_0 \log_{10}(\omega) + \sum_{i=1}^m 20 \log_{10} |1 - j\omega/z_i| + \sum_{i=1}^n 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 - j\omega/p_i} \right|. \quad (9.90)$$

Podobno lastnost ima tudi argument kompleksnega števila ( $\arg(ab) = \arg(a) + \arg(b)$ ). Fazo v stopinjah lahko izrazimo kot vsoto členov.

$$\Phi(\omega) = \arg(H'_0) + k_0 \cdot 90^\circ + \sum_{i=1}^m \arg(1 - j\omega/z_i) + \sum_{i=1}^n \arg\left(\frac{1}{1 - j\omega/p_i}\right). \quad (9.91)$$

Enačbi (9.90) in (9.91) nam omogočata, da narišemo graf funkcij  $A(\omega)[\text{dB}]$  in  $\Phi(\omega)$  kot vsoto prispevkov posameznih (enostavnih) členov. Pri tem frekvenco rišemo v logaritemski skali. To nam skupaj z uporabo decibelov omogoča, da pokrijemo zelo široke razpone frekvenc in absolutnih vrednosti prevajalne funkcije (slika 9.10). Za skalo na ordinatni osi lahko namesto krožne frekvence  $\omega$  uporabimo tudi frekvenco  $f = \omega/(2\pi)$ .

Pri vnašanju točk v graf bomo pogosto naleteli na pojem **dekade**. Razmik ene dekade prikazuje puščica na sliki 9.10. Če je frekvenca  $f_2$  za eno dekada večja od frekvence  $f_1$ , je razmerje  $f_2/f_1 = 10$ . Dve dekadi tako pomenita razmerje  $f_2/f_1 = 10^2 = 100$ .



Slika 9.10: Bodejev diagram. V zgornji graf rišemo amplitudni del prevajalne funkcije v decibelih ( $A(\omega)$ [dB]), v spodnjega pa fazni del ( $\Phi(\omega)$ ). Puščica prikazuje frekvenčni razpon s širino ene dekade.

**Bodejev diagram** prikazuje absolutno vrednost prevajalne funkcije v decibelih in njen argument v stopinjah (ali radianih). Pri tem ne rišemo dejanskega poteka funkcij  $A(\omega)$ [dB] in  $\Phi(\omega)$ , ampak njuna **asimptotična poteka**. Asimptotičen potek se dobro ujema z dejanskim potekom, ko je točka  $s = j\omega = j2\pi f$  daleč od vseh polov in ničel. Odstopanja od asimptotičnega poteka so za prevajalne funkcije z realnimi poli majhna. Poglejmo si sedaj dejanske in asimptotične poteke posameznih prispevkov k prevajalni funkciji (členov v enačbah (9.90) in (9.91)).

**Prispevek konstantnega člena**  $H'_0$  k amplitudnemu delu prevajalne funkcije je najbolj enostaven od vseh.

$$A(\omega)[\text{dB}] = 20 \log_{10} |H'_0|. \quad (9.92)$$

Prispevek k faznemu delu je

$$\Phi(\omega) = \arg(H'_0) = \begin{cases} 0, & H'_0 \geq 0 \\ \pm 180^\circ, & H'_0 < 0 \end{cases} \quad (9.93)$$

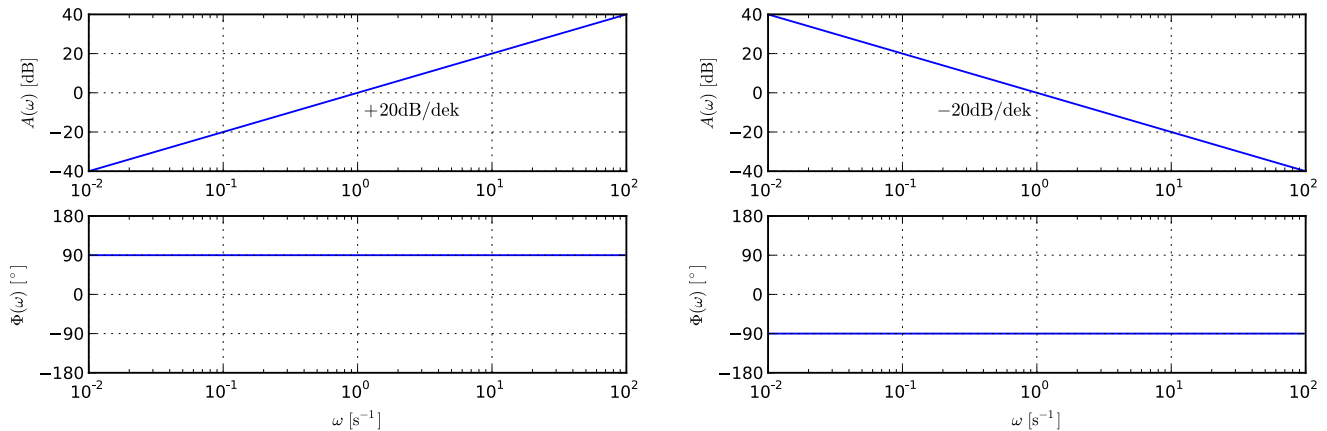
Za primer, ko je  $H'_0 < 0$  je faza lahko  $+180^\circ$  ali  $-180^\circ$ . Oboje je pravilno, saj je faza periodična s periodo  $360^\circ$ .

**Enojno ničlo v koordinatnem izhodišču** ( $z = 0$ ) predstavlja člen  $j\omega$  v izrazu (9.87). Imenujemo ga tudi **diferencirni člen**, ker v časovnem prostoru ustreza odvajanju signala po času. K amplitudnemu in faznemu delu prevajalne funkcije prispeva

$$A(\omega)[\text{dB}] = 20 \log_{10} |j\omega| = 20 \log_{10}(\omega), \quad (9.94)$$

$$\Phi(\omega) = \arg(j\omega) = 90^\circ. \quad (9.95)$$

Pri risanju poteka amplitudnega dela prevajalne funkcije upoštevamo, da je na abscisni osi logaritemska skala, kar pomeni, da bo potek amplitude v decibelih linearen. Amplitudni dela raste s strmino 20dB na dekada (20dB/dek). Fazni del prevajalne funkcije je konstanten in enak  $90^\circ$ . Bodejev diagram je prikazan na sliki 9.11 (levo).



Slika 9.11: Bodejev diagram za enojno ničlo (levo) in enojen pol (desno) v koordinatnem izhodišču ( $z = 0$  oziroma  $p = 0$ ).

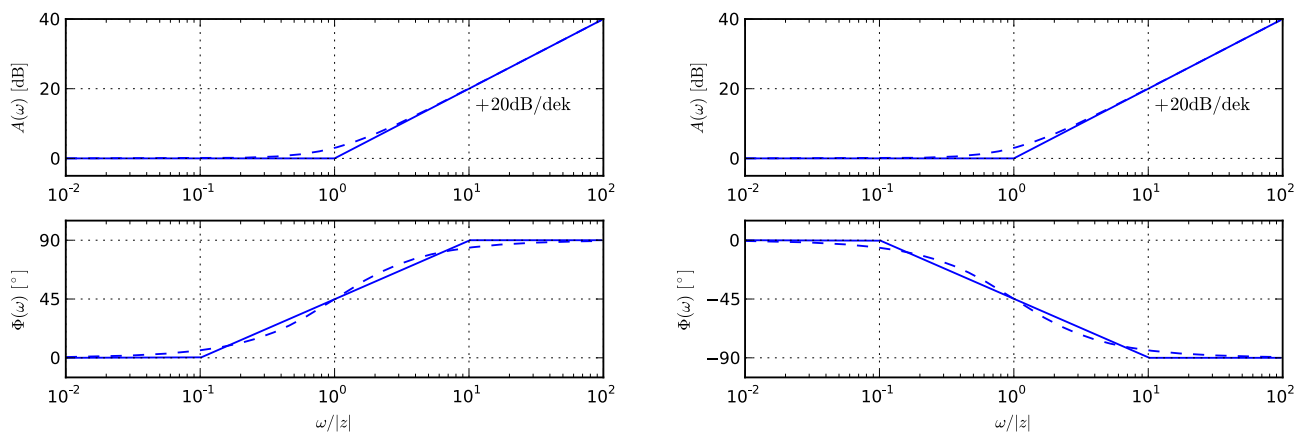
**Enojni pol v koordinatnem izhodišču** ( $p = 0$ ) prispeva člen  $(j\omega)^{-1}$  v izraz (9.87). Imenujemo ga tudi **integrirni člen**, ker v časovnem prostoru ustreza integriranju signala po času. Njegov prispevek k amplitudnemu in faznemu delu prevajalne funkcije je

$$A(\omega)[\text{dB}] = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log_{10}(\omega), \quad (9.96)$$

$$\Phi(\omega) = \arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) = \arg\left(-j\frac{1}{\omega}\right) = -90^\circ. \quad (9.97)$$

Bodejev diagram (slika 9.11, desno) je podoben, kot za diferencirni člen, le da imamo sedaj upadanje amplitudnega dela s strmino  $-20\text{dB/dek}$ , faza pa je enaka  $-90^\circ$ .

**Za  $k_0$ -kratno ničlo oziroma  $k_0$ -kraten pol v koordinatnem izhodišču** je strmina amplitudnega dela enaka  $\pm k_0 \cdot 20\text{dB/dek}$ , fazni del pa je enak  $\pm k_0 \cdot 90^\circ$ .



Slika 9.12: Bodejev diagram za enojno realno negativno ničlo  $z = a < 0$  (levo) in enojno realno pozitivno ničlo  $z = a > 0$  (desno). Asimptotičen potek je narisano s polno črto, dejanski potek pa s črtkano črto.

**Enojno realno ničlo**  $z = a$  predstavlja člen oblike  $(1 - j\omega/z)$  v izrazu (9.87). Prispevek k amplitudnemu delu

prevajalne funkcije je enak

$$A(\omega)[\text{dB}] = 20 \log_{10} \left| 1 - \frac{j\omega}{z} \right| = 20 \log_{10} \left| 1 - \frac{j\omega}{a} \right|. \quad (9.98)$$

Za majhne vrednosti krožne frekvence ( $\omega \ll |a|$ ) se poenostavi v  $20 \log_{10}(1) = 0\text{dB}$ , za  $\omega \gg |a|$  pa lahko enico zanemarimo in dobimo podoben potek, kot za diferencirni člen ( $20 \log_{10} |\omega/a|$ ), ki postane enak  $0\text{dB}$  pri  $\omega = |a|$ . Opisani skrajnosti predstavljata asimptotičen potek amplitudnega dela prevajalne funkcije. Za  $\omega > |a|$  asimptotičen potek raste s strmino  $20\text{dB}/\text{dek}$ . Fazni del prevajalne funkcije je enak

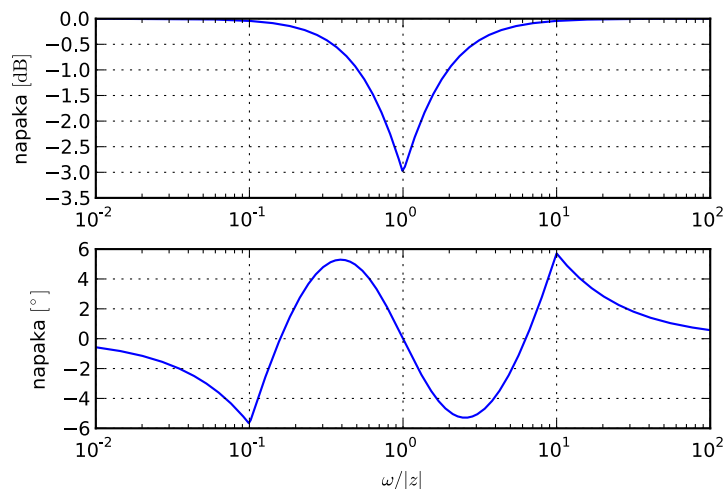
$$\Phi(\omega) = \arg \left( 1 - \frac{j\omega}{a} \right). \quad (9.99)$$

Ker fazni del nikoli ne preseže  $\pm 90^\circ$ , lahko funkcijo  $\arg(s)$  nadomestimo z  $\arctan(\text{Im}(s)/\text{Re}(s))$ . Dobimo

$$\Phi(\omega) = \arctan \left( -\frac{\omega}{a} \right). \quad (9.100)$$

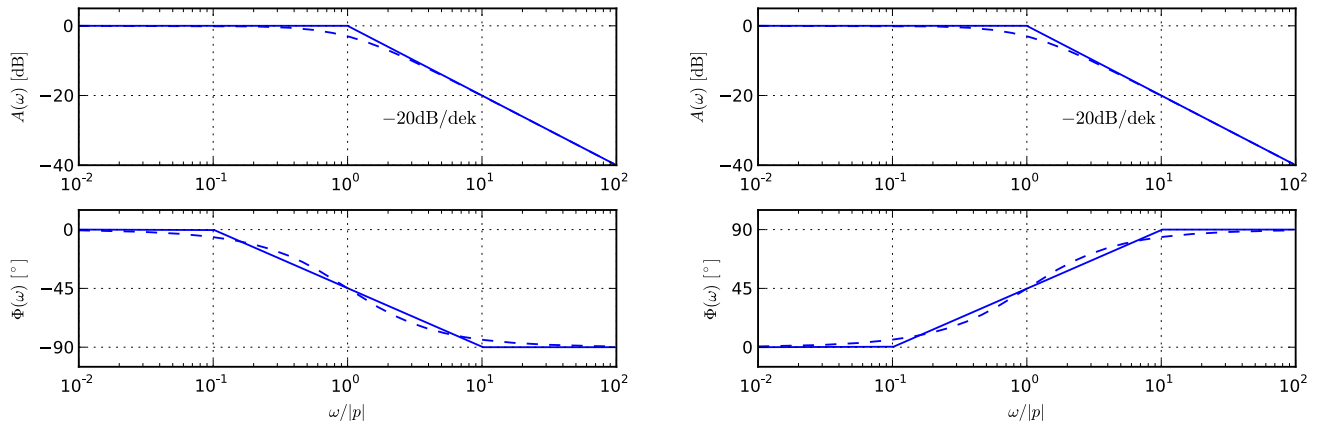
Za  $\omega \ll |a|$  je fazni del enak  $0^\circ$ . Za ničlo na levi strani imaginarne osi ( $a < 0$ ) je fazni del pri  $\omega = |a|$  enak  $45^\circ$ . Če ničla leži desno od imaginarne osi ( $a > 0$ ), je fazni del enak  $-45^\circ$ . Ko krožna frekvenca postane dovolj velika ( $\omega \gg |a|$ ) se fazni del približuje  $90^\circ$  za  $a < 0$  oziroma  $-90^\circ$  za  $a > 0$ .

Prehod od  $0^\circ$  do  $\pm 90^\circ$  se zgodi skoraj v celoti za krožne frekvence  $|a|/10 \leq \omega \leq 10|a|$ , oziroma v območju, ki se prične eno dekada pred  $|a|$  in konča eno dekada za  $|a|$ . Kot asimptotičen potek zato rišemo linearen prehod od  $0^\circ$  do  $\pm 90^\circ$  v opisanem območju krožnih frekvenc. Prehod ima strmino  $45^\circ/\text{dek}$ .



Slika 9.13: Razlika med asimptotičnim potekom in dejanskim potekom prevajalne funkcije v Bodejevem diagramu za enojno realno ničlo  $z = a < 0$ .

Slika 9.12 (levo) prikazuje Bodejev diagram za realno ničlo na levi strani imaginarne osi ( $a < 0$ ). Potek za ničlo na desni strani realne osi ( $a > 0$ ) je na sliki 9.12 (desno). Asimptotičen potek je narisano s polno črto, dejanski potek pa s črtkano črto. Vidimo, da dejanski potek rahlo odstopa od asimptotičnega. Napaka, ki jo naredimo, če namesto dejanskega poteka prevajalne funkcije rišemo asimptotični potek, je prikazana na sliki 9.13. Vidimo, da največja napaka amplitudnega dela nastopi pri  $\omega = |a|$  in je enaka  $3\text{dB}$ . Napaka faznega dela ne preseže  $6^\circ$ . Največja je pri prehodu iz linearnega v konstantni del asimptotičnega poteka (pri  $\omega/|a| = 1/10$  oziroma  $\omega/|a| = 10$ ).



Slika 9.14: Bodejev diagram za enojen realen negativen pol  $p = a < 0$  (levo) in enojen realen pozitiven pol  $p = a > 0$  (desno). Asimptotičen potek je narisan s polno črto, dejanski potek pa s črtkano črto.

**Enojen realen pol**  $p = a$  predstavlja člen oblike  $(1 - j\omega/p)^{-1}$  v izrazu (9.87). Prispevek k amplitudnemu in faznemu delu prevajalne funkcije je enak

$$A(\omega)[\text{dB}] = 20 \log_{10} \left| \left(1 - \frac{j\omega}{p}\right)^{-1} \right| = -20 \log_{10} \left| 1 - \frac{j\omega}{a} \right|, \quad (9.101)$$

$$\Phi(\omega) = \arg \left( \left(1 - \frac{j\omega}{p}\right)^{-1} \right) = -\arg \left( 1 - \frac{j\omega}{a} \right). \quad (9.102)$$

Po obliki sta pripevka zelo podobna (9.98) in (9.99) od katerih se razlikujeta zgolj v predznaku. To pomeni, da bo v asimptotičnem poteku amplitudni del prevajalne funkcije upadal s strmino  $-20\text{dB}/\text{dek}$ . Asimptotičen potek faznega dela upada z  $-45^\circ/\text{dek}$  za negativne realne pole ( $p = a < 0$ ) oziroma raste s  $45^\circ/\text{dek}$  za pozitivne realne pole ( $p = a > 0$ ). Potek prevajalne funkcije v Bodejevem diagramu za enojen realen pol prikazuje slika 9.14.

Če imamo opravka s  $k$ -kratno realno ničlo ali  $k$ -kratnim realnim polom, je strmina naraščanja oziroma upadanja amplitudnega dela prevajalne funkcije  $\pm k \cdot 20\text{dB}/\text{dek}$ . Fazni del prevajalne funkcije ima prehod od  $0^\circ$  proti  $\pm k \cdot 90^\circ$  s strmino  $\pm k \cdot 45^\circ/\text{dek}$ .

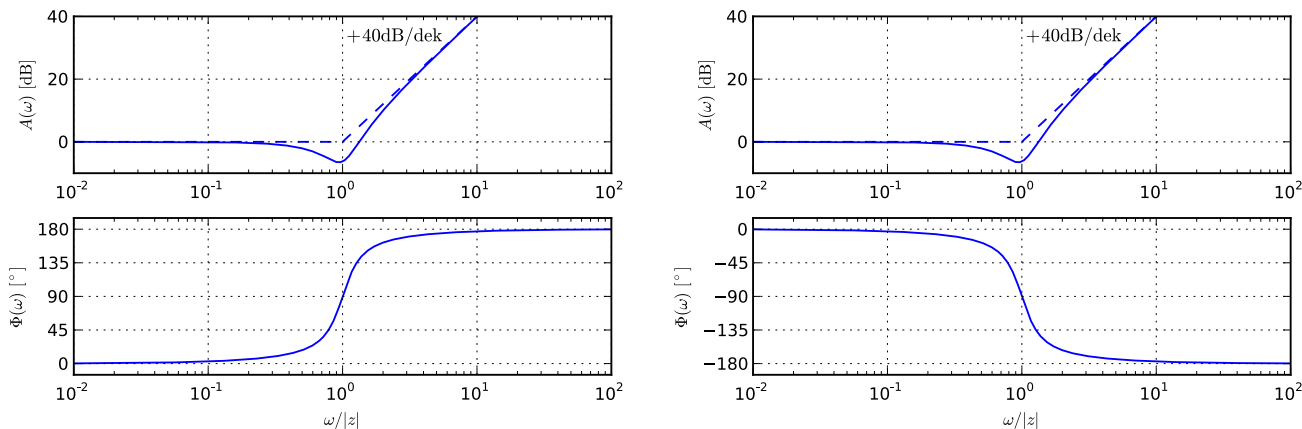
**Par enojnih** ( $k = 1$ ) **konjugirano kompleksnih ničel** ( $z = a \pm jb$ ) prispeva v prevajalno funkcijo (9.87) člen oblike

$$\left(1 - \frac{j\omega}{a + jb}\right) \left(1 - \frac{j\omega}{a - jb}\right) = \frac{-\omega^2 - 2aj\omega + a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1 - j \frac{2a}{\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2, \quad (9.103)$$

kjer je  $\omega_0 = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$  naravna krožna frekvenca, ki pripada konjugirano kompleksnemu paru ničel. Amplitudni in fazni del prevajalne funkcije sta enaka

$$A(\omega)[\text{dB}] = 20 \log_{10} \left( \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2a\omega}{\omega_0^2}\right)^2} \right), \quad (9.104)$$

$$\Phi(\omega) = \arg \left( 1 - j \frac{2a\omega}{\omega_0^2} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right). \quad (9.105)$$



Slika 9.15: Bodejev diagram za par enojnih konjugirano kompleksnih ničel  $z = a \pm jb$  za  $|b/a| = 4$ . Potek amplitude in faze za ničli na levi strani imaginarne osi (levo) in desni strani imaginarne osi (desno). Asimptotičen potek amplitudnega dela je narisan s črtkano črto, dejanski potek pa s polno črto.

Za nizke frekvence ( $\omega \ll \omega_0$ ) so členi izraza (9.103), ki vsebujejo  $\omega/\omega_0$ , zanemarljivi v primerjavi z 1. Tako za prispevek k amplitudnemu delu prevajalne funkcije ostane samo 1 oziroma 0dB. Za visoke frekvence ( $\omega \gg \omega_0$ ) prevlada kvadratni člen v (9.103) in dobimo prispevek  $(\omega/\omega_0)^2$  (kvadrat prispevka diferencialnega člena). Ta v Bodejevem diagramu ustreza asimptoti s strmino 40dB/dek, ki seka 0dB pri frekvenci  $\omega_0$ .

Pri nizkih frekvencah je faza prispevka k prevajalni funkciji enaka  $0^\circ$ . Poglejmo si realni in imaginarni del izraza (9.103) za majhne vrednosti  $\omega/\omega_0$ . Za  $a < 0$  sta realni in imaginarni del pozitivna (v prvem kvadrantu kompleksne ravnine), faza pa med  $0^\circ$  in  $90^\circ$ . Ko frekvenca raste, imaginarni del ostaja pozitiven, realni del pa zaradi čedalje večjega  $\omega/\omega_0$  postane negativen. Prispevek k prevajalni funkciji sedaj leži v 2. kvadrantu kompleksne ravnine (faza med  $90^\circ$  in  $180^\circ$ ). Povzamemo lahko, da za enojen par ničel na levi strani imaginarne osi ( $a < 0$ ) faza z večanjem frekvence raste od  $0^\circ$  proti  $180^\circ$ .

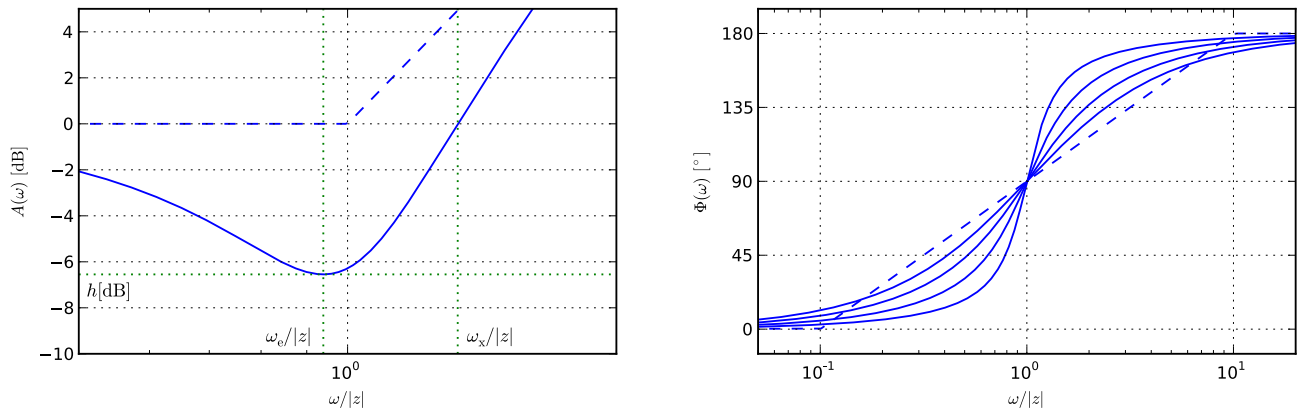
Podobno lahko za par ničel leži na desni strani imaginarne osi ( $a > 0$ ) ugotovimo, da se prispevek k prevajalni funkciji najprej nahaja v 4. kvadrantu, pri višjih frekvencah pa v 3. kvadrantu kompleksne ravnine. Faza zato z naraščanjem frekvence upada od  $0^\circ$  proti  $-180^\circ$ . Pri  $\omega = \omega_0$ , je prispevek k prevajalni funkciji čisto imaginaren ( $-j2a/\omega_0$ ). Faza je tedaj  $-90^\circ$  (za  $a > 0$ ) oziroma  $90^\circ$  (za  $a < 0$ ).

Potek amplitude in faze za konjugirano kompleksen par ničel, ko velja  $|b/a| = 4$ , je narisan na sliki 9.15. Potek amplitudnega in faznega dela je podoben, kot za enojno realno ničlo, le da sta sedaj strmina naraščanja amplitudnega dela in strmina prehoda faze večja. V poteku amplitudnega dela je prisoten ekstrem, ki ga pri realnih ničlah in polih nimamo. Ekstrem imenujemo tudi **resonanca**, frekvenco pri kateri nastopi pa **resonančna frekvenca**.

Nekoliko več razkrije podrobnejši pogled na potek amplitude (slika 9.16, levo). Resonanca (najnižja točka) nastopi pri frekvenci  $\omega_e$ , asimptota za visoke frekvence seka 0dB pri  $\omega = |z| = \omega_0$ , amplitudni del poteka pa doseže 0dB pri  $\omega = \omega_x$ . Vrednost amplitudnega dela v resonanci je  $h$  (oziroma v decibelih  $h[\text{dB}]$ ). Potek faze za  $a < 0$  in različne vrednosti  $|b/a|$  je na sliki 9.16 (desno). Strmina poteka narašča, ko se večja  $|b/a|$ . Pri  $b = 0$  imamo pravzaprav opravka z dvojno realno ničlo pri  $z = a$ . Tej ustreza asimptotičen potek faze, ki je narisan s črtkano črto. Za ostale vrednosti  $|b/a|$  nima smisla govoriti o kakem preprostem asimptotičnem poteku, saj krivulje preveč odstopajo od katerekoli premice, ki jo potegnemo od  $0^\circ$  proti  $180^\circ$ .

Lego presečišča poteka amplitudnega dela z 0dB določimo iz enačbe

$$\left| 1 - j \frac{2a \omega_x}{\omega_0 \omega_0} - \left( \frac{\omega_x}{\omega_0} \right)^2 \right| = 1. \quad (9.106)$$



Slika 9.16: Podrobnejši pogled na potek amplitudnega dela (levo) in faznega dela (desno) prevajalne funkcije za konjugirano kompleksen par enojnih ničel  $z a < 0$ . Amplitudni del je narisana za  $|b/a| = 4$ , fazni del pa za vrednosti  $|b/a| = 0$  (najmanjša strmina prehoda), 1, 2 in 4 (največja strmina prehoda). Črtkana črta prikazuje asymptotičen potek faze za dvojno realno ničlo.

Vpeljemo novo neznako  $x = \omega_x/\omega_0$  in odpravimo absolutno vrednost.

$$(1 - x^2)^2 + \left(\frac{2a}{\omega_0}\right)^2 x^2 = 1. \quad (9.107)$$

Po preoblikovanju nam ostane enačba

$$x^2 \left( x^2 - 2\frac{\omega_0^2 - 2a^2}{\omega_0^2} \right) = 0. \quad (9.108)$$

Od tod sledita dve rešitvi. Prva  $x = 0$  ni tista, ki jo iščemo, saj ustreza presečišču pri  $\omega = 0$ . Druga rešitev je  $x^2 = 2(\omega_0^2 - 2a^2)/\omega_0^2$ . Iz nje dobimo frekvenco prehoda skozi 0dB.

$$\omega_x = \sqrt{2(\omega_0^2 - 2a^2)} = \sqrt{2(b^2 - a^2)}. \quad (9.109)$$

Vidimo, da presečišča z 0dB ni, ko je  $a \geq b$ . Takrat amplitudni del prevajalne funkcije poteka nad krivuljo asimptotičnega poteka. Resonančno frekvenco ( $\omega_e$ ) določimo preko ničle odvoda absolutne vrednosti (9.103) po  $\omega$ . Namesto odvoda absolutne vrednosti lahko gledamo tudi odvod kvadrata absolutne vrednosti, kar nam izpeljavo precej poenostavi.

$$\left. \frac{d}{d\omega} \left[ \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{2a\omega}{\omega_0^2} \right)^2 \right] \right|_{\omega=\omega_e} = 0. \quad (9.110)$$

Po vpeljavi nove spremenljivke  $x = \omega_e/\omega_0$  in nekaj poenostavitvah dobimo enačbo

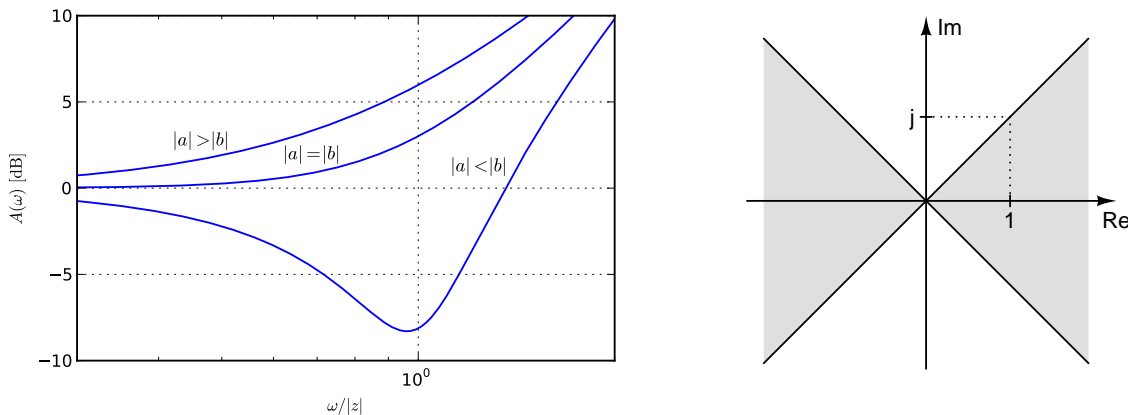
$$\left( -4x(1 - x^2) + 2x \left( \frac{2a}{\omega_0} \right)^2 \right) \frac{1}{\omega_0} = 0, \quad (9.111)$$

ki jo lahko preuredimo v

$$2x \left( -2(1 - x^2) + \left( \frac{2a}{\omega_0} \right)^2 \right) = 0, \quad (9.112)$$

Rešitev  $x = 0$ , ki ustreza  $\omega_e = 0$  ni tista, ki jo iščemo. Druga rešitev je  $x = \sqrt{1 - 2a^2/\omega_0^2} = \sqrt{b^2 - a^2}/\omega_0$ , ki ustreza frekvenci

$$\omega_e = \sqrt{b^2 - a^2} \quad (9.113)$$



Slika 9.17: Poteki amplitudnega dela prevajalne funkcije za konjugirano kompleksen par ničel pri različnih vrednostih  $a$  in  $b$  (levo). Pri  $|a| \geq |b|$  resonanca izgine. Pogoji ustreza osenčenemu delu kompleksne ravnine (desno).

Vidimo, da resonance ni, kadar je  $a \geq b$ . Resonančna frekvenca in frekvenca presečišča z 0dB sta povezana z enačbo

$$\omega_x = \omega_e \sqrt{2}. \quad (9.114)$$

Višino  $h$  resonance določimo tako, da (9.113) vstavimo namesto  $\omega$  v (9.103) in izračunamo absolutno vrednost dobljenega izraza.

$$h^2 = \left| 1 - j \frac{2a\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2 + b^2} - \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \right|^2 = \left( \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left( \frac{2a\sqrt{b^2 - a^2}}{a^2 + b^2} \right)^2 = \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}. \quad (9.115)$$

V resonanci je prispevek k amplitudnemu delu prevajalne funkcije enak

$$h = \frac{2|ab|}{\omega_0^2} = \frac{2|ab|}{|z|^2}, \quad (9.116)$$

oziroma v decibelih

$$h[\text{dB}] = 20 \log_{10} \left( \frac{2|ab|}{\omega_0^2} \right). \quad (9.117)$$

Poteki amplitudnega dela prevajalne funkcije za različne vrednosti  $a$  in  $b$  so na sliki 9.17 (levo). Če je  $a \geq b$ , potek nima resonance in ne seka 0dB. Tedaj konjugirano kompleksni ničli ležita v osenčenem delu kompleksne ravnine (slika 9.17 (desno)).

Da določimo hitrost spreminjanja faze (slika 9.16, desno), moramo določiti odvod faze (v radianih) po krožni frekvenci. Za par konjugirano kompleksnih enojnih ničel je ta hitrost enaka

$$\frac{d\Phi}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left[ -\arctan \left( \frac{2a\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \right] = -\frac{2a(\omega_0^2 - \omega^2) - 2a\omega(-2\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega)^2} = -\frac{2a(\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega)^2}. \quad (9.118)$$



Največja hitrost spreminjanja faze (v rad/s<sup>-1</sup>) nastopi pri  $\omega = \omega_0$ .

$$\left. \frac{d\Phi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{4a\omega_0^2}{(2a\omega_0)^2} = -\frac{1}{a}. \quad (9.119)$$

Odvisna je samo od realnega dela ničle ( $a$ ). Ker fazo rišemo v Bodejevem diagramu, kjer krožno frekvenco vnašamo v logaritemskem merilu, nas zanima hitrost spreminjanja faze v rad/dek. V ta namen potrebujemo odvod po desetiškem logaritmu krožne frekvence

$$\frac{d\Phi}{d(\log_{10}(\omega))} = \frac{d\Phi}{d\omega} \cdot \left( \frac{d(\log_{10}(\omega))}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{d\Phi}{d\omega} \cdot (\omega \ln(10)). \quad (9.120)$$

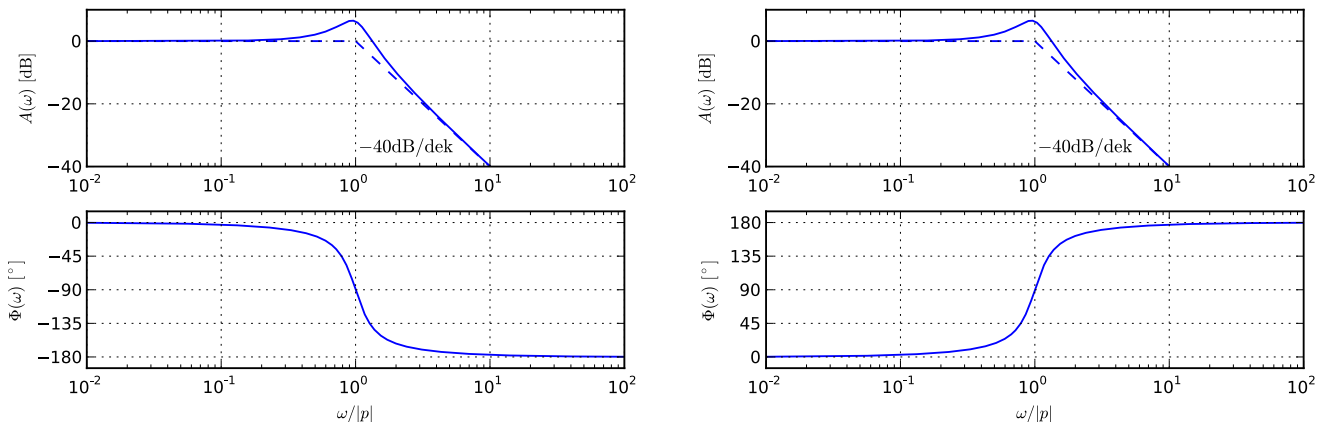
Največja hitrost spreminjanja faze v rad/dek tako znaša

$$\left. \frac{d\Phi}{d(\log_{10}(\omega))} \right|_{\omega=\omega_0} = -\frac{\omega_0 \ln(10)}{a} = -\ln(10) \operatorname{sign}(a) \sqrt{1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2}, \quad (9.121)$$

kjer je  $\operatorname{sign}(x)$  predznak realnega števila  $x$  in je enak  $-1$  za  $x < 0$  oziroma  $1$  za  $x > 0$ . V °/dek je največja hitrost spreminjanja faze

$$\left. \frac{d\Phi}{d(\log_{10}(\omega))} \right|_{\omega=\omega_0} [^\circ/\text{dek}] = -\frac{180 \ln(10)}{\pi} \operatorname{sign}(a) \sqrt{1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2}. \quad (9.122)$$

Vidimo, da je hitrost spreminjanja faze v Bodejevem diagramu sorazmerna z razmerjem  $b/a$ . Pri  $b/a = 0$  (dvojna realna ničla  $z = a$ ) znaša  $132^\circ/\text{dek}$ . To je sicer več od strmine asimptote, ki je v tem primeru  $90^\circ/\text{dek}$ , vendar se moramo zavedati, da je strmina dejanskega poteka faze pri  $\omega = \omega_0$  nekoliko večja od strmine asimptote. Pri  $b/a = 4$  znaša hitrost spreminjanja faze  $544^\circ/\text{dek}$ .



Slika 9.18: Bodejev diagram za par enojnih konjugirano kompleksnih polov  $p = a \pm jb$  za  $|b/a| = 4$ . Potek amplitude in faze za pola na levi strani imaginarne osi (levo) in desni strani imaginarne osi (desno). Asimptotičen potek amplitudnega dela je narisano s črtkano črto, dejanski potek pa s polno črto.

**Par enojnih ( $k = 1$ ) konjugirano kompleksnih polov ( $p = a \pm jb$ ) prispeva v prevajalno funkcijo (9.87) člen oblike**

$$\left( 1 - \frac{j\omega}{a + jb} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{j\omega}{a - jb} \right)^{-1} = \frac{a^2 + b^2}{-\omega^2 - 2aj\omega + a^2 + b^2} = \left( 1 - j \frac{2a}{\omega_0} \frac{\omega}{\omega_0} - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^{-1}, \quad (9.123)$$

kjer je  $\omega_0 = \sqrt{a^2 + b^2} = |p|$  naravna krožna frekvenca, ki pripada konjugirano kompleksnemu paru polov. Amplitudni in fazni del prevajalne funkcije sta enaka

$$A(\omega)[\text{dB}] = -20 \log_{10} \left( \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2a\omega}{\omega_0^2}\right)^2} \right), \quad (9.124)$$

$$\Phi(\omega) = -\arg \left( 1 - j \frac{2a\omega}{\omega_0^2} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right). \quad (9.125)$$

Če ju primerjamo z (9.104) in (9.105), vidimo, da sta poteka enaka, kot za konjugirano kompleksen par enojnih ničel, le da sta nasprotnega predznaka. Potek amplitude in faze za konjugirano kompleksen par enojnih polov z  $|b/a| = 4$  je na sliki 9.18. Podoben je tistemu za enojen realen pol, le da sta strmini amplitudnega in faznega dela večji. V poteku amplitudnega dela je lahko prisotna resonanca. Resonančna frekvenca je enaka, kot pri paru konjugirano kompleksnih ničel.

$$\omega_e = \sqrt{b^2 - a^2}. \quad (9.126)$$

Višina resonance je enaka obratni vrednosti (9.116).

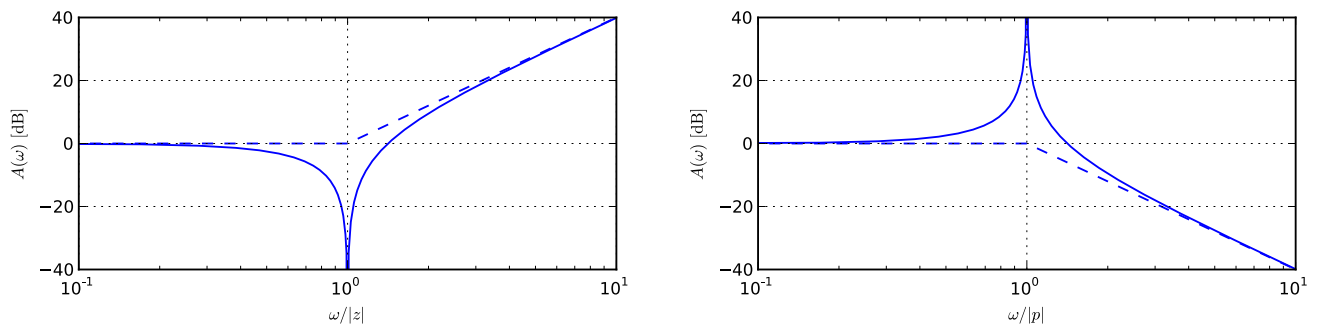
$$h = \frac{\omega_0^2}{2|ab|} = \frac{|p|^2}{2|ab|}, \quad (9.127)$$

$$h[\text{dB}] = 20 \log_{10} \left( \frac{\omega_0^2}{2|ab|} \right). \quad (9.128)$$

Presečišče z 0dB je (enako kot (9.109)) pri

$$\omega_x = \sqrt{2(\omega_0^2 - a^2)} = \sqrt{2(b^2 - a^2)} = \omega_e \sqrt{2}. \quad (9.129)$$

Tudi sedaj velja, da presečišče in resonanca izgineta, če je  $a \geq b$ . Poli, ki ležijo v osončenem delu kompleksne ravnine na sliki 9.17 (desno), ne povzročajo resonanc v prevajalni funkciji.

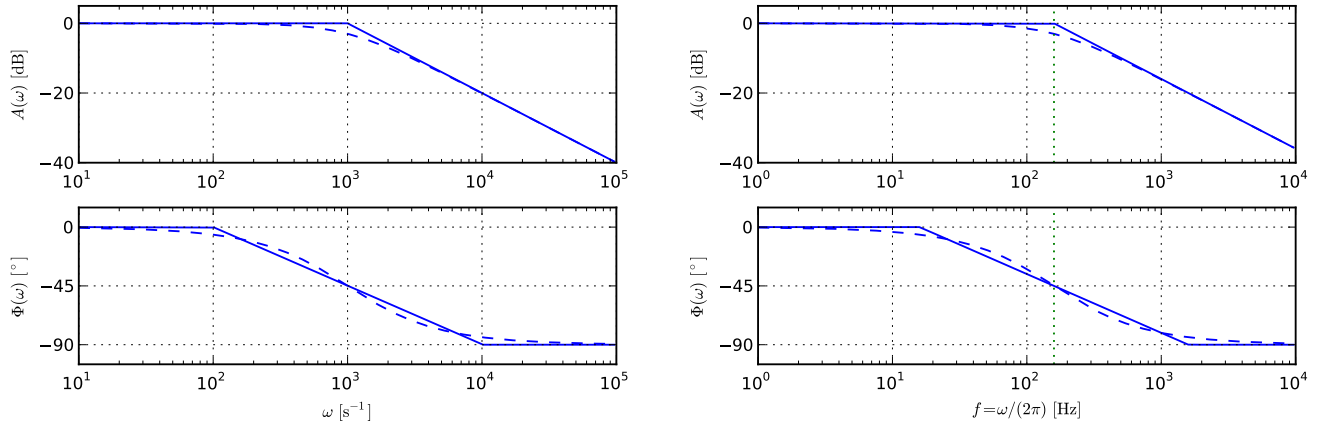


Slika 9.19: Amplitudni del prevajalne funkcije za par enojnih konjugirano kompleksnih ničel (levo) in polov (desno) na imaginarni osi ( $a = 0$ ). Asimptotičen potek amplitudnega dela je narisano s črtkano črto, dejanski potek pa s polno črto.

Za konec si pogledjmo še poseben primer, ko konjugirano kompleksen par ničel (polov) leži na imaginarni osi. Tedaj velja  $a = 0$  zaradi česar ima potek amplitudnega dela prevajalne funkcije (slika 9.19) resonanco, ki je visoka  $-\infty$ dB (oziroma  $+\infty$ dB) in nastopi pri frekvenci  $\omega_e = b$ . Potek faze ima v resonanci neskončno strm preskok od

$0^\circ$  do  $180^\circ$  (oziroma  $-180^\circ$ ). Vendar pa smeri preskoka (če faza raste ali upada) ne moremo enolično določiti, saj gre za mejni primer v katerem se leva in desna stran imaginarne osi srečata.

Hitrost spreminjanja faze je enaka, kot v enačbah (9.118), (9.119), (9.121) in (9.122), le da moramo spremeniti predznak iz  $-$  v  $+$ , saj imamo opravka s poli, ki sukajo fazo v nasprotno smer kot ničle.



Slika 9.20: Bodejev diagram za prevajalno funkcijo RC člena z  $R = 1\text{k}\Omega$  in  $C = 1\mu\text{F}$  (levo). Potek s frekvenco na abscisni osi (desno). Prelomna točka pri  $f = 1/(2\pi RC) = 159\text{Hz}$  je označena s pikčasto črto.

**Primer 9.6:** Narišimo Bodejev diagram za prevajalno funkcijo RC člena na sliki 9.1 (desno), če je  $R = 1\text{k}\Omega$  in  $C = 1\mu\text{F}$ . Prevajalno funkcijo smo določili že v primeru 9.3 kot

$$H(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega/\frac{1}{RC}}. \quad (9.130)$$

Vidimo, da ima prevajalna funkcija en pol pri  $p = -1/(RC) = -10^3 \text{ s}^{-1}$ . Iz (9.130) razberemo še, da je  $H'_0 = 1 = 0\text{dB}$ . Prelom nastopi pri frekvenci  $f = |p|/(2\pi) = 1/(2\pi RC) = 159\text{Hz}$ . Bodejev diagram, ki je podoben tistemu za en negativen realni pol (slika 9.14, levo), je prikazana na sliki 9.20. Asimptotičen potek prevajalne funkcije je narisana s polno črto, dejanski pa s črtkano črto.  $\triangle$

**Primer 9.7:** Narišimo Bodejev diagram za prevajalno funkcijo RC delilnika napetosti na sliki 9.5, če je  $R_1 = 10\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 1,111\text{k}\Omega$ ,  $C_1 = 100\text{pF}$  in  $C_2 = 1\mu\text{F}$ . Prevajalna funkcija (primer 9.2) je podana z

$$H(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_1 + C_2)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\omega/\frac{1}{R_1 C_1}}{1 + j\omega/\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}}. \quad (9.131)$$

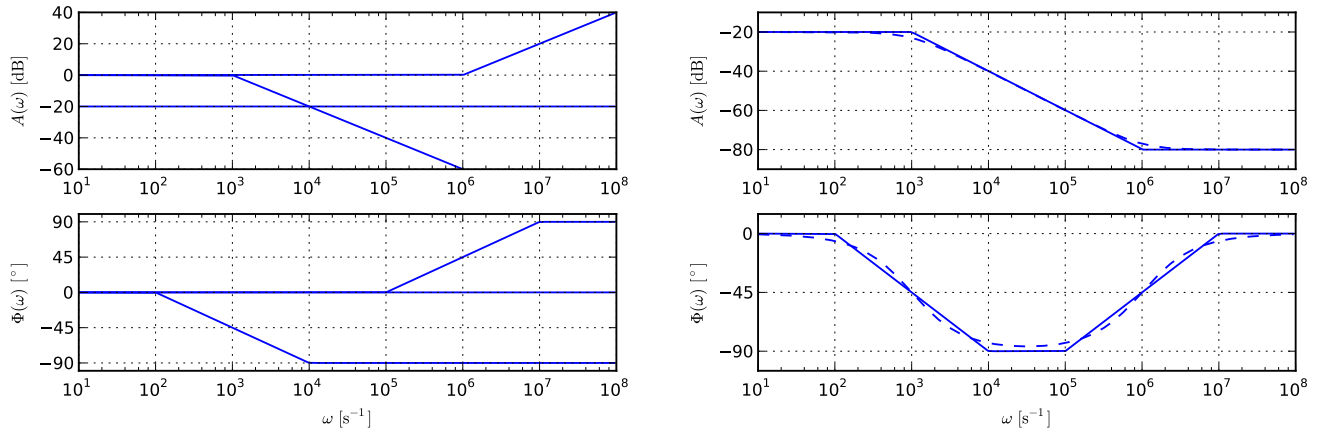
Iz (9.131) lahko razberemo  $H'_0$ , ničlo  $z$  in pol  $p$ .

$$H'_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0,1000 = -20\text{dB}, \quad (9.132)$$

$$z = -\frac{1}{R_1 C_1} = -1,000 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}, \quad (9.133)$$

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} = -1,000 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}. \quad (9.134)$$

Asimptotični poteki prispevkov  $H'_0$ , ničle in pola so narisani na sliki 9.21 (levo). Ko jih seštejemo, dobimo celotno prevajalno funkcijo v Bodejev diagramu (slika 9.21, desno).



Slika 9.21: Bodejev diagram za prevajalno funkcijo RC delilnika napetosti z  $R_1 = 10\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 1,111\text{k}\Omega$ ,  $C_1 = 100\text{pF}$  in  $C_2 = 1\mu\text{F}$ . Asimptotični poteki prispevkov  $H'_0$ , ničle in pola (levo) ter asimptotičen potek prevajalne funkcije (desno). Dejanski potek je narisana s črtkano črto.

Amplitudni potek prevajalne funkcije je do  $\omega = 10^3\text{s}^{-1}$  konstanten in enak  $-20\text{dB}$ . Pri  $\omega = 10^3\text{s}^{-1} = -p$  nastopi pol, ki povzroči upadanje amplitudnega dela s strmino  $-20\text{dB/dek}$ . Upadanje traja do  $\omega = 10^6\text{s}^{-1} = -z$ , kjer nastopi ničla, ki kompenzira upadanje s svojo strmino ( $+20\text{dB/dek}$ ). Amplitudni del se nato ustali pri

$$H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{p}{z} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}}{\frac{1}{R_1 C_1}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 1,000 \cdot 10^{-4} = -80\text{dB}. \quad (9.135)$$

Pri visokih frekvencah delilno razmerje določata kapacitivnosti  $C_1$  in  $C_2$ , pri nizkih frekvencah pa upornosti  $R_1$  in  $R_2$ . Če sta delilni razmerji (9.132) in (9.135) enaki, se pol in ničla pokrijeta ( $p = z$ ). Tedaj je prevajalna funkcija konstantna in enaka delilnemu razmerju

$$H(j\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}. \quad (9.136)$$

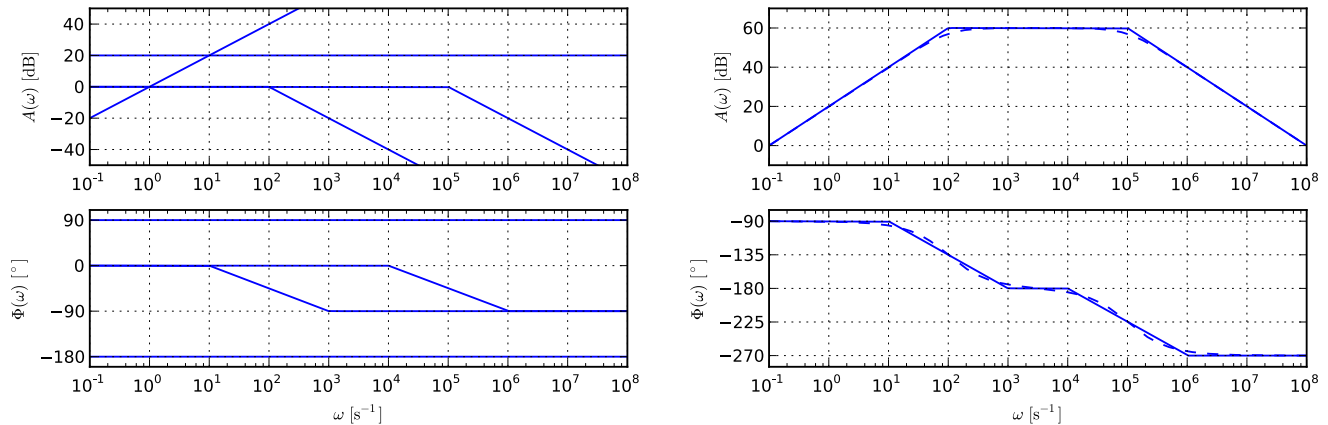
Fazni potek se prične pri nizkih frekvencah s konstantno vrednostjo  $0^\circ$ . Eno dekada levo od točke, kjer nastopi pol  $p_1$  (pri  $\omega = -p/10 = 10^2\text{s}^{-1}$ ), se prične upadanje faze s strmino  $-45^\circ/\text{dek}$ , ki se zaključi eno dekada desno od pola (pri  $\omega = -10p = 10^4\text{s}^{-1}$ ), ko faza doseže  $-90^\circ$ . Faza ostaja konstantna do frekvence  $\omega = -z/10 = 10^5\text{s}^{-1}$ , ki se nahaja eno dekada levo od točke, kjer začne ničla  $z$  vplivati na asimptotičen potek amplitudnega dela ojačenja. Od te točke faza raste s strmino  $+45^\circ/\text{dek}$ . Naraščanje se ustavi eno dekada desno od ničle (pri  $\omega = -10z = 10^7\text{s}^{-1}$ ), nakar se faza ustali pri  $0^\circ$ .  $\triangle$

**Primer 9.8:** Za prevajalno funkcijo

$$H(j\omega) = -\frac{A}{p_1} \frac{j\omega}{(1 - j\omega/p_1)(1 - j\omega/p_2)} \quad (9.137)$$

z  $A = -1000$ ,  $p_1 = -100\text{s}^{-1}$  in  $p_2 = -10^5\text{s}^{-1}$  narišimo Bodejev diagram. Iz (9.137) določimo

$$H'_0 = -\frac{A}{p_1} = -10\text{s}. \quad (9.138)$$



Slika 9.22: Bodejev diagram za prevajalno funkcijo (9.137) z  $A = -1000$ ,  $p_1 = -100\text{s}^{-1}$  in  $p_2 = -10^4\text{s}^{-1}$ . Asimptotični poteki prispevkov (levo) ter prevajalne funkcije (desno). Dejanski potek je narisana s črtkano črto.

Prevajalna funkcija ima eno ničlo  $z = 0$  in dva pola ( $p_1$  in  $p_2$ ). Amplitudni del prispevka  $H'_0$  je enak 20dB. Ker ima  $H'_0$  negativen predznak, je faza prispevka enaka  $-180^\circ$ . S tem že lahko narišemo poteke amplitudnih in faznih delov posameznih prispevkov ( $H'_0$ ,  $z$ ,  $p_1$  in  $p_2$ ) k prevajalni funkciji (slika 9.22, levo). Ko prispevke seštejemo, dobimo prevajalno funkcijo na sliki 9.22 (desno).

Začetno strmino  $+20\text{dB/dek}$  povzroči ničla  $z = 0$ . Od frekvence  $\omega = -p_1 = 10^2\text{s}^{-1}$  se amplitudni del ustali, saj tu nastopi prvi pol  $p_1$ , ki kompenzira naraščanje karakteristike, ki ga povzroča ničla. Karakteristika je nato nekaj časa konstanta in enaka  $A = 1000 = 60\text{dB}$ . Pri  $\omega = -p_2 = 10^5\text{s}^{-1}$  nastopi drugi pol  $p_2$ , ki povzroči upadanje s strmino  $-20\text{dB/dek}$ .

Potek faze se prične pri  $-90^\circ$ . To vrednost vsilita ničla  $z = 0$  in negativen predznak  $H'_0$ . Eno dekada levo od točke, kjer nastopi pol  $p_1$  (pri  $\omega = -p_1/10 = 10\text{s}^{-1}$ ) se prične upadanje faze proti  $-180^\circ$ , ki se zaključi dve dekadi pozneje pri  $\omega = -10p_1 = 10^3\text{s}^{-1}$ . Faza je nekaj časa konstantna ( $-180^\circ$ ), nakar spet začne updati zaradi pola  $p_2$  proti  $-270^\circ$ . Upadanje se začne pri  $\omega = -p_2/10 = 10^4\text{s}^{-1}$  in konča pri  $\omega = -10p_2 = 10^6\text{s}^{-1}$ , kjer se faza ustali pri  $-270^\circ$ .

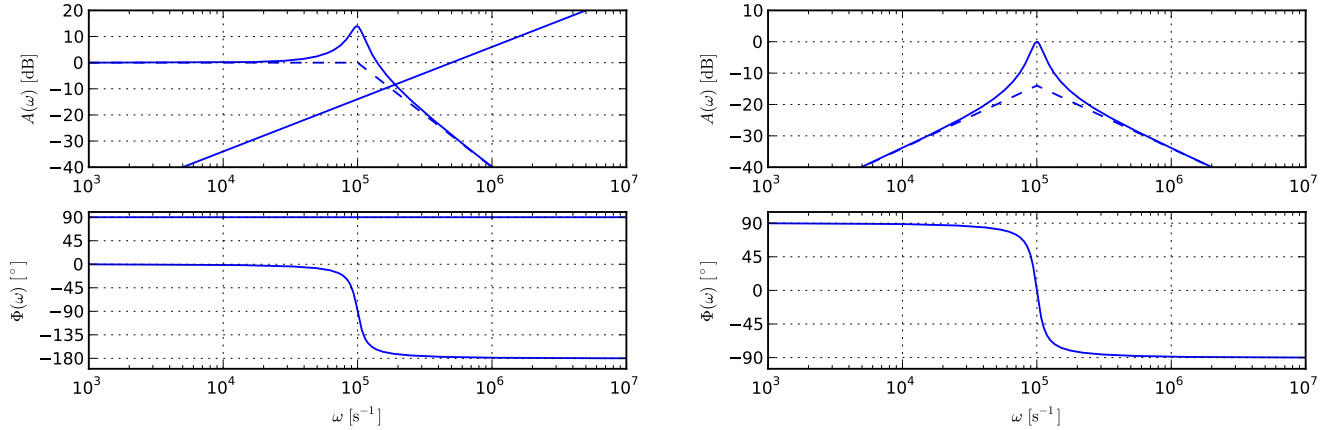
Pripevek  $H'_0$  k fazi prevajalne funkcije bi lahko bil tudi  $180^\circ$ . V tem primeru bi se potek faze dvignil za  $360^\circ$ . Faza bi tako svoj potek pričela pri  $270^\circ$  in končala pri  $90^\circ$ . Ker je faza  $\varphi + k \cdot 360^\circ$  za cele vrednosti  $k$  enakovredna fazi  $\varphi$ , sta oba poteka faze enakovredna.  $\triangle$

**Primer 9.9:** Za prevajalno funkcijo nihajnega kroga na sliki 9.9 z elementi  $R = 2\Omega$ ,  $L = 0,1\text{mH}$  in  $C = 1\mu\text{F}$  narišimo Bodejev diagram. Prevajalno funkcijo nihajnega kroga (enačba (9.58)) lahko razbijemo na dva dela.

$$H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC} = \underbrace{j\omega RC}_{H_1(j\omega)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}}_{H_2(j\omega)}. \quad (9.139)$$

Prvi del ( $H_1(j\omega)$ ) prispeva eno ničlo ( $z = 0$ ), zaradi katere amplitudni potek ojačenja narašča z  $20\text{dB/dek}$  in doseže  $0\text{dB}$  pri frekvenci  $\omega = 1/(RC) = 0,5 \cdot 10^6\text{s}^{-1}$ . Faza  $H_1(j\omega)$  je konstantna in enaka  $90^\circ$ .

Drugi del ( $H_2(j\omega)$ ) prispeva dva pola. O naravi polov odloča izraz (9.64). Ker je  $D = (RC)^2 - 4LC =$



Slika 9.23: Bodejev diagram za prevajalno funkcijo (9.139) pri  $R = 2\Omega$ ,  $L = 0,1\text{mH}$  in  $C = 1\mu\text{F}$ . Poteki prispevkov (levo) ter prevajalne funkcije (desno). S črtkano črto so narisani asimptotični poteki.

$-0,399 \cdot 10^{-9}\text{s}^2 < 0$ , sta pola konjugirano kompleksna ( $p = a \pm jb$ ). Iz (9.67)-(9.69) dobimo

$$a = -\frac{R}{2L} = -10^4\text{s}^{-1}, \quad (9.140)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^5\text{s}^{-1}, \quad (9.141)$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - a^2} = 9,950 \cdot 10^4\text{s}^{-1}. \quad (9.142)$$

Ker je  $a < b$  ima prispevek obeh polov ( $H_2(j\omega)$ ) ekstrem pri

$$\omega_e = \sqrt{b^2 - a^2} = 9,899 \cdot 10^4\text{s}^{-1} \quad (9.143)$$

z višino

$$h = \frac{\omega_0^2}{2|ab|} = 5,03 = 14,0\text{dB}. \quad (9.144)$$

Celotna prevajalna funkcija ( $H(j\omega)$ ) ima pri  $\omega = \omega_0$  vrednost 1 (0dB). Njena faza je tedaj enaka  $0^\circ$ . Prispevki in celotna prevajalna funkcija so na sliki 9.23.  $H_1(j\omega)$  prispeva naraščanje s strmino  $+20\text{dB/dek}$ . Ta se od frekvence  $\omega = \omega_0 = 10^5\text{s}^{-1}$  naprej sešteje z upadanjem  $-40\text{dB/dek}$ , ki ga povzročata konjugirano kompleksna pola. Pri visokih frekvencah zato dobimo asimptotično upadanje s strmino  $-20\text{dB/dek}$ . Asimptoti  $H_1(j\omega)$  in  $H_2(j\omega)$  se sekata pri  $\omega = \omega_0$  na višini  $|H_1(j\omega_0)| = \omega_0 RC = 0,2 = -14,0\text{dB}$ .

Čeprav ima prispevek  $H_2(j\omega)$  ekstrem pri  $\omega_e < \omega_0$ , ekstrem amplitudnega dela  $H(j\omega)$  nastopi pri  $\omega = \omega_0$ . To se zgodi zaradi množenja z  $H_1(j\omega)$ , ki ekstrem  $\omega_e$  pomakne rahlo v desno. Da to drži, lahko preverimo z iskanjem ekstrema izraza

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{(\omega RC)^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}, \quad (9.145)$$

ki sovпада z ekstremom  $|H(j\omega)|$ . Odvajamo po  $\omega$  in izenačimo z 0. Dobimo enačbo

$$\frac{2\omega(RC)^2((1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(RC)^2) - \omega^2(RC)^2(2(1 - \omega^2 LC) \cdot (-2\omega LC) + 2\omega(RC)^2)}{((1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2)^2} = 0. \quad (9.146)$$

O rešitvi odloča števec ulomka. Člena  $2\omega(RC)^2 \cdot \omega^2(RC)^2$  se uničita. Izpostavimo  $(1 - \omega^2 LC)$  in dobimo.

$$(1 - \omega^2 LC)(2\omega(RC)^2(1 - \omega^2 LC) + 4\omega^3 LC(RC)^2) = 0, \quad (9.147)$$

Združimo izraza z  $\omega^3 LC(RC)^2$  in dobimo

$$2\omega(RC)^2(1 - \omega^2 LC)(1 + \omega^2 LC) = 0. \quad (9.148)$$

Vidimo, da je rešitev enačbe (ekstrem) pri  $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ .  $\triangle$

Za konec vpeljimo še **faktor kakovosti resonance** ( $Q$ ). Recimo, da je resonanca posledica konjugirano kompleksnega para polov ali ničel oblike  $a \pm jb$ . Tedaj je njen faktor kakovosti enak

$$Q = \frac{\omega_0}{2|a|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2|a|}. \quad (9.149)$$

Če so naravne krožne frekvence vseh ostalih polov in ničel mnogo manjše ali pa mnogo večje od  $\omega_0$ , je potek prevajalne funkcije okolici  $\omega_0$  do realnega faktorja določen s poloma (oz. ničloma), ki povzročata resonanco. Za hitrost spreminjanja faze v resonanci (pri  $\omega = \omega_0$ ) lahko tedaj uporabimo kar izraz (9.119). Velja

$$\left| \frac{d\Phi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{|a|}. \quad (9.150)$$

**Faktor kakovosti lahko zato izrazimo tudi z največjo hitrostjo spreminjanja faze kot**

$$Q = \frac{\omega_0}{2|a|} = \frac{\omega_0}{2} \cdot \left| \frac{d\Phi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}. \quad (9.151)$$

Resonance z zelo veliko hitrostjo spreminjanja faze imajo visok faktor kakovosti. Ko gre  $a$  proti 0, postane faktor kakovosti neskončen, faza pa ima pri  $\omega = \omega_0$  skok višine  $\pm 180^\circ$ . Nasprotna vrednost odvoda faze po krožni frekvenci ( $-d\Phi/d\omega$ ) ima enoto časa (s) in jo imenujemo tudi **skupinska zakasnitev resonance**. Za resonance s konjugirano kompleksnim parom polov na negativni strani realne osi ( $a < 0$ ) ali konjugirano kompleksnim parom ničel na pozitivni strani realne osi ( $a > 0$ ) je skupinska zakasnitev pozitivna.

Kakovost resonance je tudi merilo za širino resonance, ki je prisotna v prevajalni funkciji, če velja  $|b| > |a|$ . Recimo, da imamo opravka z resonanco v prevajalni funkciji oblike

$$H(j\omega) = \frac{2aj\omega}{(j\omega)^2 - 2aj\omega + \omega_0^2}, \quad (9.152)$$

ki smo jo že obravnavali v primeru 9.9, kjer smo ugotovili, da je njen amplitudni del v Bodejevem diagramu simetričen z ekstremom pri  $\omega = \omega_0$  višine  $|H(j\omega_0)| = 1$ . Določimo območje krožnih frekvenc znotraj katerega velja  $|H(j\omega)| \geq 1/\sqrt{2}$  (območje, kjer  $|H(j\omega)|$  ne pade za več 3dB v primerjavi z vrednostjo v resonanci). Širino tega območja imenujemo tudi **pasovna širina resonance**. Za mejni frekvenci območja dobimo enačbo

$$\frac{(2a\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega)^2} = \frac{1}{2}, \quad (9.153)$$

ki jo lahko preoblikujemo v

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (2a\omega)^2. \quad (9.154)$$

S korenjenjem dobimo

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \pm 2a\omega. \quad (9.155)$$

Sledijo štiri rešitve

$$\omega_{1,2,3,4} = \pm a \pm \sqrt{a^2 + \omega_0^2}, \quad (9.156)$$

pri čemer sta simbola  $\pm$  neodvisna. Ker so smiselne le pozitivne rešitve, dobimo za meji iskanega območja

$$\omega_{1,2} = \sqrt{a^2 + \omega_0^2} \pm a. \quad (9.157)$$

Pasovna širina je torej enaka

$$B = \omega_2 - \omega_1 = 2|a| = \omega_0/Q. \quad (9.158)$$

Resonance z velikim faktorjem kakovosti imajo majhno pasovno širino. To nas pripelje do **definicije kakovosti resonance na osnovi njene pasovne širine** ( $B$ ), ki se glasi

$$Q = \frac{\omega_0}{B}. \quad (9.159)$$

Definicije (9.149), (9.151) in (9.159) dajo pri različnih prevajalnih funkcijah v splošnem različne vrednosti za faktor kakovosti. Če ima resonanca visoko kakovost, so te tri vrednosti skoraj enake. Pri prevajalni funkciji (9.152) so vse tri vrednosti enake ne glede na faktor kakovosti.

## 9.6 Bodejev diagram ojačenja moči

V poglavju 2.2.5 smo izpeljali, da je ojačenje moči sorazmerno s kvadratom ojačenja napetosti (enačba (2.69)). Če se ojačenje napetosti poveča 10-krat, se ojačenje moči poveča 100-krat. 20dB večje napetostno ojačenja ustreza 100-kratniku ojačenja moči. Da bi decibeli ojačenja moči odražali enako ojačenje, kot decibeli napetostnega in tokovnega ojačenja, pretvarjamo ojačenje moči v decibele po naslednji formuli

$$A_P[\text{dB}] = 10 \log_{10} |A_P|. \quad (9.160)$$

Na opisan način pretvarjamo v decibele tudi koristno ojačenje moči  $G_T$  in razpoložljivo ojačenje moči  $G_A$  ter vse ostale veličine, ki imajo pomen ojačenja moči (razmerja moči). Tudi mera aktivnost  $U$  (poglavje 2.3.2) ima naravo ojačenja moči [20]. Ker je ojačenje moči pozitivno realno število, rišemo le amplitudni del Bodejevega diagrama ojačenja moči.

V elektroniki včasih uporabljamo enoto dBm ali tudi dBmW. Moč 0dBm ustreza 1mW, moč 20dBm pa 100mW. Tako podajanje moči je primerno, če se ta giblje v zelo širokem območju (naprimer od pW do W). Moč v dBm-ih ( $P[\text{dBm}]$ ) pretvorimo v moč izraženo z Watti ( $P$ ) po formuli

$$P = 10^{\frac{P[\text{dBm}]}{10}} \cdot 1\text{mW}. \quad (9.161)$$



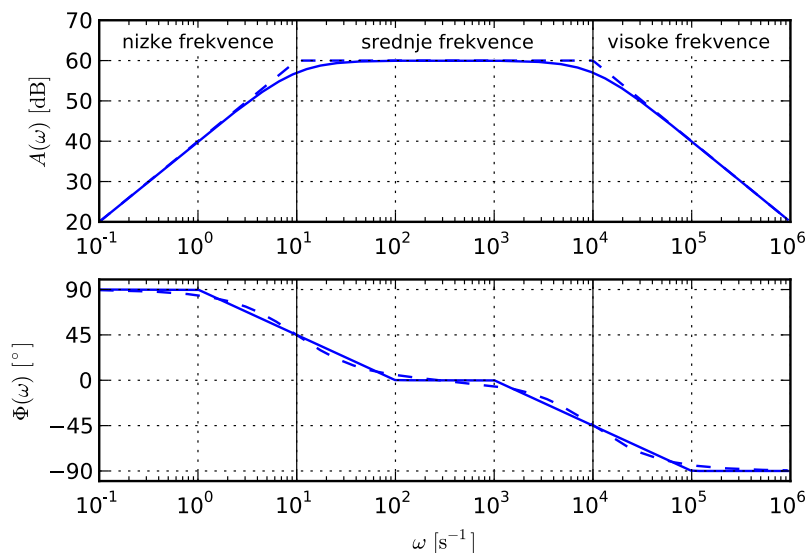
# 10

## Spodnja in zgornja meja srednjefrekvenčnega območja

V poglavju 9 smo spoznali osnovna orodja za opisovanje frekvenčne odvisnosti linearnih vezij. Sedaj bomo ta orodja uporabili za določanje spodnjih in zgornjih frekvenčnih mej linearnih vezij, znotraj katerih veljajo lastnosti, ki smo jih spoznali v poglavju 8. Vzemimo prevajalno funkcijo, ki naj bo podana v prostoru kompleksne frekvence.

$$H(s) = \frac{A_0 \omega_2 s}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)}. \quad (10.1)$$

Velja naj  $\omega_1 < \omega_2$ . Potek amplitudnega dela prevajalne funkcije  $H(j\omega)$  pri nizkih frekvencah narašča s strmimo 20dB/dek, nakar se pri frekvenci  $\omega_1$  izravna na višini  $|H(s)| = A_0$  (oziroma  $20 \log_{10} |A_0|$  v decibelih), od frekvence  $\omega_2$  naprej pa upada s strmino  $-20$ dB/dek. Slika 10.1 prikazuje potek prevajalne funkcije za  $\omega_1 = 10\text{s}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 10^4\text{s}^{-1}$  in  $A_0 = 1000$ .



Slika 10.1: Potek amplitude  $A(\omega)$  in faze  $\Phi(\omega)$  prevajalne funkcije (10.1) pri  $s = j\omega$  za  $\omega_1 = 10\text{s}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 10^4\text{s}^{-1}$  in  $A_0 = 1000$ . Asimptotičen potek je narisan s črtkano črto.

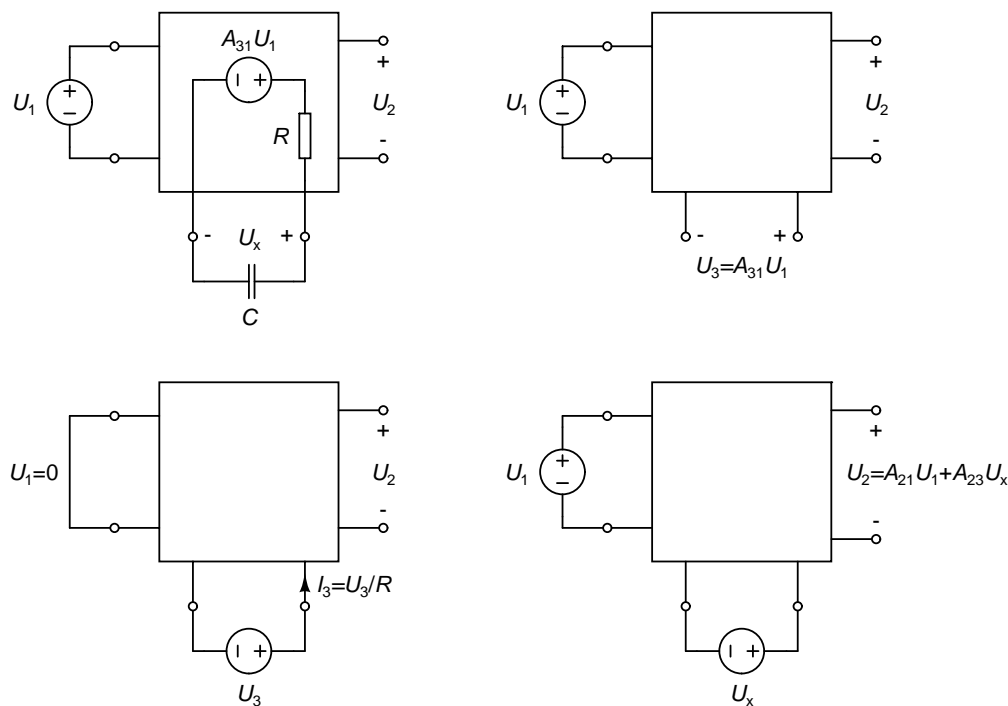
Frekvenci  $\omega_1 = 2\pi f_L$  in  $\omega_2 = 2\pi f_H$  sta pripadajoči krožni frekvenci polov prevajalne funkcije. Med njima leži **srednjefrekvenčno območje**, ki smo ga podrobneje opisali v poglavju 8. Levo od  $\omega_1$  je **nizkofrekvenčno**

**območje**, kjer vezni in premostitveni kondenzatorji ne predstavljajo kratkih stikov in zato omejujejo ojačenje vezja. Desno od  $\omega_2$  leži **visokofrekvenčno območje**, kjer na lastnosti vezja pričnejo vplivati kapacitivnosti in induktivnosti tranzistorjev. Zaradi njih se ojačevalni učinki tranzistorjev manjšajo z rastočo frekvenco.

Frekvenco  $f_L = \omega_1/(2\pi)$  imenujemo **spodnja frekvenčna meja**, frekvenco  $f_H = \omega_2/(2\pi)$  pa **zgornja frekvenčna meja**. Seveda niso poteki vseh prevajalnih funkcij vseh vezij oblike (10.1). Včasih je spodnja frekvenčna meja pri  $\omega_1 = 0$ , kar pomeni, da je vezje enosmerno sklopljeno. Lahko imamo tudi  $\omega_2 \rightarrow \infty$ , čeprav je v realnih vezjih to težko izvedljivo. Prevajalne funkcije vezij se lahko razlikujejo od (10.1) tudi po številu polov in ničel. Obe meji srednjefrekvenčnega območja (če je  $\omega_1 > 0$  oziroma  $\omega_2 < \infty$ ) sta določeni vsaka s svojim polom. Polu pri  $\omega_2$  pravimo tudi **dominantni pol prevajalne funkcije** in določa zgornjo frekvenčno mejo. Podoben pomen za spodnjo frekvenčno mejo ima pol pri  $\omega_1$ .

## 10.1 Reaktivni elementi in poli prevajalnih funkcij

Vidimo, da za določitev spodnje in zgornje frekvenčne meje potrebujemo pole prevajalne funkcije. V splošnem je postopek precej zapleten, sploh če ima vezje veliko reaktivnih elementov. Če so poli dovolj oddaljeni eden od drugega, da na prevajalno funkcijo v okolici izbrane frekvenci bistveno vpliva le en od polov, lahko postopek poenostavimo.



Slika 10.2: K izpeljavi pola, ki ga vnese kondenzator v prevajalno funkcijo.

Recimo, da imamo vezje, ki vsebuje en sam reaktiven element - kondenzator. Ta v nekatere prevajalne funkcije vezja vnese pol, ki ga bomo sedaj določili. Ogleдали si bomo izpeljavo za primer napetostnega ojačenja, na enak način pa bi potekala tudi za ostale vrste prevajalnih funkcij vezja. Vezje naj ima tri vhode. Na prvem vhodu imamo vzbujanje z napetostnim virom  $U_1$ , na drugem, ki ni obremenjen, opazujemo izhodno napetost  $U_2$ , na tretjem pa je priključena kondenzator  $C$  z napetostjo  $U_x$  (slika 10.2, levo zgoraj). Zanima nas pol, ki ga kondenzator vnese v prevajalno funkcijo  $U_2/U_1$ .

Tretji vhod lahko modeliramo s Théveninovim nadomestnim vezjem, ki ga tvorita napetostni vir  $A_{31}U_1$  in upor  $R$ .

Ojačenje  $A_{31}$  določimo tako, da na tretjem vhodu pustimo odprte sponke in pomerimo  $U_3$  in  $U_1$  (slika 10.2, desno zgoraj). Velja  $A_{31} = U_3/U_1$ . Pri določanju  $R$  kratko sklenemo vhod 1, pomerimo tok  $I_3$ , ki ga povzroči vzbujanje  $U_3$  na tretjem vhodu in izračunamo  $R$  kot  $U_3/I_3$  (slika 10.2, levo spodaj). Upornost  $R$  je pravzaprav vhodna upornost v tretji vhod pri kratko sklenjenem prvem vhodu in odprtih sponkah na drugem vhodu. Kondenzator  $C$  „čuti“ to upornost kot svoje breme.

Razmere v vezju se ne spremenijo, če kondenzator  $C$  nadomestimo z neodvisnim napetostnim virom z vrednostjo  $U_x$  (slika 10.2, desno spodaj). Dobljeno linearno vezje vzbujata napetosti  $U_1$  in  $U_x$ . Napetost  $U_2$  lahko zapišemo kot

$$U_2 = A_{21}U_1 + A_{23}U_x. \quad (10.2)$$

Pri tem sta  $A_{21}$  in  $A_{23}$  realna, saj vezje ne vsebuje reaktivnih elementov. Enako velja tudi za  $A_{31}$ . Na osnovi prvega vezja (slika 10.2, levo zgoraj) lahko zapišemo

$$U_x = A_{31}U_1 \frac{(j\omega C)^{-1}}{R + (j\omega C)^{-1}} = \frac{A_{31}U_1}{1 + j\omega RC}. \quad (10.3)$$

Vstavimo (10.3) v (10.2) in dobimo

$$U_2 = A_{21}U_1 + A_{23} \frac{A_{31}U_1}{1 + j\omega RC} = \frac{A_{21} + A_{23}A_{31} + A_{21}j\omega RC}{1 + j\omega RC} U_1. \quad (10.4)$$

Prevajalna funkcija  $U_2/U_1$  se glasi

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{A_{21} + A_{23}A_{31} + A_{21}j\omega RC}{1 + j\omega RC} \quad (10.5)$$

in ima pol pri

$$p = -\frac{1}{RC}. \quad (10.6)$$

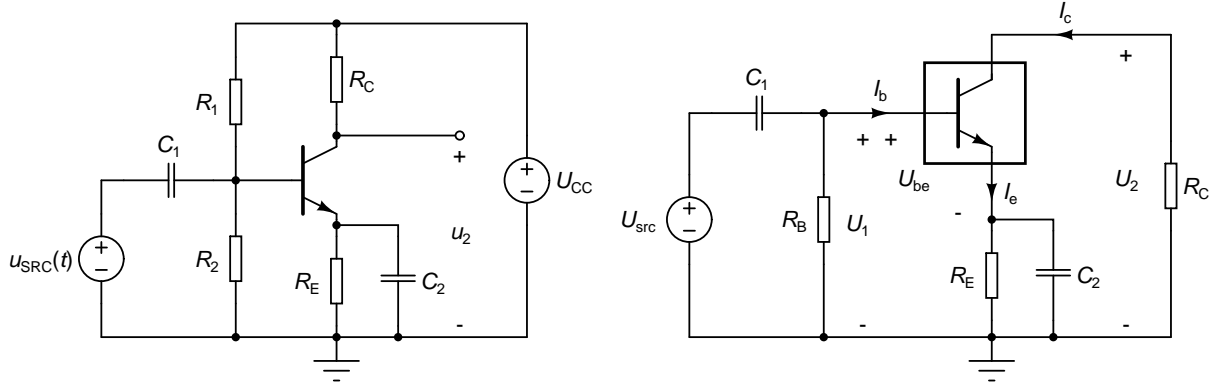
Kondenzator  $C$  vnaša v linearno vezje pol  $p = -1/(RC)$ , kjer je  $R$  upornost, ki jo čuti  $C$  na svojih sponkah. Pravimo, da pripadajoč pol kondenzatorja  $C$  leži pri frekvenci  $f = 1/(2\pi RC)$ . Za frekvence  $\omega \ll (RC)^{-1}$  se kondenzator obnaša kot odprte sponke, za frekvence  $\omega \gg (RC)^{-1}$  pa kot kratek stik.

Dobljeni rezultat velja natančno le, če je  $C$  edini kondenzator v vezju. Če to ne drži, lahko ostali kondenzatorji vplivajo na lego pola  $p$ . Medsebojni vpliv ni zmeraj prisoten, če pa je, je sorazmeren z bližino pripadajočih polov ostalih kondenzatorjev. V vezju z večimi kondenzatorji ocenimo lego pola, ki ga vnaša izbran kondenzator tako, da vse ostale kondenzatorje nadomestimo bodisi z odprtimi sponkami (če je njihov pripadajoč pol pri višji frekvenci, kot pol, ki ga vnaša izbran kondenzator), bodisi s kratkimi stiki (če je njihov pripadajoč pol pri nižji frekvenci, kot pol, ki ga vnaša izbran kondenzator).

Na podoben način bi lahko izpeljali pol, ki ga vnaša tuljava v vezje. Velja

$$p = -\frac{R}{L}. \quad (10.7)$$

Seveda pa opisani pristop ne deluje zmeraj. Tako naprimer odpove za vezja, kjer kondenzatorji in tuljave tvorijo resonančna vezja.



Slika 10.3: Ojačevalnik z bipolarnim tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem (levo) in model za majhne signale, ki vključuje tudi vezni in premostitveni kondenzator (desno).

**Primer 10.1:** Določimo pole prevajalne funkcije  $U_2/U_s$  ojačevalnika na sliki 10.3 (levo) in njeno spodnjo frekvenčno mejo. Elementi vezja so  $R_C = 5\text{k}\Omega$ ,  $R_E = 1\text{k}\Omega$ ,  $R_B = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 10\text{k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 10\mu\text{F}$ . Admitančni parametri orientacije s skupnim emitorjem so v delovni točki vezja enaki  $g_{11} = 0.1\text{mS}$ ,  $g_{21} = 40\text{mS}$  in  $g_{22} = 0$  (zanemarljiv v primerjavi z  $g_{11}$  in  $g_{21}$ ).

Ker je  $g_{22} = 0$ , velja

$$I_c = g_{21}U_{be} = \frac{g_{21}}{g_{11}}I_b, \quad (10.8)$$

$$I_e = I_b + I_c = (g_{11} + g_{21})U_{be} = \left(1 + \frac{g_{21}}{g_{11}}\right)I_b. \quad (10.9)$$

Napetost  $U_1$  dobimo kot vsoto  $U_{be}$  in padca napetosti na vzporedni vezavi  $R_E$  in  $C_2$ .

$$U_1 = U_{be} + \frac{I_e}{R_E^{-1} + sC_2} = U_{be} \left(1 + \frac{g_{11} + g_{21}}{R_E^{-1} + sC_2}\right). \quad (10.10)$$

Napetost  $U_s$  je enaka vsoti  $U_1$  in padca napetosti na  $C_1$ .

$$\begin{aligned} U_s &= U_1 + \frac{I_b + \frac{U_1}{R_B}}{sC_1} = U_1 \left(1 + \frac{1}{sC_1 R_B}\right) + \frac{g_{11}}{sC_1} U_{be} \\ &= \frac{U_{be}}{sC_1 R_B} \left( \frac{(1 + sC_1 R_B)(R_E^{-1} + g_{11} + g_{21} + sC_2)}{R_E^{-1} + sC_2} + g_{11} R_B \right). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Na drugi strani lahko izrazimo  $U_2$  z  $U_{be}$  kot

$$U_2 = -I_c R_C = -g_{21} R_C U_{be}. \quad (10.12)$$

Sledi prevajalna funkcija  $U_2/U_s$

$$\frac{U_2}{U_s} = - \frac{g_{21} R_C s C_1 R_B (R_E^{-1} + s C_2)}{(1 + s C_1 R_B)(R_E^{-1} + g_{11} + g_{21} + s C_2) + g_{11} R_B (R_E^{-1} + s C_2)} \quad (10.13)$$

Pole dobimo, če poiščemo ničle imenovalca izraza (10.13).

$$(1 + s C_1 R_B)(R_E^{-1} + g_{11} + g_{21} + s C_2) + g_{11} R_B (R_E^{-1} + s C_2) = 0. \quad (10.14)$$

Enačbo (10.14) delimo s  $C_1 C_2 R_B$  in preuredimo

$$s^2 + \underbrace{\left( \frac{R_B^{-1} + g_{11}}{C_1} + \frac{R_E^{-1} + g_{11} + g_{21}}{C_2} \right)}_b s + \underbrace{\frac{1 + (g_{11} + g_{21})R_E + g_{11}R_B}{C_1 C_2 R_B R_E}}_c = 0. \quad (10.15)$$

Koeficienta  $b$  in  $c$  sta enaka

$$b = 4130\text{s}^{-1}, \quad (10.16)$$

$$c = 42100\text{s}^{-2}. \quad (10.17)$$

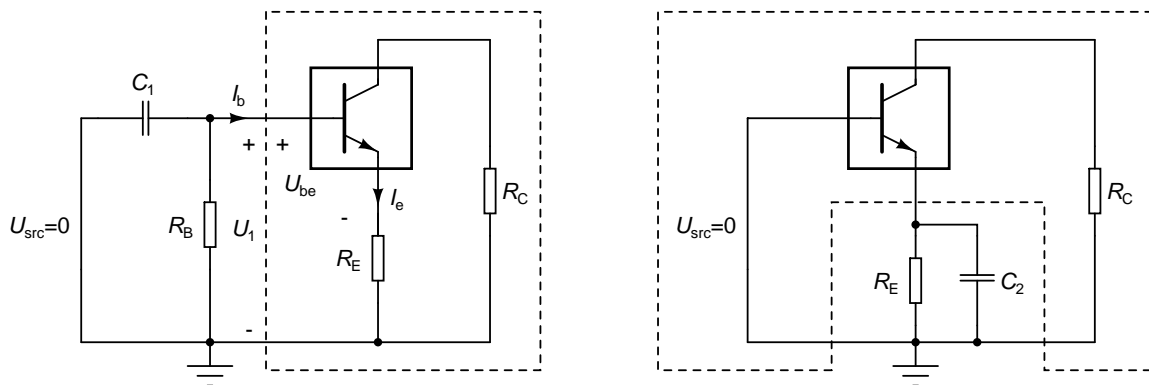
Oba pola dobimo z reševanjem kvadratne enačbe (10.15)

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \right). \quad (10.18)$$

Pola ležita na levi strani imaginarne osi. Pripadajoči frekvenci sta

$$f_1 = -\frac{p_1}{2\pi} = 1,626\text{Hz}, \quad (10.19)$$

$$f_2 = -\frac{p_2}{2\pi} = 656\text{Hz}. \quad (10.20)$$



Slika 10.4: Določanje upornosti, ki ju na svojih sponkah čutita kondenzatorja  $C_1$  (levo) in  $C_2$  (desno). Na levi sliki smo predpostavili, da  $C_2$  predstavlja odprte sponke, na desni pa, da  $C_1$  predstavlja kratek stik.

Pola sta precej razmahnjena, zato sklepamo, da ju lahko določimo neodvisno s pomočjo enačbe (10.6). Predpostavimo tudi, da pol, ki ga povzroči  $C_2$  nastopi pri višji frekvenci, kot pol, ki ga povzroči  $C_1$ . Zaradi tega pri določanju pola, ki ga vnese  $C_1$ , predpostavimo, da  $C_2$  predstavlja odprte sponke. Napetost med bazo tranzistorja in referenčno sponko znaša  $U_1 = U_{be} + R_E I_e$ . Upornost upora, s katerim lahko nadomestimo celotno vezje desno od baze tranzistorja na sliki 10.3 (desno), znaša

$$R_{inB} = \frac{U_{be} + R_E I_e}{I_b} = \frac{U_{be} + R_E (g_{21} + g_{11}) U_{be}}{g_{11} U_{be}} = g_{11}^{-1} + R_E \left( 1 + \frac{g_{21}}{g_{11}} \right). \quad (10.21)$$

Upornost  $R_{inB}$  pripada dvopolu, ki je na sliki 10.4 (levo) obdan s črtkano črto. Če izklopimo signalni vir  $U_s$  (ga nadomestimo s kratkim stikom), čuti kondenzator  $C_1$  na svojih sponkah vzporedno vezavo  $R_B$  in  $R_{inB}$ .

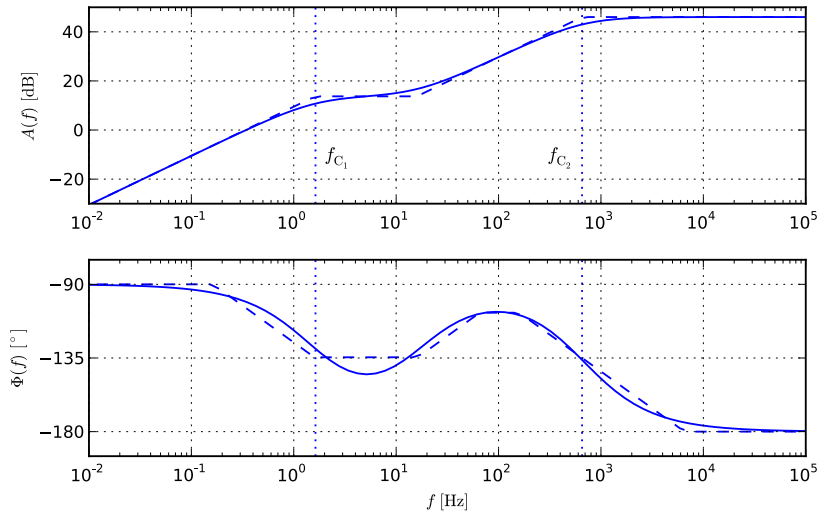
$$R_{C1} = \frac{R_{inB} R_B}{R_{inB} + R_B} = \frac{R_B (1 + R_E (g_{11} + g_{21}))}{1 + R_B g_{11} + R_E (g_{11} + g_{21})}. \quad (10.22)$$

$C_1$  prispeva pol

$$p_{C_1} = -\frac{1}{R_{C_1}C_1} = -\frac{1 + R_B g_{11} + R_E(g_{11} + g_{21})}{R_B C_1(1 + R_E(g_{11} + g_{21}))}, \quad (10.23)$$

ki ustreza frekvenci

$$f_{C_1} = \frac{1 + R_B g_{11} + R_E(g_{11} + g_{21})}{2\pi R_B C_1(1 + R_E(g_{11} + g_{21}))} = 1,630\text{Hz}. \quad (10.24)$$



Slika 10.5: Bodejev diagram prevajalne funkcije (10.13). Asimptotičen potek je narisana s črtkano črto.

Vidimo, da se rezultat zelo dobro ujema z natančno lego pola  $p_1$ . Enak rezultat bi dobili tudi, če bi v enačbo (10.14) vstavili  $sC_2 = 0$  ( $C_2$  predstavlja odprte sponke pri frekvenci pola  $p_{C_1}$ ). Kondenzator  $C_2$  povzroči pol  $p_{C_2}$ , ki leži pri višji frekvenci, kot pol  $p_{C_1}$ . Zaradi tega pri določanju  $p_{C_2}$  obravnavamo  $C_1$  kot kratek stik. Potrebujemo upornost  $R_{inE}$  s katero lahko nadomestimo celotno vezje okrog  $C_2$  in  $R_E$  na sliki 10.3 (desno). Ker moramo pri določanju te upornosti izklopiti signalni vir  $U_s$ , izhajamo iz vezja na sliki 10.4 (desno), na kateri dvopol z upornostjo  $R_{inE}$  obdaja črtkana črta. Vidimo, da je  $R_{inE}$  pravzaprav vhodna upornost orientacije s skupno bazo ( $Y_{inB}^{-1}$ ), ki jo podaja izraz (8.36). Ta se zaradi  $g_{22} = 0$  poenostavi v

$$R_{inE} = Y_{inB}^{-1} = \frac{1}{g_{11} + g_{21}}. \quad (10.25)$$

Kondenzator  $C_2$  čuti na svojih sponkah vzporedno vezana upora  $R_E$  in  $R_{inE}$ .

$$R_{C_2} = \frac{R_{inE}R_E}{R_{inE} + R_E} = \frac{R_E}{1 + R_E(g_{11} + g_{21})}. \quad (10.26)$$

Od tod sledita pol, ki ga prispeva  $C_2$

$$p_{C_2} = -\frac{1}{R_{C_2}C_2} = -\frac{1 + R_E(g_{11} + g_{21})}{R_E C_2}, \quad (10.27)$$

in pripadajoča frekvenca

$$f_{C_2} = \frac{1 + R_E(g_{11} + g_{21})}{2\pi R_E C_2} = 654\text{Hz} \quad (10.28)$$

Tudi ta rezultat se dobro ujema s frekvenco  $f_2$ . Enak rezultat bi dobili, če bi v enačbo (10.15) vstavili  $C_1 \rightarrow \infty$ , kar ustreza kratkemu stiku namesto  $C_1$ . Iz dobljenih frekvenc  $f_{C_1}$  in  $f_{C_2}$  vidimo, da je bila naša začetna predpostavka  $f_{C_1} < f_{C_2}$  pravilna. Potek prevajalne funkcije vezja je na sliki 10.5.

Če bi izračun frekvenc  $f_{C_1}$  in  $f_{C_2}$  začeli z napačno predpostavko  $f_{C_1} > f_{C_2}$ , bi dobili napačni vrednosti za obe frekvenci. Na žalost se dobljeni napačni frekvenci pogosto skladata z začetno predpostavko. Če ne poznamo vrstnega reda pripadajočih frekvenc polov, le teh ne moremo določiti z opisanim hitrim postopkom. Edin zanesljiv način določanja polov je izpeljava prevajalne funkcije in reševanje enačbe, ki jo dobimo, če zahtevamo, da je imenovalec prevajalne funkcije enak 0.  $\triangle$

## 10.2 Določanje spodnje frekvenčne meje

Spodnjo frekvenčno mejo določajo poli, ki jih v vezje vnesejo vezni in premotitveni kondenzatorji. V srednjefrekvenčnem območju ti kondenzatorji predstavljajo kratek stik. Na spodnji frekvenčni meji se eden od njih preneha obnašati kot kratek stik. Pol, ki ga ta kondenzator vnaša, določa spodnjo frekvenčno mejo vezja. Pri tej frekvenci ojačenje upade na  $1/\sqrt{2}$  vrednosti v srednjefrekvenčnem območju (oziroma za 3dB).

Označimo vezne in premostitvene kondenzatorje s  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Ko se nahajamo v srednjefrekvenčnem območju, vse ti kondenzatorji predstavljajo kratek stik za izmenične signale. Na svojih sponkah čutijo upornosti, ki jih označimo z  $R_{C_1}, R_{C_2}, \dots, R_{C_n}$ . Ko nižamo frekvenco, eden od teh kondenzatorjev, ki ga označimo s  $C_k$ , prvi preide iz stanja kratkega stika v stanje odprtih sponk. Prehod se zgodi postopoma.  $C_k$  je na pol poti od kratkega stika proti odprtim sponkam pri frekvenci

$$f_{C_k} = \frac{1}{2\pi R_{C_k} C_k}, \quad (10.29)$$

ki je hkrati tudi pripadajoča frekvenca pola, ki ga v prevajalne funkcije vezja vnaša kondenzator  $C_k$ . Spodnja frekvenčna meja vezja nastopi pri najvišji od frekvenc  $f_{C_1}, f_{C_2}, \dots, f_{C_n}$ , ki povedo kdaj so posamezni kondenzatorji na pol poti od kratkega stika proti odprtim sponkam ob predpostavki, da se nahajamo v srednjefrekvenčnem področju. Velja

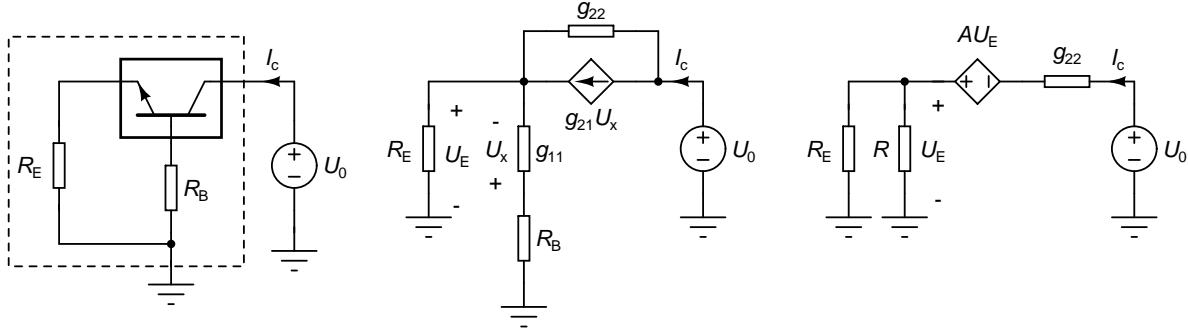
$$f_L = \max_{1 \leq i \leq n} f_{C_i} = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{2\pi R_{C_i} C_i}. \quad (10.30)$$

Opozoriti velja, da frekvence  $f_{C_i}$  v splošnem ne predstavljajo polov, ki jih vnašajo kondenzatorji  $C_i, i \neq k$ , saj se upornosti  $R_{C_i}, i \neq k$  v večini primerov spremenijo, čim  $C_k$  preide v stanje odprtih sponk. Pri določanju upornosti  $R_{C_i}$ , ki jo potrebujemo za določitev frekvence  $f_{C_i}$ , upoštevamo, da kondenzatorji  $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, C_{i+1}, \dots, C_n$  predstavljajo kratke stike za izmenične signale.

### 10.2.1 Vhodna upornost tranzistorja

Vhodne upornosti v sponke tranzistorja bomo potrebovali pri določanju upornosti  $R_{C_i}$ , ki jih posamezne kondenzatorji čutijo na svojih sponkah. Če dve od treh sponk lineariziranega modela tranzistorja z upori vežemo na referenčno vozlišče, nastane med tretjo sponko tranzistorja in referenčnim vozliščem dvopol. Upornost tega dvopola je vhodna upornost v tretjo sponko zaključenega tranzistorja. S tako dobljeno upornostjo lahko v celoti nadomestimo tranzistor, ko računamo pol, ki ga vnese vezni ali premostitveni kondenzator.

Poglejmo si najprej **vhodno upornost v kolektorsko sponko**. Tranzistor je na strani baze zaključen z uporom  $R_B$ , na strani emitorja pa z uporom  $R_E$ . Za potrebe izpeljave bomo kolektorsko sponko vzbujali z napetostnim virom  $U_0$ , ki bo pognal tok  $I_C$ . Vezje je prikazano na sliki 10.6 (levo). Kvocient  $U_0/I_C$  je vhodna upornost v kolektorsko sponko tranzistorja ( $R_{inC}$ ).



Slika 10.6: Določanje  $R_{inC} = U_0/I_c$ . Model vezja za majhne signale (levo) in nadomestno vezje (na sredini). Pretvorba  $g_{22}$  in  $g_{21}U_x$  v Théveninovo nadomestno vezje ter združitev  $g_{11}$  in  $R_B$  v  $R$  (desno).

Najprej nadomestimo vzporedno vezavo  $g_{22}$  in  $g_{21}U_x$  s Théveninovim nadomestnim vezjem. Pri tem se napetostno krmiljen tokovni vir  $g_{21}U_x$  spremeni v napetostno krmiljen napetostni vir  $(g_{21}/g_{22})U_x$ . Napetost  $U_x$  lahko izrazimo z napetostjo  $U_E$  (slika 10.6, na sredini) kot

$$U_x = -\frac{g_{11}^{-1}}{g_{11}^{-1} + R_B} U_E = -\frac{1}{1 + g_{11}R_B} U_E. \quad (10.31)$$

Napetostno krmiljen napetostni vir lahko z upoštevanjem (10.31) preoblikujemo v

$$\frac{g_{21}}{g_{22}} U_x = -\frac{g_{21}}{g_{22}(1 + g_{11}R_B)} U_E = AU_E. \quad (10.32)$$

Sedaj lahko združimo  $g_{11}$  in  $R_B$  v upor  $R = g_{11}^{-1} + R_B$  in dobimo vezje (slika 10.6, desno), v katerem zapišemo vsoto napetosti v zanki.

$$U_E - AU_E + \frac{I_c}{g_{22}} = U_0. \quad (10.33)$$

Ob upoštevanju  $U_E = I_c/(R_E^{-1} + R^{-1})$  dobimo

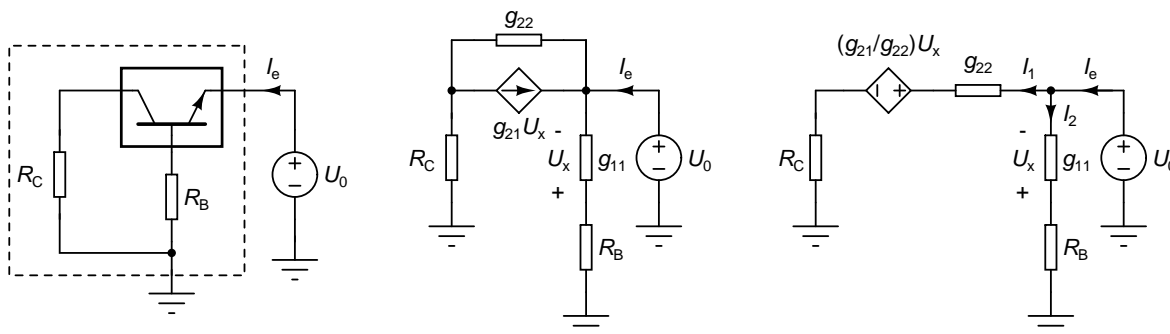
$$\frac{1 - A}{R_E^{-1} + R^{-1}} + \frac{1}{g_{22}} = \frac{U_0}{I_c} = R_{inC}. \quad (10.34)$$

Če vstavimo še  $A = -g_{21}/(g_{22}(1 + g_{11}R_B))$  (enačba (10.32)) in  $R = g_{11}^{-1} + R_B$ , dobimo

$$\begin{aligned} R_{inC} &= \left(1 + \frac{g_{21}}{g_{22}(1 + g_{11}R_B)}\right) \cdot \left(\frac{1}{R_E} + \frac{1}{g_{11}^{-1} + R_B}\right)^{-1} + \frac{1}{g_{22}} \\ &= \frac{g_{22}(1 + g_{11}R_B) + g_{21}}{g_{22}(1 + g_{11}R_B)} \cdot \frac{R_E(1 + g_{11}R_B)}{1 + g_{11}(R_B + R_E)} + \frac{1}{g_{22}} \\ &= g_{22}^{-1} \left(1 + \frac{g_{22}R_E(1 + g_{11}R_B) + g_{21}R_E}{1 + g_{11}(R_B + R_E)}\right). \end{aligned} \quad (10.35)$$

Vidimo, da vhodna upornost v kolektorsko sponko ni nikoli manjša od  $g_{22}^{-1}$ . Pri določanju **vhodne upornosti v emitorsko sponko** izhajamo iz vezja na sliki 10.7 (levo), v katerem model tranzistorja za majhne signale





Slika 10.7: Določanje  $R_{inE} = U_0/I_e$ . Model vezja za majhne signale (levo) in nadomestno vezje (na sredini). Pretvorba  $g_{22}$  in  $g_{21}U_x$  v Théveninovo nadomestno vezje (desno).

predstavimo z elementi (slika 10.7, na sredini), nakar vzporedno vezana  $g_{22}$  in  $g_{21}U_x$  pretvorimo v Théveninovo nadomestno vezje (slika 10.7, desno).

Za napetost  $U_x$  velja

$$U_x = -\frac{g_{11}^{-1}}{g_{11}^{-1} + R_B} U_0 = -\frac{1}{1 + g_{11}R_B} U_0. \quad (10.36)$$

Tokova  $I_1$  in  $I_2$  lahko izrazimo kot

$$I_1 = \frac{U_0 - \frac{g_{21}U_x}{g_{22}}}{R_C + g_{22}^{-1}}, \quad (10.37)$$

$$I_2 = \frac{U_0}{R_B + g_{11}^{-1}} = \frac{g_{11}U_0}{1 + g_{11}R_B}. \quad (10.38)$$

Ker je  $I_e = I_1 + I_2$ , velja

$$I_e = \left( \frac{1 + \frac{g_{21}}{g_{22}(1 + g_{11}R_B)}}{R_C + g_{22}^{-1}} + \frac{g_{11}}{1 + g_{11}R_B} \right) U_0 = \left( \frac{g_{22}(1 + g_{11}R_B) + g_{21}}{(1 + g_{11}R_B)(1 + g_{22}R_C)} + \frac{g_{11}}{1 + g_{11}R_B} \right) U_0. \quad (10.39)$$

Sledi

$$R_{inE} = \frac{U_0}{I_e} = \frac{(1 + g_{11}R_B)(1 + g_{22}R_C)}{g_{11}(1 + g_{22}R_C) + g_{22}(1 + g_{11}R_B) + g_{21}}. \quad (10.40)$$

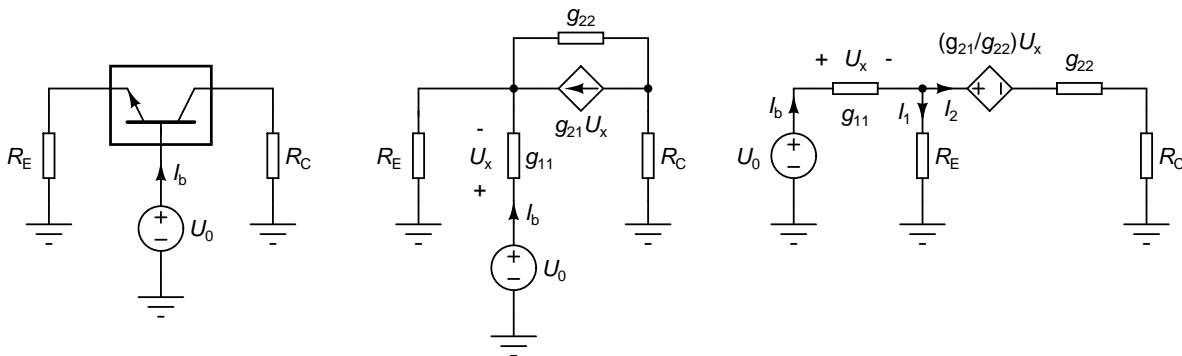
Tudi določanje **vhodne upornosti v bazno sponko** poteka na podoben način (slika 10.8). Velja

$$I_1 = \frac{U_0 - U_x}{R_E}, \quad (10.41)$$

$$I_2 = \frac{U_0 - U_x - \frac{g_{21}U_x}{g_{22}}}{g_{22}^{-1} + R_C}. \quad (10.42)$$

Iz  $I_b = g_{11}U_x = I_1 + I_2$  dobimo enačbo za  $U_x$ .

$$g_{11}U_x = \frac{U_0 - U_x}{R_E} + \frac{g_{22}U_0 - (g_{21} + g_{22})U_x}{1 + g_{22}R_C}. \quad (10.43)$$



Slika 10.8: Določanje  $R_{inB} = U_0/I_b$ . Model vezja za majhne signale (levo) in nadomestno vezje (na sredini). Pretvorba  $g_{22}$  in  $g_{21}U_x$  v Théveninovo nadomestno vezje (desno).

Enačbo preoblikujemo in izrazimo  $U_x$ .

$$U_x \left( g_{11} + \frac{1}{R_E} + \frac{g_{21} + g_{22}}{1 + g_{22}R_C} \right) = \left( \frac{1}{R_E} + \frac{g_{22}}{1 + g_{22}R_C} \right), \quad (10.44)$$

$$U_x = \frac{1 + g_{22}(R_E + R_C)}{(1 + g_{11}R_E)(1 + g_{22}R_C) + (g_{21} + g_{22})R_E} U_0. \quad (10.45)$$

Ker velja  $R_{inB} = U_0/I_b = U_0/(g_{11}U_x) = g_{11}^{-1}U_0/U_x$ , sledi

$$R_{inB} = g_{11}^{-1} \frac{(1 + g_{11}R_E)(1 + g_{22}R_C) + (g_{21} + g_{22})R_E}{1 + g_{22}(R_E + R_C)}. \quad (10.46)$$

Ker je zaradi  $g_{21} > g_{22}$  števec ulomka v (10.46) večji od imenovalca, je vhodna upornost v bazno sponko zmeraj večja od  $g_{11}^{-1}$ .

## 10.2.2 Orientacija s skupnim emitorjem (izvorom)

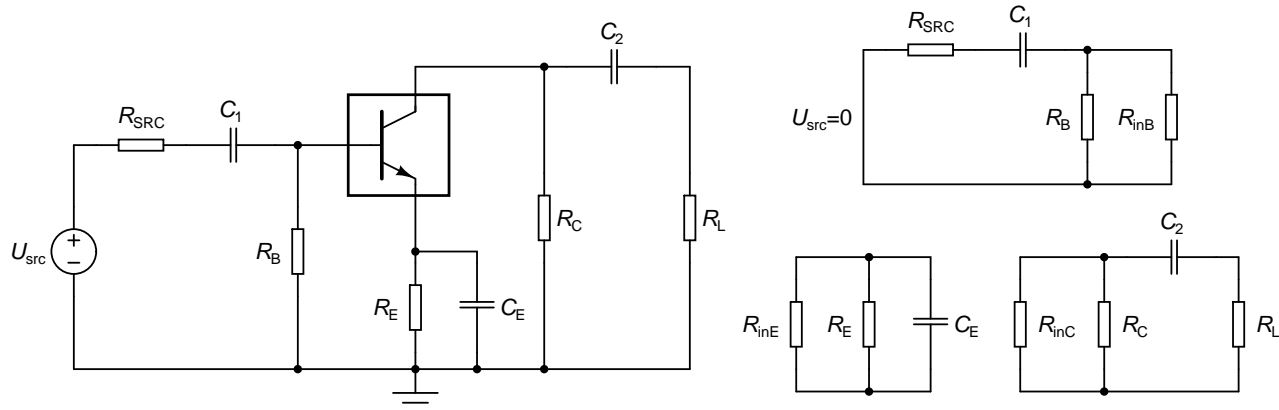
Srednjefrekvenčne lastnosti ojačevalnika s tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem (slika 8.1) smo spoznali že v poglavju 8. Če v modelu vezja za majhne signale ne nadomestimo veznih in premostitvenih kondenzatorjev s kratkimi stiki, dobimo vezje na sliki 10.9 (levo). Upor  $R_B$  nadomešča vzporedno vezavo  $R_1$  in  $R_2$ . V modelu vezja za majhne signale so trije kondenzatorji, ki lahko vplivajo na spodnjo frekvenčno mejo ojačevalnika. Kondenzatorji na svojih sponkah čutijo uporovna vezja, ki so podana na sliki 10.9 (desno). Določimo frekvence  $f_{C_i}$ , ki so osnova za določitev spodnje mejne frekvence vezja.

Če predpostavimo, da  $C_2$  in  $C_E$  predstavljata kratek stik, je vhodna upornost v bazno sponko enaka vhodni upornosti tranzistorja v orientaciji s skupnim emitorjem v srednjefrekvenčnem področju. Velja  $R_{inB} = g_{11}^{-1}$ . Iz vezja, ki ga na svojih sponkah čuti  $C_1$ , sledi

$$f_{C_1} = \frac{1}{2\pi C_1 \left( \frac{1}{R_B^{-1} + g_{11}} + R_{SRC} \right)}. \quad (10.47)$$

Podobno lahko ugotovimo, da je pri kratkem stiku namesto  $C_1$  in  $C_E$  vhodna upornost v kolektorsko sponko enaka  $g_{22}$ . Frekvenca  $f_{C_2}$  je tako enaka

$$f_{C_2} = \frac{1}{2\pi C_2 \left( \frac{1}{R_C^{-1} + g_{22}} + R_L \right)}. \quad (10.48)$$



Slika 10.9: Model za majhne signale ojačevalnika s tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem (levo) in uporabna vezja, ki jih na svojih sponkah čutijo kondenzatorji  $C_1$ ,  $C_2$  in  $C_E$  (desno).

Vhodno upornost v emitorsko sponko pri kratko sklenjenima  $C_1$  in  $C_2$  določimo z enačbo (10.40), kjer upornost  $R_C$  zamenjamo z upornostjo vzporedne vezave  $R_C$  in  $R_L$ , upornost  $R_B$  pa z upornostjo vzporedne vezave  $R_{SRC}$  in  $R_B$ . Dobimo

$$R_{inE} = \frac{\left(1 + \frac{g_{11}}{R_{SRC}^{-1} + R_B^{-1}}\right) \left(1 + \frac{g_{22}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}\right)}{g_{11} \left(1 + \frac{g_{22}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}\right) + g_{22} \left(1 + \frac{g_{11}}{R_{SRC}^{-1} + R_B^{-1}}\right) + g_{21}}. \quad (10.49)$$

Ker  $C_E$  na svojih sponkah čuti vzporedno vezavo  $R_E$  in  $R_{inE}$ , je  $f_{C_E}$  enaka

$$f_{C_E} = \frac{R_E^{-1} + R_{inE}^{-1}}{2\pi C_E}. \quad (10.50)$$

V nadaljevanju bomo predpostavili, da so vse tri kapacitivnosti enake. Na ta način bomo najlažje ugotovili, kateri kondenzator ponavadi določa spodnjo frekvenčno mejo. Vhodna upornost v emitorsko sponko je za vse orientacije tranzistorja najmanjša in reda velikosti  $g_{21}^{-1}$ . Upornost  $R_E$  je ponavadi precej večja, zaradi česar  $C_E$  čuti na svojih sponkah zgolj upornost  $g_{21}^{-1}$ , ki je reda velikosti nekaj  $10\Omega$  ali manj.

Vhodna upornost v bazno sponko, ki jo podaja (10.46) je večja od  $g_{11}^{-1}$ . Kondenzator tako na svojih sponkah čuti  $R_{SRC}$  zaporedno vezan z vzporedno vezavo  $R_B$  in  $R_{inB} \geq g_{11}^{-1}$ .  $R_B$  in  $R_{inB}$  sta skoraj zmeraj precej večja od  $g_{21}^{-1}$ . Velja

$$f_{C_1} < f_{C_E} \quad (10.51)$$

Vhodna upornost v kolektorsko sponko ( $R_{inC}$ ) je zaradi (10.35) ne glede na zaključitev najmanj  $g_{22}^{-1}$ . Ker ponavadi velja  $g_{22}^{-1} \gg R_C$ , je upornost vzporedne vezave  $R_C$  in  $R_{inC}$  približno enaka upornosti  $R_C$ . Tako kondenzator  $C_2$  na svojih sponkah čuti  $R_L$  zaporedno vezan z  $R_C$ . Obe upornosti pa sta precej večji od  $g_{21}^{-1}$ . Sledi  $f_{C_1} < f_{C_E}$ .

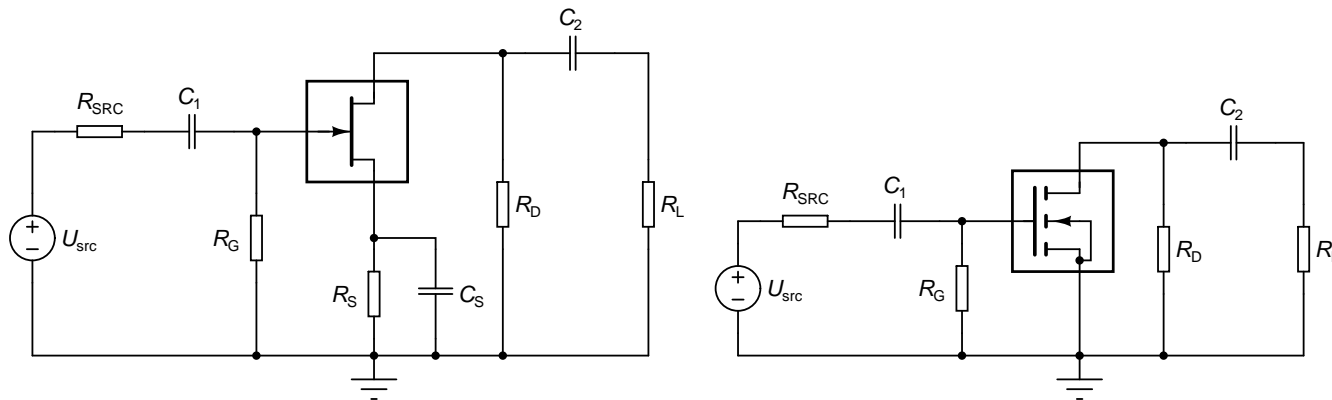
$$f_{C_2} < f_{C_E} \quad (10.52)$$

Na osnovi (10.51) in (10.52) lahko sklepamo, da v večini primerov spodnjo frekvenčno mejo določa kapacitivnost  $C_E$ .

**Primer 10.2:** Za ojačevalnik v orientaciji s skupnim emitorjem (slika 10.9, levo) določimo spodnjo frekvenčno mejo. Vrednosti elementov vezja so  $R_C = 5\text{k}\Omega$ ,  $R_B = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 10\text{k}\Omega$ ,  $R_E = 1\text{k}\Omega$ ,  $R_{\text{SRC}} = 100\Omega$ ,  $R_L = 1\text{k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = C_E = 10\mu\text{F}$ . Admitančni parametri tranzistorja za orientacijo s skupnim emitorjem znašajo  $g_{11} = 0,1\text{mS}$ ,  $g_{21} = 40\text{mS}$  in  $g_{22} = 20\mu\text{S}$ .

Ker so vse kapacitivnosti enake, je najverjetneje  $C_E$  tista, ki določa spodnjo frekvenčno mejo. S pomočjo enačb (10.49) in (10.50) dobimo  $R_{\text{inE}} = 25,6\Omega$  in  $f_{C_E} = 638\text{Hz}$ .

Za kapacitivnosti  $C_1$  in  $C_2$  iz enačb (10.47) in (10.48) dobimo  $f_{C_1} = 3,12\text{Hz}$  in  $f_{C_2} = 2,87\text{Hz}$ . Spodnja frekvenčna meja je torej določena s  $C_E$  in znaša  $f_L = 638\text{Hz}$ .  $\triangle$



Slika 10.10: Model za majhne signale ojačevalnika v orientaciji s skupnim izvorom z JFET tranzistorjem (levo) in MOSFET tranzistorjem z induciranim kanalom (desno).

Enačbe (10.47)-(10.50) lahko uporabimo tudi za ojačevalnik v orientaciji s skupnim izvorom, ki ga zgradimo s pomočjo JFET tranzistorja (slika 10.10, levo) ali MOSFET tranzistorja z vgrajenim kanalom. Preimenovali moramo  $R_C$ ,  $R_B$ ,  $R_E$ ,  $R_{\text{inE}}$ ,  $C_E$  in  $f_{C_E}$  v  $R_D$ ,  $R_G$  in  $R_S$ ,  $R_{\text{inS}}$ ,  $C_S$  in  $f_{C_S}$ . Upoštevamo še  $g_{11} = 0$  in dobimo

$$R_{\text{inS}} = \frac{1 + \frac{g_{22}}{R_D^{-1} + R_L^{-1}}}{g_{22} + g_{21}}, \quad (10.53)$$

$$f_{C_S} = \frac{R_S^{-1} + R_{\text{inS}}^{-1}}{2\pi C_S}, \quad (10.54)$$

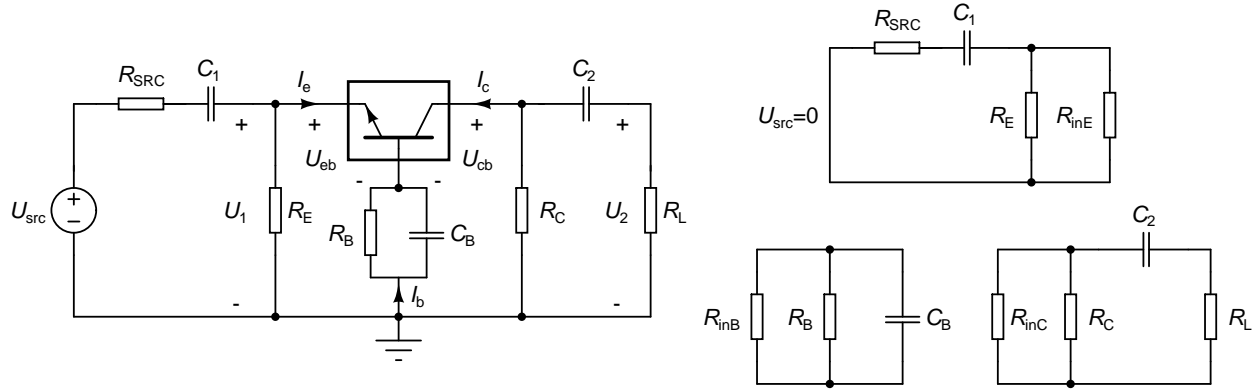
$$f_{C_1} = \frac{1}{2\pi C_1 (R_G + R_{\text{SRC}})}, \quad (10.55)$$

$$f_{C_2} = \frac{1}{2\pi C_2 \left( \frac{1}{R_D^{-1} + g_{22}} + R_L \right)}. \quad (10.56)$$

Ojačevalnik z MOSFET tranzistorjem z induciranim kanalom (slika 10.10, desno) nima upora  $R_S$ . Zato frekvenca  $f_{C_S}$  odpade, spodnjo frekvenčno mejo pa določata  $f_{C_1}$  in  $f_{C_2}$ .

### 10.2.3 Orientacija s skupno bazo (vrati)

Ojačevalnik s tranzistorjem v orientaciji s skupno bazo je podan na sliki 8.9, model vezja za majhne signale pa na sliki 10.11 (levo). Upor  $R_B$  nadomešča vzporedno vezavo  $R_1$  in  $R_2$ . Vhodna upornost v emitorsko sponko tranzistorja je sicer v večini primerov nizka, vendar pa tega ne moremo reči za  $R_{\text{SRC}}$ . Kondenzator, ki določa spodnjo frekvenčno mejo zato v večini primerov ni vnaprej znan. Kondenzatorji v vezju čutijo na svojih sponkah uporovna vezja, ki so podana na sliki 10.11 (desno).



Slika 10.11: Model za majhne signale ojačevalnika s tranzistorjem v orientaciji s skupno bazo (levo) in uporabna vezja, ki jih na svojih sponkah čutijo  $C_1$ ,  $C_2$  in  $C_B$  (desno).

Pri določanju vhodne upornosti v emitorsko sponko nadomestimo  $C_2$  in  $C_B$  s kratkim stikom. Vhodna upornost v emitorsko sponko je tedaj enaka kar obratni vrednosti vhodne admittance tranzistorja v orientaciji s skupno bazo v srednjefrekvenčnem območju (enačba (8.36)). Enak rezultat dobimo tudi, če v enačbo (10.40) vstavimo  $R_B = 0$ , namesto  $R_C$  pa  $1/(R_C^{-1} + R_L^{-1})$ .

$$R_{inE} = \frac{1 + \frac{g_{22}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}}{g_{11} \left(1 + \frac{g_{22}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}\right) + g_{21} + g_{22}}. \quad (10.57)$$

Frekvenca  $f_{C_1}$  znaša

$$f_{C_1} = \frac{1}{2\pi C_1 \left(\frac{1}{R_E^{-1} + R_{inE}^{-1}} + R_{SRC}\right)}. \quad (10.58)$$

Pri določanju  $R_{inC}$  upoštevamo, da  $C_1$  in  $C_B$  predstavljata kratek stik. V enačbo (10.35) vstavimo  $R_B = 0$  in zamenjamo  $R_E$  z  $1/(R_{SRC}^{-1} + R_E^{-1})$

$$R_{inC} = g_{22}^{-1} \left(1 + \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{11} + R_{SRC}^{-1} + R_E^{-1}}\right). \quad (10.59)$$

Rezultat se ujema z obratno vrednostjo izhodne admittance tranzistorja v orientaciji s skupno bazo v srednjefrekvenčnem območju (enačba (8.41)). Frekvenca  $f_{C_2}$  je enaka

$$f_{C_2} = \frac{1}{2\pi C_2 \left(\frac{1}{R_C^{-1} + R_{inC}^{-1}} + R_L\right)}. \quad (10.60)$$

Pri določanju vhodne upornosti v bazno sponko predstavljata  $C_1$  in  $C_2$  kratek stik. V enačbo (10.46) vstavimo  $1/(R_{SRC}^{-1} + R_E^{-1})$  in  $1/(R_C^{-1} + R_L^{-1})$  namesto  $R_E$  in  $R_C$ . Dobimo vhodno upornost v bazno sponko.

$$R_{inB} = g_{11}^{-1} \frac{\left(1 + \frac{g_{11}}{R_{SRC}^{-1} + R_E^{-1}}\right) \left(1 + \frac{g_{22}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}\right) + \frac{g_{21} + g_{22}}{R_{SRC}^{-1} + R_E^{-1}}}{1 + \frac{g_{22}}{R_{SRC}^{-1} + R_E^{-1}} + \frac{g_{22}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}}. \quad (10.61)$$

Določimo še frekvenco  $f_{C_B}$ .

$$f_{C_B} = \frac{R_B^{-1} + R_{inB}^{-1}}{2\pi C_B}. \quad (10.62)$$

Dobljene rezultate lahko z upoštevanjem  $g_{11} = 0$  uporabimo tudi za ojačevalnike z JFET ali MOSFET tranzistorji v orientaciji s skupnimi vrati. Kot zanimivost dodajmo, da ti ojačevalniki ne potrebujejo kondenzatorja  $C_B$ , saj je vhodna upornost v sponko vrat neskončna. Tako delilnik napetosti, ki ga tvorita  $R_1$  in  $R_2$  (slika 8.16) ni obremenjen, vrata tranzistorja pa so na konstantnem potencialu. V modelu vezja za majhne signale se to odraža kot  $I_g = 0$ , kar pomeni, da je padec napetosti na  $R_B$  enak 0V, vrata pa so na potencialu referenčnega vozlišča.  $C_B$  v prevajalno funkcijo še vedno vnaša pol, vnaša pa tudi ničlo, ki se za  $g_{11} = 0$  pokrije s polom. Ničla in pol se zato izničita in prevajalna funkcija postane neodvisna od  $C_B$ .

**Primer 10.3:** Določimo prevajalno funkcijo  $A_U = U_2/U_1$  za ojačevalnik z bipolarnim tranzistorjem v orientaciji s skupno bazo. Kapacitivnosti  $C_1$  in  $C_2$  sta dovolj veliki, da kondenzatorja predstavljata kratek stik za izmenične signale.

Na osnovi slike 10.11 (levo) lahko ob upoštevanju, da  $C_2$  predstavlja kratek stik, pišemo

$$I_b = -g_{11}U_{eb}, \quad (10.63)$$

$$I_c = -g_{21}U_{eb} + g_{22}(U_2 - U_1). \quad (10.64)$$

Za napetost  $U_1$  velja

$$U_1 = U_{eb} - \frac{I_b}{R_B^{-1} + sC_B} = U_{eb} \left( 1 + \frac{g_{11}}{R_B^{-1} + sC_B} \right). \quad (10.65)$$

Velja pa tudi

$$I_c = -(R_C^{-1} + R_L^{-1})U_2. \quad (10.66)$$

Če združimo (10.64) in (10.66), delimo z  $U_1$  in upoštevamo  $A_U = U_2/U_1$ , dobimo

$$-g_{21} \frac{U_{eb}}{U_1} + g_{22}(A_U - 1) = -(R_C^{-1} + R_L^{-1})A_U. \quad (10.67)$$

Upoštevamo še (10.65) in dobimo

$$-\frac{g_{21}}{1 + \frac{g_{11}}{R_B^{-1} + sC_B}} + g_{22}(A_U - 1) = -(R_C^{-1} + R_L^{-1})A_U. \quad (10.68)$$

Sledi prevajalna funkcija  $A_U$ .

$$A_U = \frac{\frac{g_{21}}{1 + \frac{g_{11}}{R_B^{-1} + sC_B}} + g_{22}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} = \frac{1}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} \cdot \left( \frac{g_{21}(R_B^{-1} + sC_B)}{g_{11} + R_B^{-1} + sC_B} + g_{22} \right) \quad (10.69)$$

Prevajalna funkcija ima eno ničlo  $z$  in en pol  $p$ .

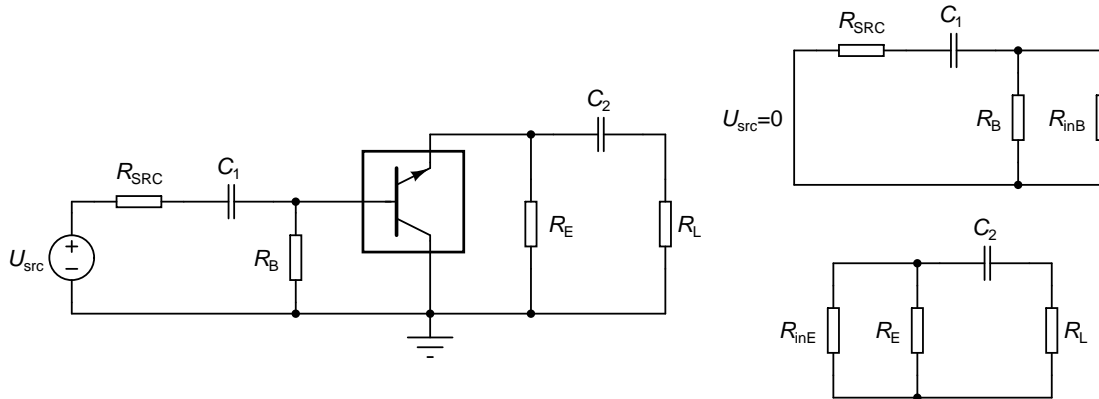
$$z = -\frac{(g_{21} + g_{22})R_B^{-1} + g_{11}g_{22}}{(g_{21} + g_{22})C_B} = -\frac{1}{C_B} \left( R_B^{-1} + \frac{g_{11}g_{22}}{g_{21} + g_{22}} \right), \quad (10.70)$$

$$p = -\frac{g_{11} + R_B^{-1}}{C_B}. \quad (10.71)$$

Vidimo, da pri  $g_{11} = 0$  (za JFET in MOSFET tranzistorje) velja  $p = z = -1/(R_B C_B)$ .  $\triangle$

### 10.2.4 Orientacija s skupnim kolektorjem (ponorom)

Ojačevalnik z bipolarnim tranzistorjem v orientaciji s skupnim kolektorjem (slika 8.18) ima dva vezna kondenzatorja. Model vezja za majhne signale je na sliki 10.12 (levo). Upor  $R_B$  nadomešča vzporedno vezavo  $R_1$  in  $R_2$ .  $C_1$  in  $C_2$  na svojih sponkah čutita uporovni vezji, ki sta prikazani na sliki 10.12 (desno). Ker je upornost bremena takega ojačevalnika ( $R_L$ ) običajno nizka, vhodna upornost v emitorsko sponko tranzistorja pa prav tako majhna, pričakujemo, da bo pri  $C_1 = C_2$  spodnjo mejno frekvenco določala kapacitivnost  $C_2$ .



Slika 10.12: Model za majhne signale ojačevalnika s tranzistorjem v orientaciji s skupnim kolektorjem (levo) in uporovni vezji, ki ju na svojih sponkah čutita  $C_1$  in  $C_2$  (desno).

Pri določanju  $f_{C_1}$  upoštevamo, da  $C_2$  predstavlja kratek stik. Vhodno upornost v bazno sponko dobimo iz enačbe (10.46) v katero vstavimo  $R_C = 0$ ,  $R_E$  pa nadomestimo z  $1/(R_E^{-1} + R_L^{-1})$ .

$$R_{inB} = g_{11}^{-1} \frac{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}}{g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (10.72)$$

Dobili smo obratno vrednost vhodne admittance tranzistorja v orientaciji s skupnim kolektorjem v srednjefrekvenčnem območju (enačba (8.70)). Sledi

$$f_{C_1} = \frac{1}{2\pi C_1 \left( R_{SRC} + \frac{1}{R_B^{-1} + R_{inB}^{-1}} \right)}. \quad (10.73)$$

Pri določanju  $f_{C_2}$  upoštevamo, da  $C_1$  predstavlja kratek stik. V enačbo (10.40) vstavimo  $R_C = 0$ , namesto  $R_B$  pa  $1/(R_{SRC}^{-1} + R_B^{-1})$ .

$$R_{inE} = \frac{1 + \frac{g_{11}}{R_{SRC}^{-1} + R_B^{-1}}}{g_{11} + g_{21} + g_{22} \left( 1 + \frac{g_{11}}{R_{SRC}^{-1} + R_B^{-1}} \right)}. \quad (10.74)$$

Izraz (10.74) je enak obratni vrednosti izhodne admittance tranzistorja v orientaciji s skupnim kolektorjem v srednjefrekvenčnem območju (enačba (8.76)). Frekvenca  $f_{C_2}$  znaša

$$f_{C_2} = \frac{1}{2\pi C_2 \left( R_L + \frac{1}{R_E^{-1} + R_{inE}^{-1}} \right)}. \quad (10.75)$$

Rezultate lahko uporabimo tudi za ojačevalnike z JFET in MOSFET tranzistorji v orientaciji s skupnim ponorom, če v enačbe vstavimo  $g_{11} = 0$  in ustrezno preimenujemo elemente vezja.

**Primer 10.4:** Imejmo ojačevalnik v orientaciji s skupnim kolektorjem, ki je podan na sliki 10.12 (levo). Elementi vezja so  $R_E = 5\text{k}\Omega$ ,  $R_L = 100\Omega$ ,  $R_1 = R_2 = 100\text{k}\Omega$ ,  $R_{\text{SRC}} = 1\text{k}\Omega$  in  $C_1 = C_2 = 10\mu\text{F}$ . Admitančni parametri tranzistorja za orientacijo s skupnim emitorjem v delovni točki vezja znašajo  $g_{11} = 0.1\text{mS}$ ,  $g_{21} = 40\text{mS}$  in  $g_{22} = 20\mu\text{S}$ . Določimo pola, ki ju vnašata kondenzatorja  $C_1$  in  $C_2$  v prevajalne funkcije vezja.

V srednjefrekvenčnem področju predstavljata  $C_1$  in  $C_2$  kratek stik. Tedaj sta upornosti  $R_{\text{inB}}$  in  $R_{\text{inE}}$  enaki vhodni in izhodni impedanci tranzistorja v orientaciji s skupnim kolektorjem v srednjefrekvenčnem območju (enačbi (8.70) in (8.75)).

$$R_{\text{inB}} = g_{11}^{-1} \frac{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}}{g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}} = 49,2\text{k}\Omega. \quad (10.76)$$

$$R_{\text{inE}} = \frac{g_{11} + R_{\text{SRC}}^{-1} + R_B^{-1}}{(R_{\text{SRC}}^{-1} + R_B^{-1})(g_{11} + g_{21} + g_{22}) + g_{11}g_{22}} = 27,4\Omega. \quad (10.77)$$

S pomočjo enačb (10.73) in (10.75) dobimo  $f_{C_1} = 0,62\text{Hz}$  in  $f_{C_2} = 125\text{Hz}$ . Spodnjo frekvenčno mejo določa  $C_2$ . Velja  $f_L = f_{C_2} = 125\text{Hz}$ . Frekvenca  $f_{C_2}$  je hkrati tudi pripadajoča frekvenca pola, ki ga vnaša  $C_2$ .

$$p_{C_2} = -2\pi f_{C_2} = -2\pi \cdot 125\text{s}^{-1}. \quad (10.78)$$

Če želimo določiti pol, ki ga vnaša  $C_1$ , moramo upoštevati, da pri njegovi pripadajoči frekvenci, (ki je nižja od  $f_{C_2}$ ) kondenzator  $C_2$  predstavlja odprte sponke. Emitorska stran je tako zaključena samo z  $R_E$ . Zaradi tega se spremeni vhodna upornost v bazno sponko.

$$R'_{\text{inB}} = g_{11}^{-1} \frac{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1}}{g_{22} + R_E^{-1}} = 1,83\text{M}\Omega. \quad (10.79)$$

Frekvenca pola, ki ga vnaša  $C_1$ , je

$$f'_{C_1} = \frac{1}{2\pi C_1 \left( R_{\text{SRC}} + \frac{1}{R_B^{-1} + R'_{\text{inB}}{}^{-1}} \right)} = 0,32\text{Hz}, \quad (10.80)$$

pol pa je enak

$$p_{C_1} = -2\pi f'_{C_1} = -2\pi \cdot 0,32\text{s}^{-1}. \quad (10.81)$$

△

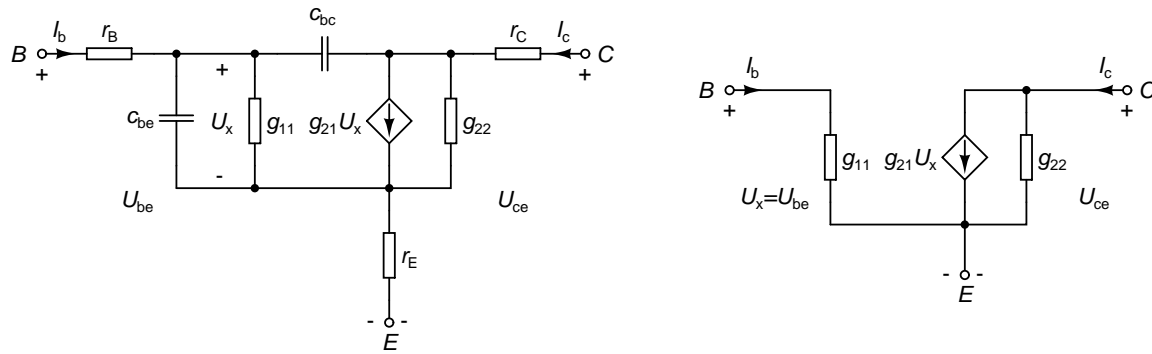
## 10.3 Modeli tranzistorjev pri visokih frekvencah

Da bi lahko določili obnašanje vezij pri visokih frekvencah, moramo upoštevati kapacitivnosti tranzistorjev in ostalih polprevodniških elementov v vezju. Modeli tranzistorjev, ki smo jih uporabili v poglavju 8, ne vsebujejo teh kapacitivnosti, saj v srednjefrekvenčnem območju le te nimajo bistvenega vpliva. Sedaj jih bomo dopolnili tako, da bodo postali uporabni tudi v visokofrekvenčnem območju.

### 10.3.1 Bipolarni tranzistor

Na osnovi vsebine poglavij 4 in 5 lahko zgradimo nadomestno vezje bipolarnega tranzistorja v aktivnem področju za majhne signale. Modelu na sliki 5.6 dodamo upornosti priključkov  $r_B$ ,  $r_C$  in  $r_E$ . Zaradi majhne vrednosti

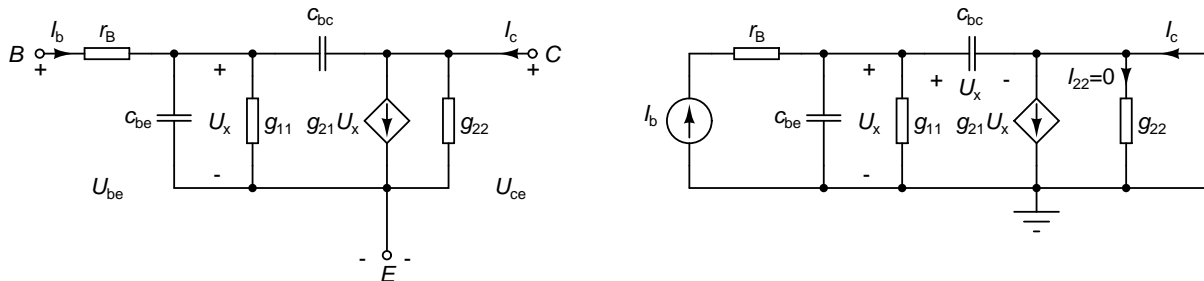




Slika 10.13: Nadomestno bipolarnega tranzistorja za majhne signale (levo) in poenostavljen vezje za uporabo pri nizkih in srednjih frekvencah (desno).

zanemarimo še  $g_{12}$  in dobimo vezje na sliki 10.13 (levo). Model imenujemo tudi **hibridni  $\pi$  model bipolarnega tranzistorja**. Za elemente modela so v literaturi pogoste oznake  $c_\pi = c_{be}$ ,  $c_\mu = c_{bc}$ ,  $r_\pi = 1/g_{11}$ ,  $r_o = 1/g_{22}$  in  $g_m = g_{21}$ .

Pri nizkih in srednjih frekvencah odpadeta kapacitivnosti  $c_{be}$  in  $c_{bc}$ . Prevodnost  $g_{11}$  je tedaj vezana zaporedno z upornostjo baznega priključka  $r_B$ . Slednja je reda velikosti od nekaj  $\Omega$  do nekaj 100 $\Omega$ . V primerjavi z  $1/g_{11}$ , ki je reda velikosti k $\Omega$ , je  $r_B$  zanemarljiva. Upornosti priključkov kolektorja in emitorja sta reda velikosti  $\Omega$  in ju lahko prav tako zanemarimo. Ostane nam vezje na sliki 10.13 (desno), ki ga že poznamo iz poglavja 4 in smo ga uporabljali za določanje lastnosti osnovnih vezav tranzistorja pri srednjih frekvencah (poglavje 8).



Slika 10.14: Poenostavljeno nadomestno vezje bipolarnega tranzistorja za majhne signale pri visokih frekvencah (levo) in določanje kratkostičnega tokovnega ojačenja (desno).

Pri dovolj visoki frekvenci postaneta tokova skozi kapacitivnosti  $c_{be}$  in  $c_{bc}$  nezanemarljiva. Od elementov vezja na sliki 10.13 (levo) lahko zanemarimo samo še upornosti priključkov kolektorja in emitorja. Dobimo poenostavljeno nadomestno vezje na sliki 10.14 (levo), ki ga bomo uporabljali v računskih primerih.

Ena pomembnejših lastnosti bipolarnih tranzistorjev je **kratkostično tokovno ojačenje orientacije s skupnim emitorjem** ( $A_{ISC}$ ), ki je razmerje med kolektorskim in baznim tokom pri kratkem stiku na izhodu med kolektorjem in emitorjem ( $U_{ce} = 0$ ). To ojačenje je odvisno od frekvence. Določimo ga lahko s pomočjo poenostavljenega nadomestnega vezja za visoke frekvence, v katerem kratko sklenemo sponki C in E (slika 10.14, desno). Tedaj velja

$$I_b = (g_{11} + j\omega c_{be} + j\omega c_{bc})U_x, \quad (10.82)$$

$$I_c = (g_{21} - j\omega c_{bc})U_x. \quad (10.83)$$

Sedaj lahko izrazimo kratkostično tokovno ojačenje kot kvocient (10.83) in (10.82).

$$A_{\text{ISC}} = A_{\text{I}}|_{U_{\text{ce}}=0} = \frac{I_{\text{c}}}{I_{\text{b}}} = \frac{g_{21} - j\omega c_{\text{bc}}}{g_{11} + j\omega(c_{\text{be}} + c_{\text{bc}})} = \frac{g_{21}}{g_{11}} \frac{1 - j\omega c_{\text{bc}} g_{21}^{-1}}{1 + j\omega(c_{\text{be}} + c_{\text{bc}}) g_{11}^{-1}} = \beta \frac{1 - j\omega/\omega_z}{1 + j\omega/\omega_p}. \quad (10.84)$$

Pol prevajalne funkcije nastopi pri  $\omega_p = g_{11}/(c_{\text{be}} + c_{\text{bc}})$ , ničla pa pri  $\omega_z = g_{21}/c_{\text{bc}} = \omega_p \cdot \beta(1 + c_{\text{be}}/c_{\text{bc}})$ . Pri tem je  $\beta = g_{21}/g_{11}$  kratkostično tokovno ojačenje za nizke frekvence ( $g_{21}/g_{11}$ ).

Pomemben podatek je krožna frekvenca  $\omega_T$ , pri kateri kratkostično tokovno ojačenje doseže 1 (oziroma 0dB). Če predpostavimo, da velja  $\omega_z \gg \omega_T$ , je števec (10.84) pri  $\omega = \omega_T$  približno enak 1. Pri krožni frekvenci  $\omega_p$  nastopi pol, kratkostično tokovno ojačenje pa tam upade za 3dB. Zaradi tega  $\omega_p$  imenujemo tudi **pasovna širina kratkostičnega tokovnega ojačenja**. Ker je  $\beta$  velik, pričakujemo  $\omega_T \gg \omega_p$ , kar pomeni, da lahko imenovalc (10.84) poenostavimo v  $j\omega/\omega_p$ . Ostane nam enačba

$$\left| \frac{\beta}{j\omega_T/\omega_p} \right| = 1, \quad (10.85)$$

od koder sledi

$$\omega_T = \beta\omega_p = \frac{g_{21}}{c_{\text{be}} + c_{\text{bc}}}. \quad (10.86)$$

Vidimo, da velja  $\omega_z = \omega_T(1 + c_{\text{be}}/c_{\text{bc}})$ . Ker pri  $c_{\text{be}}$  prevladuje difuzijska kapacitivnosti, pri  $c_{\text{bc}}$  pa spojna kapacitivnost, je kvocient  $c_{\text{be}}/c_{\text{bc}}$  ponavadi precej večji od 1. Vidimo, da je bila naša predpostavka  $\omega_z \gg \omega_T$  upravičena.

Frekvenco  $f_T = \omega_T/(2\pi)$  podatkovni listi pogosto navajajo kot **produkt pasovne širine in ojačenja** (ang. **gain-bandwidth product**) ali tudi **pasovna širina enotinega ojačenja** (ang. **unity gain bandwidth**). Enačbo (10.86) lahko ob upoštevanju, da v  $c_{\text{be}}$  prevladuje difuzijska kapacitivnost, pišemo kot

$$\omega_T = 2\pi f_T = \frac{1}{c_{\text{be}}/g_{21} + c_{\text{bc}}/g_{21}} = \frac{1}{\tau_F + c_{\text{bc}}/g_{21}}. \quad (10.87)$$

Drugi člen v imenovalcu lahko zmanjšamo z dovolj veliko zaporno napetostjo delovne točke ( $U_{\text{CBQ}} = U_{\text{CEQ}} - U_{\text{BEQ}}$ ) tako, da postane  $c_{\text{bc}}$  zanemarljiva v primerjavi s  $c_{\text{be}}$ . Ker pa je  $\tau_F$  le malo odvisen od delovne točke (v poglavju 5 smo predpostavili, da je konstanta), ostaja  $\omega_T$  omejena navzgor z  $1/\tau_F$ , ne glede na izbiro delovne točke.

**Primer 10.5:** Za tranzistor s podatki  $f_T = 12\text{GHz}$ ,  $\beta = 100$ ,  $g_{21} = 400\text{mS}$  in  $c_{\text{bc}} = 0.4\text{pF}$ . Določimo kapacitivnost  $c_{\text{be}}$ , konstanto  $\tau_F$  in potek kratkostičnega tokovnega ojačenja orientacije s skupnim emitorjem.

S pomočjo enačbe (10.86) lahko določimo  $c_{\text{be}}$  kot

$$c_{\text{be}} = \frac{g_{21}}{\omega_T} - c_{\text{bc}} = \frac{g_{21}}{2\pi f_T} - c_{\text{bc}} = 4,9\text{pF}. \quad (10.88)$$

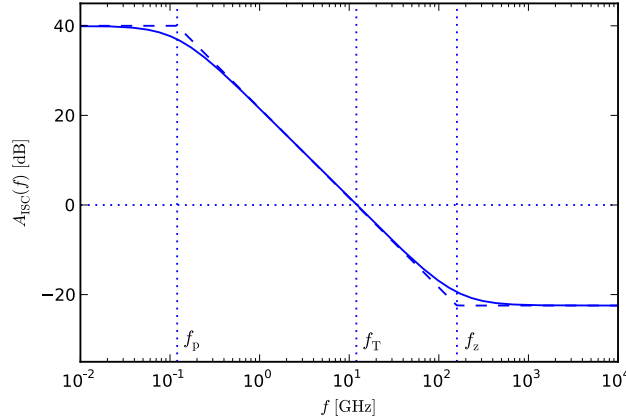
Konstanto  $\tau_F$  lahko določimo iz enačbe (5.32).

$$\tau_F = \frac{c_{\text{be}}}{g_{21}} = \frac{1}{2\pi f_T} - \frac{c_{\text{bc}}}{g_{21}} = 12,3\text{ps}. \quad (10.89)$$

Določimo še frekvenci, pri katerih nastopita pol in ničla.

$$f_p = \frac{g_{11}}{2\pi(c_{\text{be}} + c_{\text{bc}})} = \frac{g_{21}}{2\pi\beta(c_{\text{be}} + c_{\text{bc}})} = \frac{f_T}{\beta} = 0.12\text{GHz}, \quad (10.90)$$

$$f_z = \frac{g_{21}}{2\pi c_{\text{bc}}} = 160\text{GHz}. \quad (10.91)$$



Slika 10.15: Bodejev diagram kratkostičnega tokovnega ojačenja orientacije s skupnim emitorjem. Črtkana črta prikazuje asimptotičen potek ojačenja. Podatki tranzistorja so  $g_{21} = 400\text{mS}$ ,  $\beta = 100$ ,  $c_{be} = 4,9\text{pF}$  in  $c_{bc} = 0,4\text{pF}$ .

Kratkostično tokovno ojačenje pri nizkih frekvencah je enako  $\beta$  (40dB). Bodejev diagram ojačenja je na sliki 10.15.  $\triangle$

Vidimo, da kratkostično tokovno ojačenje orientacije s skupnim emitorjem ni odvisno od upora  $r_B$ .  $r_B$  sicer vpliva na zgornje frekvenčne meje ojačevalnikov z bipolarnim tranzistorjem, vendar pa je njegov glavni namen modeliranje mere aktivnosti tranzistorja ( $U$  iz poglavja 2.3.2). Zanimiv podatek je frekvenca  $f_{\max}$ , pri kateri postane mera aktivnosti enaka 1.

Da jo izračunamo, potrebujemo admitančne parametre modela na sliki 10.14 (levo). Model vsebuje eno notranje vozlišče (stihišče  $c_{be}$  in  $c_{bc}$ ). Vzemimo, da je emitor na potencialu 0V. Tedaj je potencial notranjega vozlišča enak  $U_x$ . Označimo  $r_B^{-1}$  z  $g_B$ . Vozliščne enačbe modela se tako glasijo

$$\begin{bmatrix} g_B & 0 & -g_B \\ 0 & g_{22} + j\omega c_{bc} & g_{21} - j\omega c_{bc} \\ -g_B & -j\omega c_{bc} & g_B + g_{11} + j\omega(c_{be} + c_{bc}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{be} \\ U_{ce} \\ U_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.92)$$

Pred eliminacijo je smiselno narediti nekaj poenostavitvev. Predpostavimo, da je  $g_B \gg g_{11}$ , saj je upornost  $r_B$  majhna. Za  $c_{be} + c_{bc}$  bomo pisali  $c_{bb}$ . Enačbo (10.92) poenostavimo v

$$\begin{bmatrix} g_B & 0 & -g_B \\ 0 & g_{22} + j\omega c_{bc} & g_{21} - j\omega c_{bc} \\ -g_B & -j\omega c_{bc} & g_B + j\omega c_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{be} \\ U_{ce} \\ U_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.93)$$

Po eliminaciji tretje enačbe in neznanke  $U_x$  dobimo

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{be} \\ U_{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{j\omega c_{bb} g_B}{g_B + j\omega c_{bb}} & \frac{-g_B j\omega c_{bc}}{g_B + j\omega c_{bb}} \\ \frac{g_B (g_{21} - j\omega c_{bc})}{g_B + j\omega c_{bb}} & g_{22} + j\omega c_{bc} \left( 1 + \frac{g_{21} - j\omega c_{bc}}{g_B + j\omega c_{bb}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{be} \\ U_{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix}. \quad (10.94)$$

Realni del matrike koeficientov sistema je

$$\Re \left( \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 c_{bb}^2 g_B}{g_B^2 + \omega^2 c_{bb}^2} & -\frac{\omega^2 c_{bc} c_{bb} g_B}{g_B^2 + \omega^2 c_{bb}^2} \\ \frac{g_{21} g_B^2 - \omega^2 c_{bc} c_{bb} g_B}{g_B^2 + \omega^2 c_{bb}^2} & g_{22} + \frac{\omega^2 c_{bc} (g_{21} c_{bb} + g_B c_{bc})}{g_B^2 + \omega^2 c_{bb}^2} \end{bmatrix}. \quad (10.95)$$

Ko je mera aktivnosti enaka 1 (pri  $\omega = \omega_{\max}$ ), velja

$$\frac{1}{4}|y_{12} - y_{21}|^2 = \mathcal{R}e(y_{11})\mathcal{R}e(y_{22}) - \mathcal{R}e(y_{12})\mathcal{R}e(y_{21}). \quad (10.96)$$

Leva stran enačbe (10.96) je enaka

$$\frac{1}{4} \left| \frac{-g_B g_{21}}{g_B + j\omega_{\max} c_{bb}} \right|^2 = \frac{1}{4} \frac{g_B^2 g_{21}^2}{g_B^2 + \omega_{\max}^2 c_{bb}^2}, \quad (10.97)$$

na desni pa imamo

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{\max}^2 c_{bb}^2 g_B (g_{22}(g_B^2 + \omega_{\max}^2 c_{bb}^2) + \omega_{\max}^2 c_{bc}(g_{21}c_{bb} + g_B c_{bc})) + \omega_{\max}^2 c_{bc} c_{bb} g_B (g_{21}g_B^2 - \omega_{\max}^2 c_{bc} c_{bb} g_B)}{(g_B^2 + \omega_{\max}^2 c_{bb}^2)^2} \\ = & \frac{\omega_{\max}^2 c_{bb}^2 g_B g_{22}(g_B^2 + \omega_{\max}^2 c_{bb}^2) + \omega_{\max}^2 c_{bc} c_{bb} g_{21} g_B (g_B^2 + \omega_{\max}^2 c_{bb}^2)}{(g_B^2 + \omega_{\max}^2 c_{bb}^2)^2} \end{aligned} \quad (10.98)$$

Po vstavitvi (10.97) in (10.98) v (10.96) dobimo

$$\frac{1}{4} g_{21}^2 g_B = \omega_{\max}^2 c_{bb}^2 \left( g_{22} + g_{21} \frac{c_{bc}}{c_{bb}} \right). \quad (10.99)$$

Sledi

$$\omega_{\max} = \frac{g_{21}}{2c_{bb} \sqrt{\left( \frac{c_{bc}}{c_{bb}} g_{21} + g_{22} \right) r_B}}. \quad (10.100)$$

Če upoštevamo  $\omega_T = g_{21}/c_{bb}$ , dobimo

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{\omega_T}{4r_b \left( c_{bc} + \frac{g_{22}}{g_{21}} (c_{be} + c_{bc}) \right)}} \approx \sqrt{\frac{\omega_T}{4c_{bc} r_b}}. \quad (10.101)$$

Drugi člen v imenovalcu smemo izpustiti, ker ponavadi velja  $g_{22} \ll g_{21} c_{bc} / (c_{be} + c_{bc})$ . Če bi upornost  $r_B$  bila enaka 0, bi za mero aktivnosti dobili

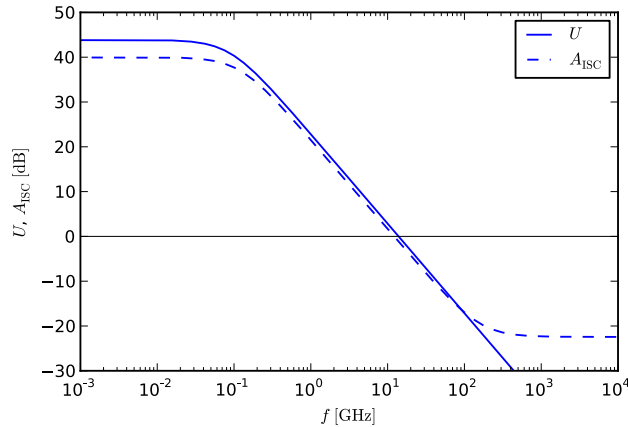
$$U = \frac{g_{21}^2}{4g_{11}g_{22}}, \quad (10.102)$$

kar pomeni, da ne bi bila odvisna od frekvenca. Frekvenca  $f_{\max} = \omega_{\max}/(2\pi)$  bi tedaj bila neskončna, kar pa za realne polprevodniške elemente ni mogoče.

**Primer 10.6:** Za tranzistor s podatki  $f_T = 12\text{GHz}$ ,  $g_{21} = 400\text{mS}$  in  $c_{bc} = 0.4\text{pF}$  smo iz tabeliranih admitančnih parametrov določili potek mere aktivnosti  $U$  in ugotovili, da ta doseže vrednost 1 pri frekvenci  $f_{\max} = 14\text{GHz}$ . Določimo vrednost upornosti  $r_B$  v modelu tranzistorja za majhne signale.

Uporabimo enačbo (10.101) in dobimo

$$f_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{2\pi} = \sqrt{\frac{f_T}{8\pi c_{bc} r_B}}. \quad (10.103)$$



Slika 10.16: Potek mere aktivnosti  $U$  in kratkostičnega tokovnega ojačenja orientacije s skupnim emitorjem za bipolarni tranzistor s parametri  $g_{21} = 400\text{mS}$ ,  $\beta = 100$ ,  $g_{22} = 400\mu\text{S}$ ,  $c_{be} = 4,9\text{pF}$ ,  $c_{bc} = 0,4\text{pF}$  in  $r_B = 6,1\Omega$ .

Od tod sledi

$$r_B = \frac{f_T}{8\pi c_{bc} f_{\max}^2} = 6,1\Omega. \quad (10.104)$$

Pogosto so za tranzistor namesto admitančnih parametrov podani  $s$ -parametri, ki se uporabljajo pri načrtovanju visokofrekvenčnih vezij. Enačbe za pretvorbo  $s$ -parametrov v admitančne parametre so navedene v literaturi (naprimer v [21]). Potek mere aktivnosti v odvisnosti od frekvence je podan na sliki 10.16. Skala na ordinatni osi je v decibelih. Ker ima  $U$  naravo ojačenja moči, ga v decibele pretvorimo po formuli

$$U[\text{dB}] = 10 \log_{10} |U|. \quad (10.105)$$

△

### 10.3.2 JFET tranzistor

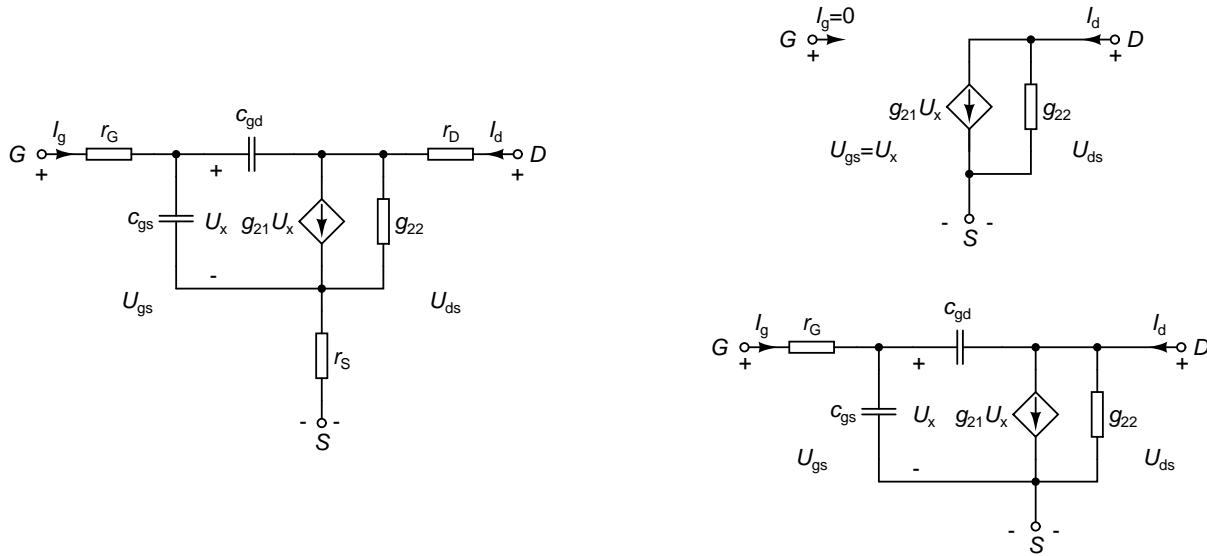
JFET tranzistor v področju nasičenja ima po zgradbi enak model za majhne signale kot bipolarni tranzistor. Razlika je le v tem, da sedaj nimamo prevodnosti  $g_{11}$  (slika 10.17, levo). Dobimo ga, če modelu na sliki 5.8 dodamo upornosti priključkov  $r_G$ ,  $r_D$  in  $r_S$ .

Pri nizkih in srednjih frekvencah lahko zanemarimo vse kapacitivnosti ( $c_{gs}$  in  $c_{gd}$ ) ter vse upornosti priključkov ( $r_G$ ,  $r_D$  in  $r_S$ ). Tako dobimo vezje na sliki 10.17 (desno zgoraj). Pri visokih frekvencah smemo zanemariti le upornosti  $r_D$  in  $r_S$ , kar nam da vezje na sliki 10.17 (desno spodaj).

Za JFET tranzistor lahko definiramo kratkostično tokovno ojačenje orientacije s skupnim izvorom, ki ga označimo z  $|A_{ISC}|$  in je enako kvocinetu med  $I_d$  in  $I_g$ . Pri nizkih frekvencah je to ojačenje neskončno, ker je parameter  $g_{11}$  enak 0. Z naraščanjem frekvence  $A_{ISC}$  upada in pri frekvenci  $f_T$  doseže 1. Zaradi enake zgradbe modela lahko uporabimo kar izraz (10.84) v katerega vstavimo  $g_{11} = 0$ ,  $c_{be}$  in  $c_{bc}$  pa zamenjamo z  $c_{gs}$  in  $c_{gd}$ .

$$A_{ISC} = \frac{I_d}{I_g} = \frac{g_{21} - j\omega c_{gd}}{j\omega(c_{gs} + c_{gd})}. \quad (10.106)$$

Tudi sedaj imamo ničlo pri  $\omega_z = g_{21}/c_{gd}$ . Pol se zaradi  $g_{11} = 0$  premakne v izhodišče ( $\omega_p = 0$ ). Za razliko od bipolarnega tranzistorja sta pri JFET tranzistorju obe kapacitivnosti spojni in zato enakega reda velikosti. To



Slika 10.17: Model JFET tranzistorja za majhne signale (levo). Poenostavljen model za nizke in srednje frekvence (desno zgoraj) ter visoke frekvence (desno spodaj).

pomeni, da ničla  $\omega_z$  sicer še vedno nastopi pri višji frekvenci, kot  $\omega_T$ , vendar pa ne velja več  $\omega_T \ll \omega_z$ . Zaradi tega v števcu (10.106) ne moremo zanemariti člena  $j\omega c_{gd}$ , ko računamo  $\omega_T$ . Pogoj  $|A_{ISC}| = 1$  lahko zapišemo kot

$$\left| \frac{g_{21} - j\omega_T c_{gd}}{j\omega_T (c_{gs} + c_{gd})} \right| = \frac{g_{21}^2 + \omega_T^2 c_{gd}^2}{\omega_T^2 (c_{gs} + c_{gd})^2} = 1, \quad (10.107)$$

od koder dobimo

$$\omega_T = \frac{g_{21}}{\sqrt{(c_{gs} + 2c_{gd})c_{gs}}}. \quad (10.108)$$

Pri določanju  $\omega_{max}$  izhajamo iz enakega sistema enačb, kot pri bipolarnem tranzistorju, saj je poenostavljen model, ki smo ga dobili z zanemaritvijo  $r_S$  in  $r_D$  (slika 10.17, desno spodaj), enak modelu, ki smo ga uporabili za bipolarni tranzistor (slika 10.14, levo). Seveda moramo ustrezno preimenovati tokove, napetosti, kapacitivnosti in upornost  $r_B$ . Upoštevamo še  $g_{11} = 0$ ,  $g_G = 1/r_G$  in  $c_{gg} = c_{gs} + c_{gd}$ , nakar sledi

$$\omega_{max} = \frac{g_{21}}{2(c_{gs} + c_{gd}) \sqrt{r_G \left( \frac{c_{gd}}{c_{gs} + c_{gd}} g_{21} + g_{22} \right)}}. \quad (10.109)$$

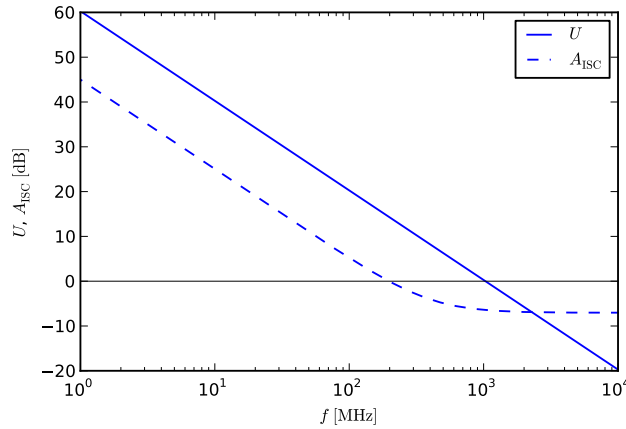
**Primer 10.7:** Za JFET tranzistor s podatki  $g_{21} = 2\text{mS}$ ,  $g_{22} = 30\mu\text{S}$ ,  $c_{iss} = 1,8\text{pF}$ ,  $c_{rss} = 0,8\text{pF}$  in  $r_G = 8\Omega$  določimo  $f_T$  in  $f_{max}$ .

Podobno, kot pri MOSFET tranzistorjih, sta tudi pri JFET tranzistorjih kapacitivnosti  $c_{gs}$  in  $c_{gd}$  lahko podani kot  $c_{iss} = c_{gs} + c_{gd}$  in  $c_{rss} = c_{gd} = 0,8\text{pF}$ . Vrednost  $c_{gs}$  dobimo kot

$$c_{gs} = c_{iss} - c_{rss} = 1,0\text{pF}. \quad (10.110)$$

Frekvenco  $f_T$  določimo s pomočjo enačbe (10.108) kot

$$f_T = \frac{g_{21}}{2\pi \sqrt{(c_{gs} + 2c_{gd})c_{gs}}} = 197\text{MHz}. \quad (10.111)$$



Slika 10.18: Potek mere aktivnosti  $U$  in kratkostičnega tokovnega ojačenja orientacije s skupnim izvorom za JFET tranzistor s parametri  $g_{21} = 5\text{mS}$ ,  $g_{22} = 40\mu\text{S}$ ,  $c_{\text{iss}} = 1,8\text{pF}$ ,  $c_{\text{rss}} = 0,8\text{pF}$  in  $r_G = 14\Omega$ .

Frekvenca  $f_{\text{max}}$  sledi iz (10.109).

$$f_{\text{max}} = \frac{g_{21}}{4\pi(c_{\text{gs}} + c_{\text{gd}})\sqrt{r_G\left(\frac{c_{\text{gd}}}{c_{\text{gs}} + c_{\text{gd}}}g_{21} + g_{22}\right)}} = 1,03\text{GHz}. \quad (10.112)$$

Vidimo, da lahko s podanim tranzistorjem še vedno ojačujemo moč, čeprav je njegovo kratkostično tokovno ojačenje že manjše od 1 (za frekvence od 197MHz do 1,03GHz), kar je razvidno tudi iz slike 10.18. Vidimo tudi, da leži ničla blizu frekvence  $f_T$ , kar upraviči uporabo izraza (10.108) za izračun  $f_T$ .  $\triangle$

### 10.3.3 MOSFET tranzistor

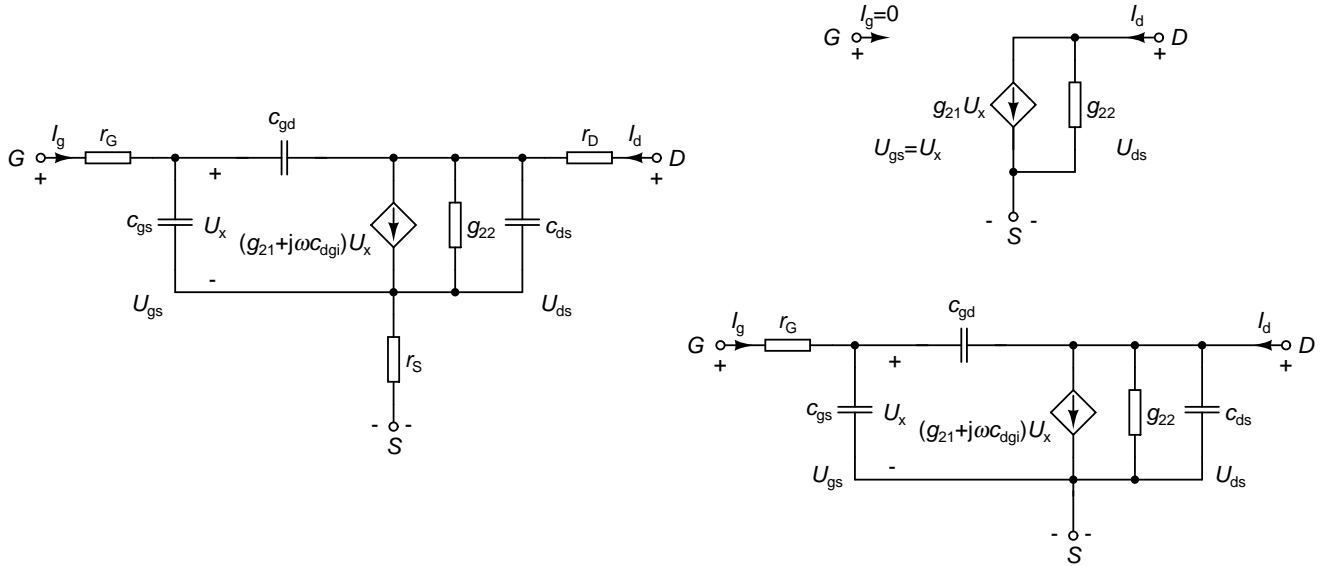
Model MOSFET tranzistorja v področju nasičenja za majhne signale dobimo, če modelu na sliki 5.14 dodamo upornosti priključkov  $r_G$ ,  $r_D$  in  $r_S$  (slika 10.19, levo). V bistvu je enak modelu JFET tranzistorja z dodatkom kapacitivnosti  $c_{\text{ds}}$  in komponente  $j\omega c_{\text{dgi}}$  k transkonduktanci  $g_{21}$ . Slednja modelira neregularnost intrinzičnih kapacitivnosti (v poglavju 5.5.3 smo videli, da je  $c_{\text{dgi}}$  negativna). V modelu smo predpostavili, da je substrat vezan na izvor. Za integrirana vezja to ponavadi ne drži. Popoln model MOS tranzistorja je zato precej bolj zapleten.

Pri nizkih in srednjih frekvencah lahko zanemarimo vse kapacitivnosti in upornosti priključkov, kar nam da model na sliki 10.19 (desno zgoraj). Pri visokih frekvencah ponavadi zanemarimo  $r_D$ ,  $r_S$ , kar nam da model na sliki 10.19 (desno spodaj). Ker kapacitivnost  $c_{\text{dgi}}$  prične vplivati šele pri zelo visokih frekvencah ( $\omega > g_{21}/c_{\text{dgi}}$ ), jo pogosto prav tako izpustimo iz modela.

Model na sliki 10.19 (desno spodaj) je enak modelu JFET tranzistorja (slika 10.17, desno spodaj) z dodatkom kapacitivnosti  $c_{\text{ds}}$  in člena  $j\omega c_{\text{dgi}}$ . Pri računanju  $\omega_T$ , kjer kratkostično tokovno ojačenje orientacije s skupnim izvorom doseže 0dB, lahko  $c_{\text{ds}}$  izpustimo iz modela, saj je kratko sklenjena, njen tok pa je enak 0. Če v enačbo (10.106) namesto  $g_{21}$  vstavimo  $g_{21} + j\omega c_{\text{dgi}}$ , dobimo

$$A_{\text{ISC}} = \frac{I_d}{I_g} = \frac{g_{21} - j\omega(c_{\text{gd}} - c_{\text{dgi}})}{j\omega(c_{\text{gs}} + c_{\text{gd}})}. \quad (10.113)$$

Vidimo, da  $c_{\text{dgi}}$  (ki je negativen) pomakne ničlo kratkostičnega tokovnega ojačenja proti nižjim frekvencam in s



Slika 10.19: Model MOSFET tranzistorja za majhne signale (levo). Poenostavljen model za nizke in srednje frekvence (desno zgoraj) ter visoke frekvence (desno spodaj).

tem proti  $f_T$ . Z upoštevanjem pogoja  $|A_{ISC}| = 1$  dobimo

$$\omega_T = \frac{g_{21}}{\sqrt{(c_{gs} + 2(c_{gd} - c_{dgi}))c_{gs}}}. \quad (10.114)$$

Pri določanju  $\omega_{\max}$  uporabimo vezje na sliki 10.14 (levo), v katerem  $g_{21}$  nadomestimo z  $g_{21} + j\omega c_{dgi}$ ,  $g_{22}$  pa z  $g_{22} + j\omega c_{ds}$ . Če še ostale elemente ustrezno preimenujemo in upoštevamo  $g_{11} = 0$ , dobimo vezje na sliki 10.19 (desno spodaj). Sistem enačb vezja (10.93) se glasi

$$\begin{bmatrix} g_G & 0 & -g_G \\ 0 & g_{22} + j\omega(c_{gd} + c_{ds}) & g_{21} - j\omega(c_{gd} - c_{dgi}) \\ -g_G & -j\omega c_{gd} & g_G + j\omega c_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{gs} \\ U_{ds} \\ U_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ I_d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.115)$$

V sistemu smo upoštevali  $c_{gg} = c_{gs} + c_{gd}$  in  $g_G = 1/r_G$ . Po eliminaciji neznanke  $U_x$  in tretje enačbe dobimo

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{j\omega c_{gg} g_G}{g_G + j\omega c_{gg}} & \frac{-g_G j\omega c_{gd}}{g_G + j\omega c_{gg}} \\ \frac{g_G (g_{21} - j\omega (c_{gd} - c_{dgi}))}{g_G + j\omega c_{gg}} & g_{22} + j\omega c_{ds} + j\omega c_{gd} \left( 1 + \frac{g_{21} - j\omega (c_{gd} - c_{dgi})}{g_G + j\omega c_{gg}} \right) \end{bmatrix}. \quad (10.116)$$

Realni deli admitančnih parametrov so enaki

$$\Re \left( \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\omega^2 c_{gg}^2 g_G}{g_G^2 + \omega^2 c_{gg}^2} & -\frac{\omega^2 c_{gd} c_{gg} g_G}{g_G^2 + \omega^2 c_{gg}^2} \\ \frac{g_{21} g_G^2 - \omega^2 (c_{gd} - c_{dgi}) c_{gg} g_G}{g_G^2 + \omega^2 c_{gg}^2} & g_{22} + \frac{\omega^2 c_{gd} (g_{21} c_{gg} + g_G (c_{gd} - c_{dgi}))}{g_G^2 + \omega^2 c_{gg}^2} \end{bmatrix}. \quad (10.117)$$

Števec Masonove invariante  $U$  je

$$|y_{12} - y_{21}|^2 = \left| \frac{-g_G g_{21} - j\omega c_{dgi} g_G}{g_G + j\omega c_{gg}} \right|^2 = \frac{g_G^2 (g_{21}^2 + \omega^2 c_{dgi}^2)}{g_G^2 + \omega^2 c_{gg}^2}, \quad (10.118)$$



v imenovalcu pa imamo

$$\begin{aligned}
 g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} &= \frac{\omega^2 c_{gg}^2 g_G g_{22} (g_G^2 + \omega^2 c_{gg}^2) + \omega^4 c_{gd} c_{gg}^2 g_G (g_{21} c_{gg} + g_G (c_{gd} - c_{dgi}))}{(g_G^2 + \omega^2 c_{gg}^2)^2} \\
 &+ \frac{\omega^2 c_{gd} c_{gg} g_G (g_{21} g_G^2 - \omega^2 (c_{gd} - c_{dgi}) c_{gg} g_G)}{(g_G^2 + \omega^2 c_{gg}^2)^2} \\
 &= \frac{\omega^2 c_{gg}^2 g_G g_{22} + \omega^2 c_{gd} c_{gg} g_{21} g_G}{g_G^2 + \omega^2 c_{gg}^2}.
 \end{aligned} \tag{10.119}$$

Masonova invarianta je enaka

$$U = \frac{|y_{12} - y_{21}|}{4(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})} = \frac{g_G^2 (g_{21}^2 + \omega^2 c_{dgi}^2)}{4(\omega^2 c_{gg}^2 g_G g_{22} + \omega^2 c_{gd} c_{gg} g_{21} g_G)} = \frac{g_G g_{21}^2 \left(1 + \frac{c_{dgi}^2}{g_{21}^2} \omega^2\right)}{4c_{gg}^2 \left(\frac{c_{gd}}{c_{gg}} g_{21} + g_{22}\right) \omega^2}. \tag{10.120}$$

Zaradi  $\omega^2$  v imenovalcu dobimo upadanje  $U$  s strmino  $-20\text{dB/dek}$ , ki doseže  $0\text{dB}$  pri frekvenci

$$\omega_{\max,a} = \frac{g_{21}}{2c_{gg} \sqrt{r_G \left(\frac{c_{gd}}{c_{gg}} g_{21} + g_{22}\right)}}. \tag{10.121}$$

Števec vnese v asimptotičen potek  $U$  naraščanje s strmino  $20\text{dB/dek}$ , ki se prične pri frekvenci

$$\omega_{\max,b} = -\frac{g_{21}}{c_{dgi}}, \tag{10.122}$$

in kompenzira upadanje, zaradi česar se potek  $U$  za dovolj visoke frekvence izravna. Če velja  $\omega_{\max,b} < \omega_{\max,a}$ , potek nikoli ne doseže  $0\text{dB}$ , kar pa je nefizikalno obnašanje. Vzrok tiči v preveč poenostavljenem modelu. Če v modelu upoštevamo še upornosti  $r_S$  in  $r_D$  ter kapacitivnost  $c_{ds}$ , se upadanje  $U$  nadaljuje, izpeljava  $\omega_{\max}$  pa postane precej zapletena. Kot prvi približek za  $\omega_{\max}$  lahko uporabimo kar  $\omega_{\max,a}$ , ki predstavlja natančen rezultat za vezje na sliki 10.19 (desno spodaj), če zanemarimo  $c_{dgi}$ . Tako velja

$$\omega_{\max} \approx \frac{g_{21}}{2(c_{gs} + c_{gd}) \sqrt{r_G \left(\frac{c_{gd}}{c_{gs} + c_{gd}} g_{21} + g_{22}\right)}}, \tag{10.123}$$

kar pa je enako izrazu, ki smo ga dobili za JFET tranzistor.

**Primer 10.8:** Recimo, da imamo MOS tranzistor v  $0,18\mu\text{m}$  tehnologiji z dimenzijami  $W = 2,5\mu\text{m}$ ,  $L = 0,25\mu\text{m}$  in  $L_{\text{dif}} = 0,5\mu\text{m}$ . Kapacitivnosti takega tranzistorja smo določili v primeru 5.2. Plastna upornost izvora in ponora je  $R_{\square} = 10\Omega$ , upornost priključka vrat pa znaša  $r_G = 85\Omega$ . Admitančna parametra  $g_{21}$  in  $g_{22}$  v delovni točki tranzistorja ( $U_{DS} = 1\text{V}$ ,  $U_{GS} = 0,7\text{V}$ ) znašata  $0,63\text{mS}$  in  $0,93\mu\text{S}$ .

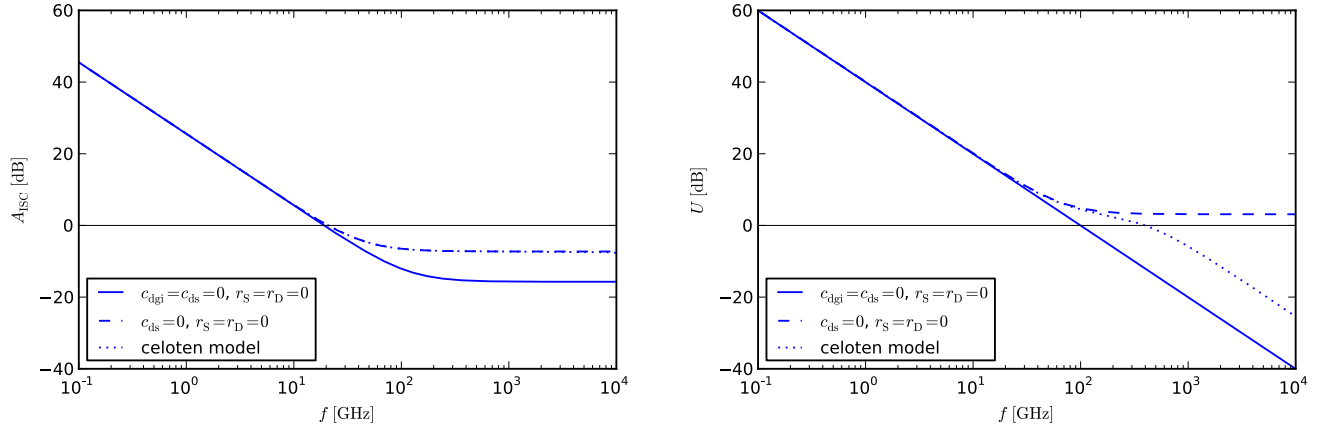
Povzemimo najprej kapacitivnosti iz primera 5.2

$$c_{gs} = c_{ggi} + C_{gso} + C_{gbo} = 3,59\text{fF} + 0,875\text{fF} + 0\text{fF} = 4,47\text{fF}, \tag{10.124}$$

$$c_{gd} = C_{gdo} = 0,875\text{fF}, \tag{10.125}$$

$$c_{ds} \leq C_{D0} = 2,45\text{fF}, \tag{10.126}$$

$$c_{dgi} = -1,44\text{fF}. \tag{10.127}$$



Slika 10.20: Potek kratkostičnega tokovnega ojačenja orientacije s skupnim izvorom (levo) in mere aktivnosti  $U$  (desno) za MOSFET iz primera 10.8.

Upornosti priključkov ponora in izvora lahko določimo s pomočjo plastne upornosti

$$r_S = r_D = R_{\square} \frac{L_{\text{dif}}}{W} = 2\Omega. \quad (10.128)$$

Frekvenca  $f_T$ , kjer kratkostično tokovno ojačenje orientacije s skupnim izvorom doseže 0dB, znaša

$$f_T = \frac{g_{21}}{2\pi \sqrt{(c_{gs} + 2(c_{gd} - c_{dgi}))c_{gs}}} = 19,0\text{GHz}. \quad (10.129)$$

Približek za frekvenco  $f_{\text{max}}$  sledi iz enačbe (10.123).

$$f_{\text{max}} = \frac{\omega_{\text{max}}}{2\pi} \approx \frac{g_{21}}{4\pi(c_{gs} + c_{gd}) \sqrt{r_G \left( \frac{c_{gd}}{c_{gs} + c_{gd}} g_{21} + g_{22} \right)}} = 99,8\text{GHz}. \quad (10.130)$$

Ocenimo še v kolikšni meri je upravičena zanemaritev  $c_{dgi}$ ,  $c_{ds}$ ,  $r_D$  in  $r_S$ , ki nas pripelje do dobljenih vrednosti  $f_T$  in  $f_{\text{max}}$ . Na sliki (10.20) je prikazan potek kratkostičnega tokovnega ojačenja orientacije s skupnim izvorom (levo) in potek Masonove invariante (desno). Polna črta pripada najbolj poenostavljenemu modelu, ki smo ga uporabili v enačbah (10.129) in (10.130).

Poteka, ki sta narisana s črtkano črto, dobimo, če upoštevamo še  $c_{dgi}$ . Vidimo, da se potek  $A_{\text{ISC}}$  za vrednosti nad 0dB le malo spremeni. Nekoliko večja sprememba se pojavi v poteku  $U$ , kjer postanejo odstopanja opazna za frekvence nad 30GHz. Upoštevanje zgolj  $c_{dgi}$  povzroči, da postane potek  $U$  nefizikalen, saj z naraščanjem frekvence ne upada več proti 0 ( $-\infty$ dB).

Nefizikalnost modela odpravimo, če upoštevamo še  $r_S$ ,  $r_D$  in  $c_{ds}$  (pikčast potek  $A_{\text{ISC}}$  in  $U$ ). Vidimo, da se potek  $A_{\text{ISC}}$  skoraj ne spremeni, medtem ko potek  $U$  postane bolj realen (spet upada proti  $-\infty$ dB). Iz slike 10.20 vidimo, da je zanemaritev  $c_{dgi}$ ,  $c_{ds}$ ,  $r_S$  in  $r_D$  upravičena za frekvence do nekaj 10GHz. Upravičenost zanemaritve  $c_{dgi}$  nam potrdi tudi

$$f_{\text{max,b}} = -\frac{g_{21}}{2\pi c_{dgi}} = 70\text{GHz}, \quad (10.131)$$

ki pove, da postane vpliv  $c_{dgi}$  pomemben nad frekvenco 70GHz. S sodobnimi tehnologijami izdelave integriranih vezij postajajo MOSFET tranzistorji čedalje manjši s čimer se manjšajo tudi njihove kapacitivnosti. Zaradi tega se frekvenci  $f_T$  in  $f_{\text{max}}$ , ki odražata teoretično zgornjo frekvenčno mejo za uporabnost tranzistorja, s pojavom novih tehnologij izdelave večata.  $\triangle$

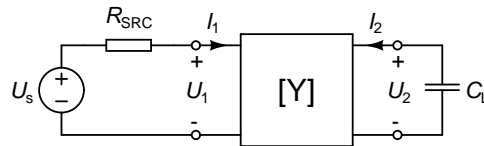
## 10.4 Zgornja frekvenčna meja napetostnega ojačenja

Na zgornji frekvenčni meji ojačenje upade na  $1/\sqrt{2}$  vrednosti v srednjefrekvenčnem območju, oziroma za 3dB. V večini primerov jo določajo kapacitivnosti, ki jih v vezje s sabo prinesejo tranzistorji. Imenovali jih bomo tudi vgrajene kapacitivnosti. Te kapacitivnosti nimajo vpliva na delovanje vezja v nizko- in srednjefrekvenčnem območju, kjer jih obravnavamo kot odprte sponke. Pri določanju zgornje frekvenčne meje bi lahko uporabili podoben postopek, kot pri določanju spodnje frekvenčne meje. Ker pa poli posameznih vgrajenih kapacitivnosti pogosto ležijo blizu skupaj, se bomo v večini primerov raje odločili za pristop z zapisom prevajalne funkcije.

Poleg vgrajenih kapacitivnosti lahko zgornjo frekvenčno mejo vnese tudi kapacitivno breme. Slednje povzroča težave predvsem pri meritvah, saj vsaka merilna oprema s sabo prinese tudi določeno kapacitivnost, ki obremeni vezje in pokvari rezultate meritve.

### 10.4.1 Kapacitivno breme

Zanima nas, kaj se zgodi z izhodno napetostjo, ko vezje obremenimo s kapacitivnim bremenom (slika 10.21, levo). Predpostavimo, da vezje vzbujamo s signalnim virom  $U_s$ , ki ima notranjo impedanco  $R_{SRC}$ . Vgrajene kapacitivnosti tranzistorjev zanemarimo (nadomestimo z odprtimi sponkami), ker nas zanima samo vpliv kapacitivnega bremena na odziv vezja. Vse vezne in premostitvene kapacitivnosti nadomestimo s kratkimi stiki. To nas postavi v srednjefrekvenčno območje, kjer lahko predpostavimo, da so admitančni parametri vezja realni ( $y_{ab} = g_{ab}$ ).



Slika 10.21: Dvovhodno vezje s kapacitivnim bremenom.

Opazovali bomo ojačenje  $A_{US} = U_2/U_s$ , ki odraža vpliv bremena na odziv vezja pri dani napetosti signalnega vira ( $U_s$ ). Podaja ga enačba (2.63), v kateri nadomestimo  $Y_{SRC}$  in  $Y_L$  z  $R_{SRC}^{-1}$  in  $j\omega C_L$ . Dobimo

$$A_{US} = -\frac{R_{SRC}^{-1}g_{21}}{(g_{11} + R_{SRC}^{-1})(g_{22} + j\omega C_L) - g_{12}g_{21}}. \quad (10.132)$$

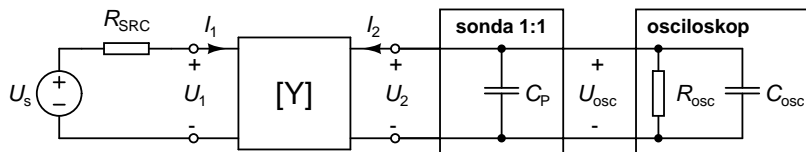
Če imenovalc izraza (10.132) izenačimo z 0 in zamenjamo  $j\omega$  z  $s$ , dobimo enačbo za pol prevajalne funkcije, ki določa zgornjo frekvenčno mejo.

$$p = -C_L^{-1} \left( g_{22} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11} + R_{SRC}^{-1}} \right) = -\frac{Y_{out}}{C_L}, \quad (10.133)$$

$Y_{out}$  je izhodna admitanca dvovhodnega vezja, ki je na vhodni strani zaključeno z  $R_{SRC}$ . Zgornja frekvenčna meja  $A_{US}$  je enaka

$$f_H = \frac{1}{2\pi C_L} \left( g_{22} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11} + R_{SRC}^{-1}} \right). \quad (10.134)$$

Vidimo, da večja bremenska kapacitivnost pomeni nižjo zgornjo frekvenčno mejo, ki jo določa pol  $p$ . Za frekvence v okolici  $f_H$  in nad njo se zaradi tega amplituda odziva ( $U_2$ ) zmanjša. Kapacitivno breme imamo, ko na izhod ojačevalnika priključimo merilno opremo, kot npr. osciloskop. Tega povežemo z vezjem preko sonde. Navadna



Slika 10.22: Priklučitev osciloskopa na vezje s sondo brez slabljenja (1 : 1).

sonda, ki ne slabi signala (sonda z atenuacijo 1 : 1), ima zgolj kapacitivnost  $C_P$ . Vhod osciloskopa se obnaša kot uporovno breme  $R_{osc}$ , ki mu je vzporedno vezana kapacitivnost  $C_{osc}$ .

Če na izhod vezja priklopimo osciloskop s sondo 1 : 1, vezje na svojem izhodu čuti kapacitivno breme  $C_P + C_{osc}$ , ki mu je vzporedno dodana upornost  $R_{osc}$  (slika 10.22). Zgornja frekvenčna meja prevajalne funkcije  $A_{US}$ , ki jo povzročita kapacitivnost sonde in osciloskopa, nastopi pri frekvenci

$$f_H = \frac{1}{2\pi(C_P + C_{osc})} \left( g_{22} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11} + R_{SRC}^{-1}} + R_{osc}^{-1} \right) = \frac{Y_{out} + R_{osc}^{-1}}{2\pi(C_P + C_{osc})} \quad (10.135)$$

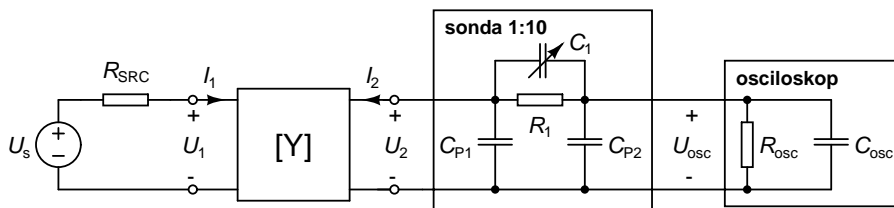
Če je  $f_H$  nižja od zgornje mejne frekvence neobremenjenega vezja, se odziv vezja spremeni, ko priklučimo osciloskop.

**Primer 10.9:** Recimo, da je  $C_P = 90\text{pF}$ ,  $C_{osc} = 20\text{pF}$ ,  $R_{osc} = 1\text{M}\Omega$  in  $Z_{out} = Y_{out}^{-1} = 10\text{k}\Omega$ .

S priklučitvijo osciloskopa preko sonde 1 : 1 vnesemo pol pri frekvenci

$$f_H = \frac{Z_{out}^{-1} + R_{osc}^{-1}}{2\pi(C_P + C_{osc})} = 146\text{kHz}. \quad (10.136)$$

Če ima neobremenjen ojačevalnik zgornjo frekvenčno mejo pri frekvenci, ki je višja od 146kHz, s priklučitvijo osciloskopa preko sonde 1 : 1 spremenimo odziv vezja, saj mu s kapacitivnim bremenom vsilimo zgornjo frekvenčno mejo pri 146kHz.  $\triangle$



Slika 10.23: Priklučitev osciloskopa na vezje s sondo, ki slabi signal za 10-krat (sonda 1 : 10).

Kapacitivnost sonde 1 : 1 je sestavljena iz dveh delov. Manjši del predstavlja kapacitivnost  $C_{P1}$ , ki jo vnaša priključek, s katerim sondo povežemo z vezjem, glavino pa tvori kapacitivnost kabla sonde  $C_{P2}$ . Težave, ki jih povzroči sonda 1 : 1, lahko precej omilimo z uporabo sonde, ki slabi signal (slika 10.23). Taka sonda ima serijsko upornost  $R_1 = 9R_{osc}$ , ki skupaj z vhodno upornostjo osciloskopa tvori pri nizkih frekvencah uporovni delilnik. Ta delilnik slabi signal za faktor  $(R_1 + R_{osc})/R_{osc} = 10$ . Poleg upora se v sondi nahaja tudi nastavljen kondenzator s kapacitivnostjo  $C_1$ . Z nastavljanjem  $C_1$  lahko dosežemo, da velja

$$R_1 C_1 = R_{osc}(C_{osc} + C_{P2}) = R_{osc} C'_{osc}. \quad (10.137)$$

Pri visokih frekvencah je razmerje  $U_{\text{osc}}/U_2$  določeno s kapacitivnim delilnikom, ki ga tvorita  $C_1$  in  $C'_{\text{osc}} = C_{\text{osc}} + C_{\text{P2}}$ . Ob izpolnjenem pogoju (10.137) je delilno razmerje kapacitivnega delilnika enako delilnemu razmerju uporovnega delilnika. Pravimo, da je sonda **kompensirana**. Impedanca vzporedne vezave  $C$  in  $R$  znaša

$$Z_{\text{RC}} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}. \quad (10.138)$$

Na osnovi (10.138) lahko zapišemo prevajalno funkcijo  $U_{\text{osc}}/U_2$  za kompensirano sondo, ki jo obravnavamo kot delilnik napetosti sestavljen iz dveh impedanc oblike  $Z_{\text{RC}}$ .

$$\frac{U_{\text{osc}}}{U_2} = \frac{\frac{R_{\text{osc}}}{1 + j\omega R_{\text{osc}} C'_{\text{osc}}}}{\frac{R_{\text{osc}}}{1 + j\omega R_{\text{osc}} C'_{\text{osc}}} + \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1}} = \frac{R_{\text{osc}}}{R_{\text{osc}} + R_1} = \frac{1}{10}. \quad (10.139)$$

Vidimo, da je razmerje  $U_{\text{osc}}/U_2$  neodvisno od frekvence in enako  $1/10$ . Osciloskop torej vidi za 10-krat zmanjšan signal, ki ga sonda zajame na izhodu vezja. Poglejmo še, kaj čuti vezje na svojih sponkah. Breme vezja je sestavljeno iz kapacitivnosti  $C_{\text{P1}}$  in impedance  $Z$ . Slednjo tvorijo  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $C_{\text{P2}}$ ,  $R_{\text{osc}}$  in  $C_{\text{osc}}$ .

$$Z = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1} + \frac{R_{\text{osc}}}{1 + j\omega R_{\text{osc}} (C_{\text{P2}} + C_{\text{osc}})} = \frac{R_1 + R_{\text{osc}}}{1 + j\omega R_1 C_1} = \frac{R_1 + R_{\text{osc}}}{1 + j\omega (R_1 + R_{\text{osc}}) \frac{R_1}{R_1 + R_{\text{osc}}} C_1} \quad (10.140)$$

Če vpeljemo  $C' = R_1 C_1 / (R_1 + R_{\text{osc}})$  in  $R' = R_1 + R_{\text{osc}}$ , lahko pišemo

$$Z = \frac{R' \cdot \frac{1}{j\omega C'}}{R' + \frac{1}{j\omega C'}}. \quad (10.141)$$

Impedanca  $Z$  je enaka impedanci vzporedne vezave  $R_1 + R_{\text{osc}}$  in  $C'$ . Vezje na svojih sponkah čuti vzporedno vezavo kapacitivnosti  $C_{\text{P1}} + C'$  in upornosti  $R_1 + R_{\text{osc}}$ . Pri kompensirani sondi  $1 : 10$  je kapacitivnost  $C'$  za 10-krat manjša od  $C_{\text{P2}} + C_{\text{osc}}$ , upornost  $R_1 + R_{\text{osc}}$  pa za 10-krat večja od vhodne upornosti osciloskopa. Vezje je zato mnogo manj obremenjeno, kot pri sondi  $1 : 1$ . Zaradi manjše bremenske kapacitivnosti je tudi vsiljena zgornja frekvenčna meja višja in znaša

$$f_{\text{H}} = \frac{Y_{\text{out}} + (R_1 + R_{\text{osc}})^{-1}}{2\pi(C_{\text{P1}} + C')}. \quad (10.142)$$

**Primer 10.10:** Vezje iz primera 10.9 obremenimo z enakim osciloskopom in kompensirano sondo  $1 : 10$ , za katero velja  $C_{\text{P1}} = 6,7\text{pF}$  in  $C_{\text{P2}} = 83,3\text{pF}$ . Določimo zgornjo frekvenčno mejo, ki jo s tem vsilimo vezju.

Razmerje  $R_1 / (R_1 + R_{\text{osc}})$  je enako  $1/10$ . Kapacitivnost  $C'$  znaša  $(C_{\text{P2}} + C_{\text{osc}}) / 10 = 10,3\text{pF}$ . Vezje kot svoje breme čuti upornost  $R_1 + R_{\text{osc}} = 10\text{M}\Omega$  in kapacitivnost  $C_{\text{P1}} + C' = 17\text{pF}$ . S priključitvijo osciloskopa preko sonde  $1 : 1$  vnesemo pol pri frekvenci

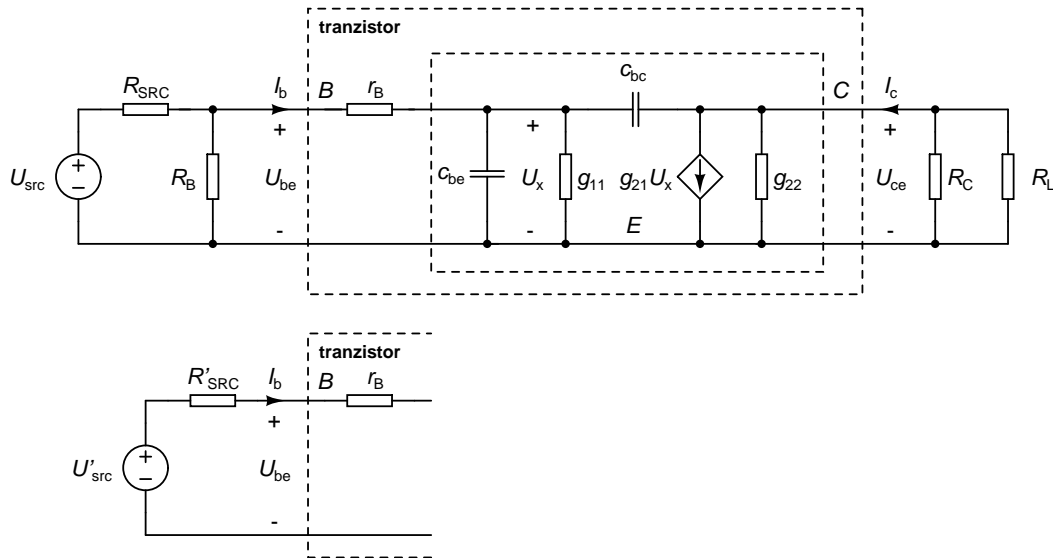
$$f_{\text{H}} = \frac{Z_{\text{out}}^{-1} + R_{\text{osc}}^{-1}}{2\pi(C_{\text{P}} + C_{\text{osc}})} = 935\text{kHz}, \quad (10.143)$$

kar je več kot 6-krat boljše, kot s sondo  $1 : 1$ . △

Opazovanje napetosti na mestih, kjer je izhodna impedanca vezja ( $Z_{\text{out}}$ ) visoka, je težavna naloga, saj kapacitivna obremenitev, ki jo vnesejo sonde, v večini primerov zniža zgornjo frekvenčno mejo vezja in pokvari rezultat meritve.

### 10.4.2 Orientacija s skupnim emitorjem (izvorom)

Pri določanju zgornje frekvenčne meje ojačevalnika v orientaciji s skupnim emitorjem uporabimo model tranzistorja na sliki 10.14 (levo). Izhajamo iz vezja na sliki 8.3 (levo) v katero vstavimo model tranzistorja. Dobimo vezje na sliki 10.24 (zgoraj).



Slika 10.24: Model za majhne signale ojačevalnika z bipolarnim tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem (zgoraj). Notranja črtkana črta obdaja vezje, ki ga opisuje enačba (10.144). Pretvorba  $U_{src}$ ,  $R_{SRC}$  in  $R_B$  v Théveninovo nadomestno vezje (spodaj).

Podvezje, ki ga na sliki 10.24 (zgoraj) obdaja notranja črtkana črta, je z izjemo obeh kapacitivnosti tranzistorja enako modelu, ki smo ga uporabili v srednjefrekvenčnem območju. Vhodni veličini v to podvezje sta  $U_x$  in  $I_b$ , izhodni pa  $U_{ce}$  in  $I_c$ . Enačbi, ki povezujeta te štiri veličine, lahko zapišemo v matrični obliki.

$$\begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11E} & y_{12E} \\ y_{21E} & y_{22E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} + j\omega(c_{be} + c_{bc}) & -j\omega c_{bc} \\ g_{21} - j\omega c_{bc} & g_{22} + j\omega c_{bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_{ce} \end{bmatrix}. \quad (10.144)$$

Elemente  $U_{src}$ ,  $R_{SRC}$  in  $R_B$  lahko pretvorimo v Théveninovo nadomestno vezje (slika 10.24, spodaj).

$$U'_{src} = \frac{R_B}{R_{SRC} + R_B} U_{src}, \quad (10.145)$$

$$R'_{SRC} = \frac{1}{R_{SRC}^{-1} + R_B^{-1}}. \quad (10.146)$$

Zanima nas napetostno ojačenje  $A_{US} = U_{ce}/U_{src}$ , ki ga s pomočjo (10.145) izrazimo kot

$$A_{US} = \frac{U_{ce}}{U_{src}} = \frac{U'_{src}}{U_{src}} \cdot \frac{U_{ce}}{U'_{src}}. \quad (10.147)$$

Prvi ulomek je neodvisen od frekvence, drugi pa predstavlja napetostno ojačenje z upoštevanjem notranje admi-

tance vira (2.63). Pri določanju polov in ničel se bomo osredotočili na slednjega.

$$\begin{aligned}\frac{U_{ce}}{U'_{src}} &= -\frac{y_{21E}(R'_{SRC} + r_B)^{-1}}{(y_{11E} + (R'_{SRC} + r_B)^{-1})(y_{22E} + R_C^{-1} + R_L^{-1}) - y_{12E}y_{21E}} \\ &= \frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1}}{y_{11E} + (R'_{SRC} + r_B)^{-1} + Ay_{12E}} \cdot \underbrace{\frac{-y_{21E}}{y_{22E} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}}_{A=U_{ce}/U_x}.\end{aligned}\quad (10.148)$$

Vstavimo admitančne parametre iz enačbe (10.144), zamenjamo  $j\omega$  s kompleksno frekvenco  $s$  in dobimo

$$\frac{U_{ce}}{U'_{src}} = \frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1}}{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} + g_{11} + s(c_{be} + (1 - A)c_{bc})} \cdot \underbrace{\frac{-g_{21} + sc_{bc}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1} + sc_{bc}}}_A.\quad (10.149)$$

Drugi ulomek ( $A$ ) ima pol

$$p_2 = -\frac{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}{c_{bc}}.\quad (10.150)$$

Predpostavimo, da pol  $p_1$  prvega ulomka v izrazu (10.149) nastopi pri mnogo nižji frekvenci, kot pol  $p_2$  izraza  $A$ . Tedaj velja, da je v okolici frekvence pola  $p_1$  vrednost  $A = U_{ce}/U_x$  še neodvisna od frekvence in enaka napetostnemu ojačenju v srednjefrekvenčnem območju ( $A_0$ ), kot smo ga določili v poglavju 8.1, kjer smo upornost  $r_B$  zanemarili ( $r_B = 0$ ).

$$A_0 = A|_{s=0} = -\frac{g_{21}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}.\quad (10.151)$$

Pol  $p_1$  je zato enak

$$p_1 = -\frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} + g_{11}}{c_{be} + (1 - A_0)c_{bc}}.\quad (10.152)$$

Ob predpostavki  $-p_1 < -p_2$  zgornjo frekvenčno mejo določa pol  $p_1$ .

$$f_H = -\frac{p_1}{2\pi} = \frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} + g_{11}}{2\pi(c_{be} + (1 - A_0)c_{bc})}.\quad (10.153)$$

Vidimo, da v imenovalcu nastopa kapacitivnost  $c_{bc}$  pomnožena z  $1 - A_0$ . Čeprav je  $c_{bc}$  precej manjša od  $c_{be}$ , pa je  $(1 - A_0)c_{bc}$  ponavadi enakega reda velikosti ali celo večja, saj ima tranzistor v orientaciji s skupnim emitorjem veliko negativno napetostno ojačenje. Pojavu, pri katerem se kapacitivnost  $c_{bc}$  preslika na vhodno stran povečana za  $1 - A_0$ , pravimo **Millerjev pojav**, preslikavi pa **Millerjeva preslikava**.

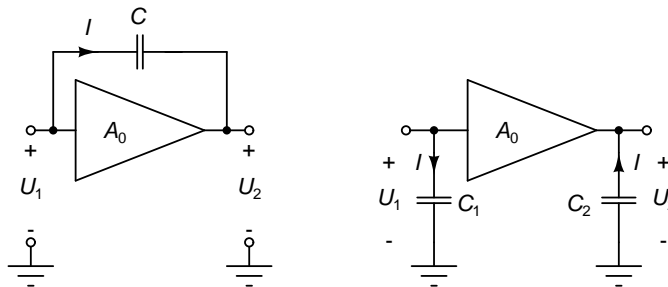
Millerjeva preslikava kapacitivnosti kondenzatorja, ki je vezan med vhod in izhod ojačevalnika s frekvenčno neodvisnim razmerjem  $U_2/U_1 = A_0$  (slika 10.25, levo), nam da kondenzatorja  $C_1$  in  $C_2$  (slika 10.25, desno). Zahtevajmo, da tokovi ostanejo enaki tudi po opravljeni preslikavi. Veljati mora

$$I = j\omega C(U_1 - U_2) = j\omega C_1 U_1 = -j\omega C_2 U_2.\quad (10.154)$$

Odtod sledi

$$C_1 = (1 - A_0)C,\quad (10.155)$$

$$C_2 = (1 - A_0^{-1})C.\quad (10.156)$$

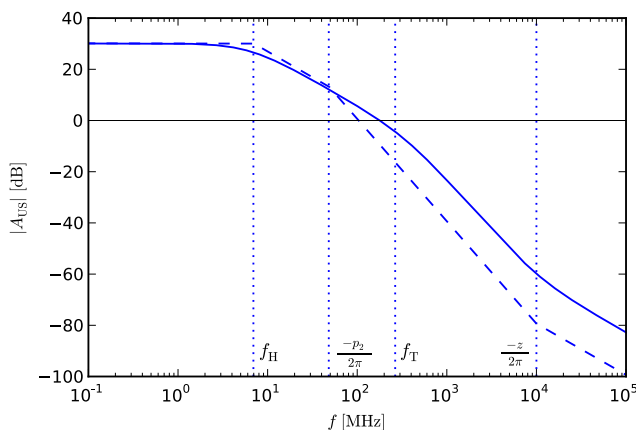


Slika 10.25: K izpeljavi Millerjeve preslikave.

Pri velikih negativnih ojačenjih se kapacitivnost  $C$  preslika na vhod v  $C_1 \gg C$ . Zaradi Millerjeve preslikave je zgornja frekvenčna meja napetostnega ojačenja orientacije s skupnim emitorjem dokaj nizka, saj jo v veliki meri določa za faktor  $1 - A_0$  povečana kapacitivnost  $c_{bc}$ . Na zgornjo frekvenčno mejo lahko vplivamo z izbiro delovne točke. Ker je napetost  $U_{CB}$  zaporna napetost kolektorskega spoja, lahko z njenim večanjem (večja napetost  $U_{CE}$ ) zmanjšamo  $c_{bc}$  in s tem zvišamo zgornjo frekvenčno mejo. Kapacitivnost  $c_{be}$  je enaka  $\tau_F g_{21}$ , zato je ne moremo zmanjšati, ne da bi zmanjšali  $g_{21}$  in s tem tudi ojačenja v srednjefrekvenčnem območju. Manjši  $g_{21}$  pomeni tudi manjši  $g_{11} = g_{21}/\beta$ , in s tem nekoliko manjši števec izraza (10.153).

Vse ugotovitve veljajo tudi za ojačevalnike z JFET in MOSFET tranzistorji v orientaciji s skupnim izvorom, če upoštevamo  $g_{11} = 0$  in ustrezno preimenujemo elemente vezja. Glavna razlika nastopi pri odvisnosti kapacitivnosti  $c_{gs}$  in  $c_{gd}$  od delovne točke, saj  $c_{gs}$  ni več neposredno povezana s parametrom  $g_{21}$ .

**Primer 10.11:** Določimo zgornjo frekvenčno mejo ojačenja  $A_{US} = U_{ce}/U_{src}$  ojačevalnika s tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem. Elementi vezja so  $R_{SRC} = 100\Omega$ ,  $R_B = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 10k\Omega$ ,  $R_C = 5k\Omega$  in  $R_L = 1k\Omega$ . Admitančni parametri in kapacitivnosti tranzistorja v delovni točki znašajo  $g_{11} = 0.1mS$ ,  $g_{21} = 40mS$ ,  $g_{22} = 10\mu S$ ,  $c_{be} = 20pF$  in  $c_{bc} = 4pF$ . Upornost baznega priključka je  $r_B = 50\Omega$ .



Slika 10.26: Potek amplitudnega dela ojačenja  $A_U$  za ojačevalnik s tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem (polna črta) in asimptotičen potek, ki ga določajo  $p_1$ ,  $p_2$  in  $z$  (črtkana črta).

Théveninova nadomestna upornost znaša  $R'_{SRC} = 99\Omega$ , ojačenje  $A_0$ , ki ga potrebujemo zaradi Millerjeve preslikave, pa

$$A_0 = -\frac{g_{21}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} = -33,1. \quad (10.157)$$



V enačbi za zgornjo frekvenčno mejo prevladuje vpliv  $(1 - A_0)c_{bc} = 136\text{pF}$ .

$$f_H = -\frac{p_1}{2\pi} = \frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} + g_{11}}{2\pi(c_{be} + (1 - A_0)c_{bc})} = 6,94\text{MHz}. \quad (10.158)$$

Pol  $p_2$  nastopi pri frekvenci

$$-\frac{p_2}{2\pi} = \frac{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}{2\pi c_{bc}} = 48,1\text{MHz}. \quad (10.159)$$

Vidimo, da velja  $-p_1 < -p_2$ . Prevaljalna funkcija  $A_{US}$  ima ničlo pri

$$z = \frac{g_{21}}{c_{bc}} = 2\pi \cdot 10\text{GHz}, \quad (10.160)$$

ki pa ne vpliva bistveno na potek ojačenja, saj nastopi pri zelo visoki frekvenci, ko je ojačenje že precej manjše od 0dB. Kratkostično tokovno ojačenje orientacije s skupnim emitorjem doseže 0dB (enačba (10.86)) pri frekvenci

$$f_T = \frac{g_{21}}{c_{be} + c_{bc}} = 265\text{MHz}. \quad (10.161)$$

Pasovna širina (zgornja frekvenčna meja) napetostnega ojačenja ojačevalnika s tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem je precej nižja od  $f_T$ . Ojačenje pri nizkih frekvencah je enako

$$A_{US}|_{s=0} = -\frac{R_B}{R_{SRC} + R_B} \cdot \frac{g_{21}(R'_{SRC} + r_B)^{-1}}{((R'_{SRC} + r_B)^{-1} + g_{11})(g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1})} = -32,2, \quad (10.162)$$

kar ustreza 30,2dB. Potek amplitudnega dela ojačenja je na sliki 10.26. Vidimo, da se pol  $p_1$  dobro ujema z zgornjo frekvenčno mejo. S potekom se dobro ujema tudi položaj ničle  $z$ , kjer upadanje preide iz  $-40\text{dB/dek}$  v  $-20\text{dB/dek}$ . Pač pa je frekvenca, pri kateri nastopi pol  $p_2$ , precej drugačna od tiste, ki smo jo določili z enačbo (10.159). Vzrok tiči v bližini pola  $p_1$ , ki preko imenovalca prvega ulomka v (10.149) vpliva na lego pola  $p_2$ .  $\triangle$

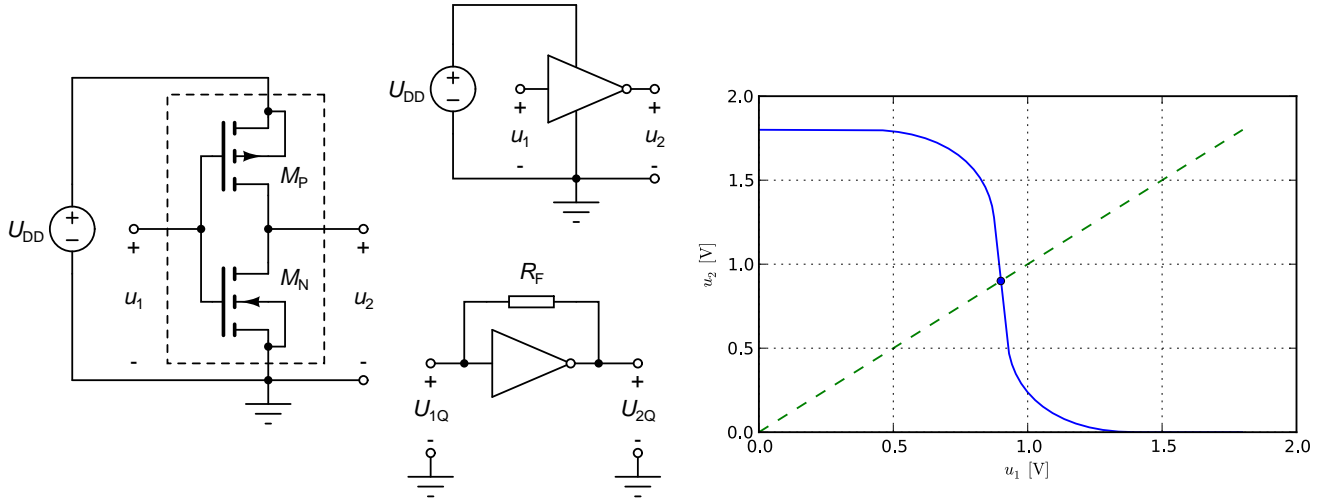
**Primer 10.12:** Določimo nadomestno vezje za majhne signale neobremenjenega CMOS inverterja, katerega shema, simbol in karakteristika so podani na sliki 10.27. V delovni točki  $U_{1Q} = U_{2Q}$ , ki jo vzpostavimo z uporom  $R_F = 1\text{M}\Omega$  (slika 10.27, na sredini spodaj), določimo elemente nadomestnega vezja in ga poenostavimo ob predpostavki, da je upornost priključka vrat enaka za oba tranzistorja ( $r_{Gp} = r_{Gn} = 80\Omega$ ). Oba tranzistorja imata parametre  $K_N = K_P = K = 0,11\text{mA/V}^2$ ,  $\lambda_N = \lambda_P = \lambda = 0,35\text{V}^{-1}$ ,  $U_{TN} = U_{TP} = U_T = 0,4\text{V}$ ,  $c_{gsn} = c_{gsp} = 4,47\text{fF}$ ,  $c_{gdn} = c_{gdp} = 0,875\text{fF}$  in  $c_{dsn} = c_{dsp} = 2,45\text{fF}$ . Napajalna napetost znaša  $U_{DD} = 1,8\text{V}$ .

CMOS inverter je sestavljen iz enega NMOS ( $M_N$ ) in enega PMOS ( $M_P$ ) tranzistorja z induciranim kanalom, ki ju napaja vir  $U_{DD}$  (slika 10.27, levo). Simbol inverterja je prikazan na sliki 10.27 (na sredini zgoraj). V shemah pogosto izpustimo napajalni vir, kar pa ne pomeni, da inverter ni napajen. Odvisnost izhodne napetosti ( $u_2$ ) od vhodne napetosti ( $u_1$ ) je prikazana na sliki 10.27 (desno) s polno črto.

Delovno točko  $U_{1Q} = U_{2Q}$  vzpostavimo z uporom  $R_F$ , ki je vezan med vhod in izhod inverterja. Zaradi visoke vhodne upornosti MOS tranzistorja za  $R_F$  izberemo veliko vrednost (reda velikosti  $1\text{M}\Omega$ ), kar pomeni, da ga lahko v nadomestnem vezju za majhne signale zanemarimo. Delovna točka  $U_{1Q} = U_{2Q}$  se nahaja na presečišču premice  $u_1 = u_2$  (črtkana črta) in karakteristike inverterja (slika 10.27, desno).

Pri določanju karakteristike izhajamo iz zahteve, da morata biti v neobremenjenem inverterju tokova ponorov obeh tranzistorjev enaka. Pričakujemo, da se bo delovna točka  $U_{1Q} = U_{2Q}$  nahajala blizu polovice napajalne napetosti. Torej sta oba tranzistorja odprta in velja  $U_{DS} = U_{GS}$ , kar pomeni, da tranzistorja delujeta v področju nasičenja.

$$\frac{K_N}{2}(U_{1Q} - U_{TN})^2(1 + \lambda_N U_{2Q}) = \frac{K_P}{2}(U_{DD} - U_{1Q} - U_{TP})^2(1 + \lambda_P(U_{DD} - U_{2Q})). \quad (10.163)$$



Slika 10.27: CMOS inverter z napajanjem (levo), simbolom (na sredini zgoraj) in nastavljanjem delovne točke  $U_{1Q} = U_{2Q}$  (na sredini spodaj). Karakteristika inverterja (desno) je narisana s polno črto, premica  $u_1 = u_2$  pa s črtkano črto. Delovna točka je označena s krožcem.

Če zanemarimo nagib karakteristik v področju nasičenja ( $\lambda \approx 0$ ), se enačba poenostavi v

$$\frac{K_N}{2}(U_{1Q} - U_{TN})^2 = \frac{K_P}{2}(U_{DD} - U_{1Q} - U_{TP})^2. \quad (10.164)$$

Ko upoštevamo  $K_P = K_N$ , dobimo

$$U_{1Q} - U_{TN} = U_{DD} - U_{1Q} - U_{TP}, \quad (10.165)$$

od koder sledi

$$U_{1Q} = U_{2Q} = \frac{U_{DD} - U_{TP} + U_{TN}}{2} = \frac{U_{DD}}{2} = 0,9V. \quad (10.166)$$

Tok ponora obeh tranzistorjev znaša v delovni točki

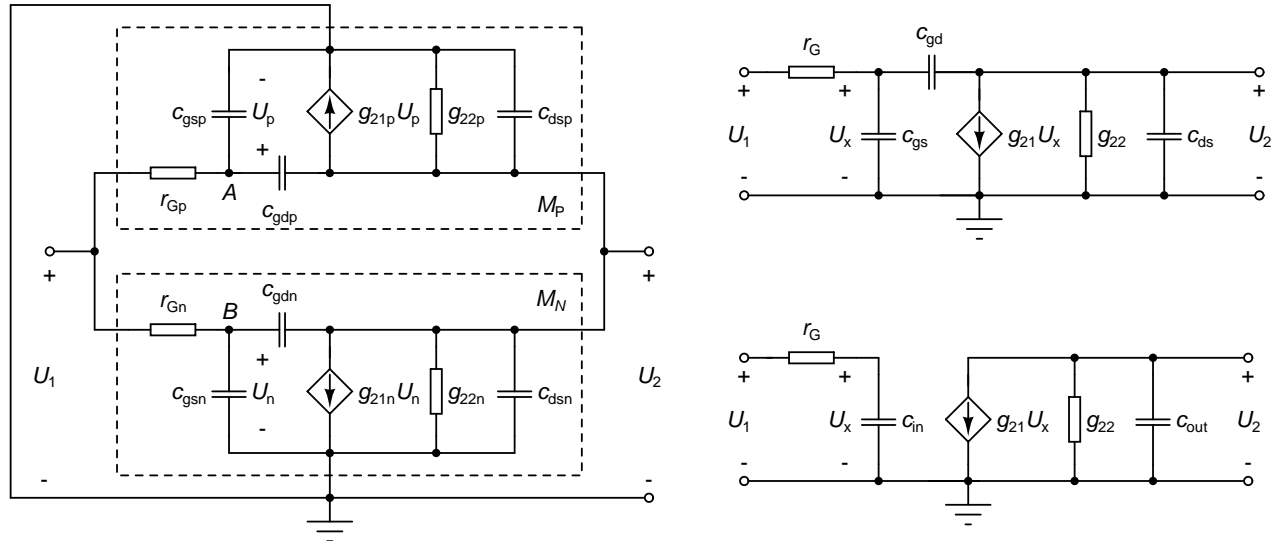
$$I_D = \frac{K}{2}(U_{1Q} - U_T)^2 = \frac{K}{2} \left( \frac{U_{DD}}{2} - U_T \right)^2 = 18,1\mu A. \quad (10.167)$$

Sedaj lahko izračunamo admitančne parametre obeh tranzistorjev. Pri tem upoštevamo, da sta zaradi (10.164) napetosti  $U_{DS}$  in  $U_{GS}$  obeh tranzistorjev do predznaka enaki  $U_{1Q}$ .

$$g_{21p} = g_{21n} = \frac{2I_D}{U_{1Q} - U_T} = 72,3\mu S, \quad (10.168)$$

$$g_{22p} = g_{22n} = \frac{\lambda I_D}{1 + \lambda U_{2Q}} = 4,81\mu S. \quad (10.169)$$

Na osnovi povedanega lahko zgradimo model CMOS inverterja za majhne signale, ki ga prikazuje slika 10.28 (levo). Pri tem uporabimo poenostavljen model MOS tranzistorja (slika 10.19, desno spodaj), v katerem zanemarimo neregularnost intrinzičnih kapacitivnosti ( $c_{dgi}$ ), ki prične vplivati šele pri zelo visokih frekvencah.



Slika 10.28: Model CMOS inverterja za majhne signale (levo) se močno poenostavi, če zanemarimo  $r_G$  (desno zgoraj). Z Millerjevo preslikavo lahko dobimo še enostavnejši model, ki je veljaven v srednjefrekvenčnem območju (desno spodaj).

Ker sta vezji, ki ju obdaja črtkana črta, enaki in imata enako vzbujanje, sta potenciala vozlišč A in B enaka. Zato ju lahko povežemo, kar pomeni, da se elementi zgornjega vezja ( $M_P$ ) vzporedno pridružijo elementom spodnjega vezja ( $M_N$ ). Dobimo poenostavljeno vezje (slika 10.28, desno zgoraj) z elementi

$$g_{21} = g_{21p} + g_{21n} = 145\mu\text{S}, \quad (10.170)$$

$$g_{22} = g_{22p} + g_{22n} = 9,63\mu\text{S}, \quad (10.171)$$

$$c_{gs} = c_{gsp} + c_{gsn} = 8,93\text{fF}, \quad (10.172)$$

$$c_{gd} = c_{gdp} + c_{gdn} = 1,75\text{fF}, \quad (10.173)$$

$$c_{ds} = c_{dsp} + c_{dsn} = 4,90\text{fF}, \quad (10.174)$$

$$r_G = \frac{r_{Gp}}{2} = \frac{r_{Gn}}{2} = 40\Omega. \quad (10.175)$$

V srednjefrekvenčnem območju je napetostno ojačenje neobremenjenega inverterja v delovni točki enako

$$A_0 = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{s=0} = -\frac{g_{21}}{g_{22}} = -15,0 \quad (10.176)$$

Za frekvence, kjer je ojačenje frekvenčno neodvisno, lahko kapacitivnost  $c_{gd}$  z Millerjevo transformacijo preslikamo na vhod in izhod inverterja, kjer se pridruži  $c_{gs}$  in  $c_{ds}$ . Dobimo model na sliki 10.28 (desno spodaj). Kapacitivnosti  $c_{in}$  in  $c_{out}$  sta enaki

$$c_{in} = c_{gs} + (1 - A_0)c_{gd} = 37,0\text{fF}, \quad (10.177)$$

$$c_{out} = c_{ds} + (1 - A_0^{-1})c_{gd} = 6,77\text{fF}. \quad (10.178)$$

Vidimo, da se CMOS inverter obnaša podobno, kot tranzistor v orientaciji s skupnim izvorom. Zgornjo frekvenčno mejo neobremenjenega inverterja krmiljenega z idealnim napetostnim virom ( $R_{SRC} = 0$ ), določimo s pomočjo polov, ki ju vneseta  $c_{in}$  in  $c_{out}$ . Pripadajoči frekvenci polov sta

$$f_{c_{in}} = \frac{1}{2\pi r_G c_{in}} = 172\text{THz}, \quad (10.179)$$

$$f_{c_{out}} = \frac{g_{22}}{2\pi c_{out}} = 226\text{MHz}. \quad (10.180)$$

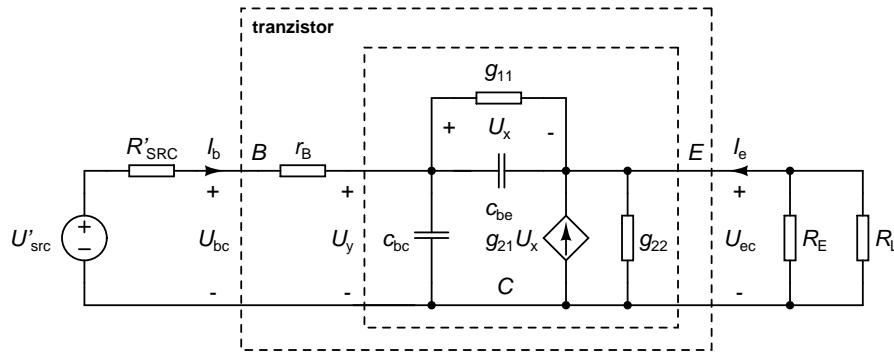
Zgornjo frekvenčno mejo  $f_H$  določa  $c_{out}$ . Če inverter obremenimo s kapacitivnim bremenom  $C_L = 120\text{fF}$  (kapacitivnost  $c_{in}$  treh inverterjev), se zgornja frekvenčna meja zniža na

$$f'_H = \frac{g_{22}}{2\pi(c_{out} + C_L)} = 12,1\text{MHz.} \quad (10.181)$$

△

### 10.4.3 Orientacija s skupnim kolektorjem (ponorom)

Pri orientaciji s skupnim kolektorjem izhajamo iz vezja na sliki 8.20. Namesto tranzistorja vstavimo model s slike 10.14 (levo) in vhodni del vezja pretvorimo v Théveninovo nadomestno vezje, kot smo to storili na sliki 10.24 (enačbi (10.145) in (10.146)). Dobimo vezje na sliki 10.29.



Slika 10.29: Model za majhne signale za ojačevalnik z bipolarnim tranzistorjem v orientaciji s skupnim kolektorjem. Notranja črtkana črta obdaja vezje, ki ga opisuje enačba (10.182).

S pomočjo nedoločene admitančne matrike lahko iz enačbe (10.144) dobimo zvezo med  $U_y$ ,  $U_{ec}$ ,  $I_b$  in  $I_e$ . Ta enačba ustreza vezju, ki je na sliki (10.29) obdano z notranjo črtkano črto.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_b \\ I_e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_{11C} & y_{12C} \\ y_{21C} & y_{22C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_y \\ U_{ec} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_{11} + j\omega(c_{be} + c_{bc}) & -(g_{11} + j\omega c_{be}) \\ -(g_{11} + g_{21} + j\omega c_{be}) & g_{11} + g_{21} + g_{22} + j\omega c_{be} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_y \\ U_{ec} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10.182)$$

Podobno, kot pri orientaciji s skupnim emitorjem, lahko zapišemo

$$A_{US} = \frac{U_{ec}}{U_{src}} = \frac{U'_{src}}{U_{src}} \cdot \frac{U_{ec}}{U'_{src}}. \quad (10.183)$$

Ker je prvi ulomek neodvisen od frekvence, se bomo osredotočili na drugega.

$$\frac{U_{ec}}{U'_{src}} = \frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1}}{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} + y_{11C} + y_{12C}A} \cdot \frac{-y_{21C}}{\underbrace{y_{22C} + R_E^{-1} + R_L^{-1}}_{A=U_{ec}/U_y}}. \quad (10.184)$$

Vstavimo admitančne parametre iz enačbe (10.182), zamenjamo  $j\omega$  s kompleksno frekvenco  $s$  in dobimo

$$\frac{U_{ec}}{U'_{src}} = \frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1}A}{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} + (1 - A)g_{11} + s((1 - A)c_{be} + c_{bc})}, \quad (10.185)$$

kjer je ojačenje  $A$  definirano kot

$$A = \frac{g_{11} + g_{21} + sc_{be}}{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1} + sc_{be}}. \quad (10.186)$$

Ojačenje  $A$  ima pol

$$p_2 = -\frac{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}}{c_{be}}. \quad (10.187)$$

in je pri nizkih frekvencah malo manjše od 1 (če sta  $R_E$  in  $R_L$  dosti večja od  $g_{21}^{-1}$ ). Pri visokih frekvencah se njegova vrednost približuje 1. Spet imamo opravka z Millerjevim pojavom, ki v tem primeru preslika  $c_{be}$  in  $g_{11}$ . Ker je  $A$  ves čas blizu 1, sta člena  $(1 - A)g_{11}$  in  $(1 - A)c_{be}$  v imenovalcu (10.185) majhna. Ojačenje  $A$  je pri nizkih frekvencah enako

$$A_0 = A|_{s=0} = \frac{g_{11} + g_{21}}{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (10.188)$$

Iz imenovalca izraza (10.185) dobimo pol  $p_1$ .

$$p_1 = -\frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} + (1 - A_0)g_{11}}{(1 - A_0)c_{be} + c_{bc}}. \quad (10.189)$$

Ker tranzistor v orientaciji s skupnim kolektorjem ponavadi uporabljamo kot napetostni sledilnik, je upornost  $R_{SRC}$  in z njo  $R'_{SRC}$  precej višja od  $g_{21}^{-1}$ . Zaradi tega v večini primerov pol  $p_1$  nastopi pri nižji frekvenci, kot pol  $p_2$ . Zgornja frekvenčna meja tedaj znaša

$$f_H = \frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} + (1 - A_0)g_{11}}{2\pi((1 - A_0)c_{be} + c_{bc})}. \quad (10.190)$$

Ker imamo v imenovalcu močno zmanjšan  $c_{be}$  je zgornja frekvenčna meja precej višja, kot za ojačevalnik s tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem. Dobljene rezultate lahko uporabimo tudi za ojačevalnik z JFET ali MOSFET tranzistorjem v orientaciji s skupnim ponorom, če upoštevamo  $g_{11} = 0$  in ustrezno preimenujemo elemente vezja.

**Primer 10.13:** Določimo zgornjo frekvenčno mejo ojačenja  $A_{US} = U_{ec}/U_{src}$  ojačevalnika s tranzistorjem v orientaciji s skupnim kolektorjem. Elementi vezja so  $R_{SRC} = 500\Omega$ ,  $R_B = R_1R_2/(R_1 + R_2) = 50k\Omega$ ,  $R_E = 5k\Omega$ , in  $R_L = 200\Omega$ . Admitančni parametri in kapacitivnosti tranzistorja v delovni točki znašajo  $g_{11} = 0,1mS$ ,  $g_{21} = 40mS$ ,  $g_{22} = 10\mu S$ ,  $c_{be} = 20pF$  in  $c_{bc} = 4pF$ . Upornost baznega priključka je  $r_B = 50\Omega$ .

Iz enačbe (10.146) določimo  $R'_{SRC} = 495\Omega$ . Napetostno ojačenje  $A_0$  je enako

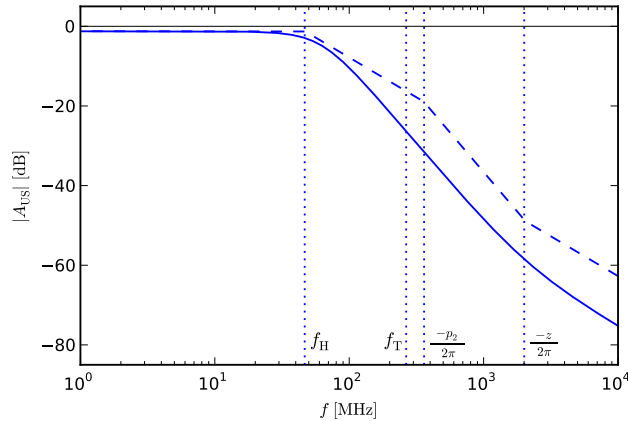
$$A_0 = \frac{g_{11} + g_{21}}{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}} = 0,885. \quad (10.191)$$

Vidimo, da se  $c_{be} = 20pF$  zaradi Millerjevega pojava zmanjša na  $(1 - A_0)c_{be} = 2,30pF$  in postane primerljiva s  $c_{bc} = 4pF$ . Zgornja frekvenčna meja znaša

$$f_H = -\frac{p_1}{2\pi} = \frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} + (1 - A_0)g_{11}}{2\pi((1 - A_0)c_{be} + c_{bc})} = 46,6MHz. \quad (10.192)$$

Pol  $p_2$  nastopi pri frekvenci

$$-\frac{p_2}{2\pi} = \frac{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + R_L^{-1}}{2\pi c_{be}} = 361MHz. \quad (10.193)$$



Slika 10.30: Potek amplitudnega dela ojačenja  $A_{US}$  za ojačevalnik s tranzistorjem v orientaciji s skupnim kolektorjem (polna črta) in asimptotičen potek, ki ga določajo  $p_1$ ,  $p_2$  in  $z$  (črtkana črta).

Vidimo, da velja  $-p_1 < -p_2$ , kar potrди našo predpostavko, da pol  $p_1$  določa zgornjo frekvenčno mejo. Zgornja frekvenčna meja napetostnega ojačenja je precej višja, kot pri orientaciji s skupnim emitorjem. Prevajalna funkcija  $A_{US}$  ima ničlo pri

$$z = -\frac{g_{11} + g_{21}}{c_{be}} = -2\pi \cdot 2,01\text{GHz}, \quad (10.194)$$

ki jo dobimo iz izraza (10.186). Ojačenje pri nizkih frekvencah znaša

$$A_{US}|_{s=0} = \frac{R_B}{R_{SRC} + R_B} \cdot \frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} A_0}{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} + (1 - A_U)g_{11}} = 0,871, \quad (10.195)$$

kar ustreza  $-1,20\text{dB}$ . Potek amplitudnega dela ojačenja  $A_{US}$  je na sliki 10.30. Vidimo, da se pol  $p_1$  dobro ujema z zgornjo frekvenčno mejo. S potekom se dobro ujema tudi položaj ničle  $z$ , kjer upadanje preide iz  $-40\text{dB/dek}$  v  $-20\text{dB/dek}$ . Dejanski položaj pola  $p_2$  pa je precej drugačen od izračunanega (10.193).  $\triangle$

#### 10.4.4 Orientacija s skupno bazo (vrati)

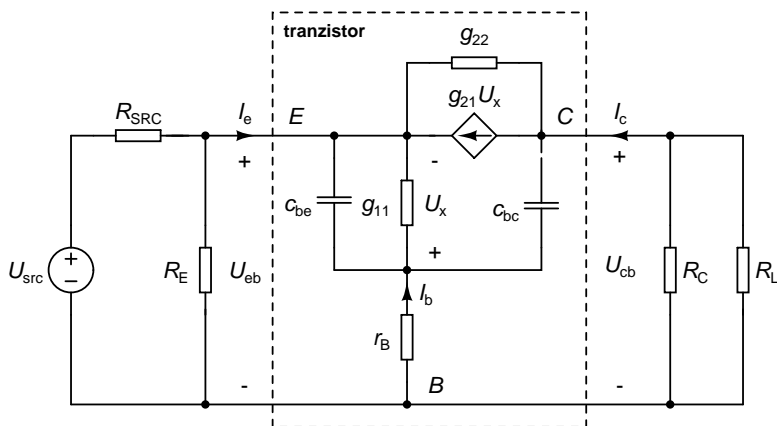
Pri orientaciji s skupno bazo izhajamo iz vezja na sliki 8.11 v katero vstavimo model tranzistorja (slika 10.14, levo). Dobimo vezje na sliki 10.31. Analiza tega vezja vodi do precej zapletenih izrazov, če ga prej ne poenostavimo.

V srednjefrekvenčnem območju imata kapacitivnosti  $c_{be}$  in  $c_{bc}$  zanemarljivi admitanci. Ker je upornost  $r_B$  majhna, je padec napetosti na njej zanemarljiv, saj ga povzroča bazni tok, ki ga omejuje precej večja upornost  $g_{11}^{-1}$ . Zato iz modela izpustimo  $r_B$ , elemente  $U_{src}$ ,  $R_{SRC}$  in  $R_E$  pa pretvorimo v Théveninovo nadomestno vezje. Dobimo poenostavljeno vezje na sliki 10.32. Elementa Théveninovega nadomestnega vezja sta enaka

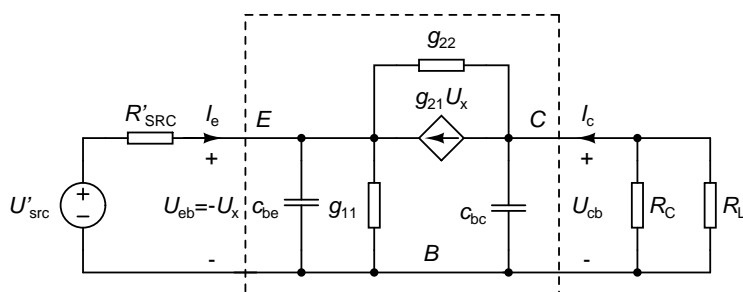
$$U'_{src} = \frac{R_E}{R_{SRC} + R_E} U_{src}, \quad (10.196)$$

$$R'_{SRC} = \frac{1}{R_{SRC}^{-1} + R_E^{-1}}. \quad (10.197)$$

Enačbo vezja, ki je na sliki 10.32 obdano s črtkano črto, lahko s pomočjo pretvorbe v nedoločeno admitančno



Slika 10.31: Model za majhne signale ojačevalnika z bipolarnim tranzistorjem v orientaciji s skupno bazo. Črtkana črta obdaja nadomestno vezje tranzistorja.



Slika 10.32: Poenostavljen model za majhne signale ojačevalnika z bipolarnim tranzistorjem v orientaciji s skupno bazo. Črtkana črta obdaja vezje, ki ga opisuje enačba (10.198).

matriko dobimo iz enačbe (10.144).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_e \\ I_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_{11B} & y_{12B} \\ y_{21B} & y_{22B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{eb} \\ U_{cb} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_{11} + g_{21} + g_{22} + j\omega c_{be} & -g_{22} \\ -(g_{21} + g_{22}) & g_{22} + j\omega c_{bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{eb} \\ U_{cb} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10.198)$$

Zanima nas ojačenje  $A_{US} = U_{cb}/U_{src}$ . Izrazimo ga kot

$$A_{US} = \frac{U_{cb}}{U_{src}} = \frac{U'_{src}}{U_{src}} \cdot \frac{U_{cb}}{U'_{src}}. \quad (10.199)$$

Prvi ulomek je zaradi (10.196) neodvisen od frekvence, drugega pa lahko izrazimo kot napetostno ojačenje z upoštevanjem notranje admittance signalnega vira (enačba (2.63)).

$$\frac{U_{cb}}{U'_{src}} = -\frac{y_{21B} R'^{-1}_{SRC}}{(y_{11B} + R'^{-1}_{SRC})(y_{22B} + R_C^{-1} + R_L^{-1}) - y_{12B} y_{21B}}. \quad (10.200)$$

Tokrat ne pričakujemo Millerjeve preslikave kapacitivnosti, saj nimamo kapacitivnosti med vhom in izhodom.

Vstavimo admitančne parametre iz enačbe (10.198) in zamenjamo  $j\omega$  z  $s$ .

$$\frac{U_{cb}}{U'_{src}} = \frac{(g_{21} + g_{22})R'_{SRC^{-1}}}{(g_{11} + g_{21} + g_{22} + R'_{SRC^{-1}} + sc_{be})(g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1} + sc_{bc}) - g_{22}(g_{21} + g_{22})}. \quad (10.201)$$

Zaradi odsotnosti Millerjevega pojava lahko zgornjo frekvenčno mejo določimo na podoben način, kot smo določali spodnjo frekvenčno mejo. Ko se nahajamo v srednjefrekvenčnem območju in večamo frekvenco, ena od obeh kapacitivnosti prva preide iz stanja odprtih sponk v stanje kratkega stika. Če predpostavimo, da sta pola, ki ju vnašata obe kapacitivnosti, dovolj razmaknjena, lahko zgornjo frekvenčno mejo določimo kot nižjo od obeh frekvenc  $f_{c_{be}}$ ,  $f_{c_{bc}}$ . Ti frekvenci predstavljata točki, ko sta kapacitivnosti na pol poti od odprtih sponk proti kratkemu stiku, če predpostavimo, da se nahajamo v srednjefrekvenčnem območju. Frekvenco  $f_{c_{be}}$  določimo tako, da poiščemo pole izraza (10.201) v katerem smo  $c_{bc}$  nadomestili z odprtimi sponkami ( $sc_{bc} = 0$ ). Dobimo enačbo

$$(g_{11} + g_{21} + g_{22} + R'_{SRC^{-1}} + sc_{be})(g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}) - g_{22}(g_{21} + g_{22}) = 0 \quad (10.202)$$

iz katere sledi

$$s = -\frac{1}{c_{be}} \left( R'_{SRC^{-1}} + \left( g_{11} + g_{21} + g_{22} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} \right) \right), \quad (10.203)$$

V notranjih oklepajih prepoznamo vhodno admitanco v tranzistor v srednjefrekvenčnem območju (enačba (8.36)). Izraz v oklepajih je enak prevodnosti, ki jo na svojih sponkah čuti  $c_{be}$  v srednjefrekvenčnem območju. Iz (10.203) sledi

$$\begin{aligned} f_{c_{be}} &= \frac{1}{2\pi c_{be}} \left( R'_{SRC^{-1}} + g_{11} + g_{21} + g_{22} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi c_{be}} \left( R'_{SRC^{-1}} + g_{11} + \frac{g_{21} + g_{22}}{1 + \frac{g_{22}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}} \right), \end{aligned} \quad (10.204)$$

Na enak način lahko z vstavitvijo  $sc_{be} = 0$  v (10.201) dobimo

$$\begin{aligned} f_{c_{bc}} &= \frac{1}{2\pi c_{bc}} \left( R_C^{-1} + R_L^{-1} + g_{22} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R'_{SRC^{-1}}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi c_{bc}} \left( R_C^{-1} + R_L^{-1} + \frac{g_{22}(g_{11} + g_{22})}{g_{11} + g_{21} + 2g_{22}} \right), \end{aligned} \quad (10.205)$$

kjer izraz oklepajih brez  $R_C^{-1}$  in  $R_L^{-1}$  predstavlja izhodno admitanco tranzistorja v srednjefrekvenčnem območju (enačba (8.40)). Celoten izraz v oklepajih je enak prevodnosti, ki jo na svojih sponkah čuti  $c_{bc}$  v srednjefrekvenčnem območju. Zgornja frekvenčna meja je enaka manjši od obeh frekvenc (10.204) in (10.205).

$$f_H = \min(f_{c_{be}}, f_{c_{bc}}). \quad (10.206)$$

Zaradi visoke vhodne admitance tranzistorja v orientaciji s skupno bazo, ki je več velikostnih redov višja od izhodne admitance, nam ob dovolj velikem  $R_C$  in  $R_L$  zgornjo frekvenčno mejo ponavadi določa kapacitivnost  $c_{bc}$ . Iz enačb (10.204) in (10.205) vidimo, da je pri dovolj majhnih upornostih  $R'_{SRC}$ ,  $R_C$  in  $R_L$  zgornja frekvenčna meja lahko poljubno visoka. To seveda v praksi ne drži, saj vrednosti  $f_H$  omejuje upornost  $r_B$ , ki pa smo jo v naši analizi zanemarili. Zgornja frekvenčna meja, ki bi jo (ob upoštevanju  $r_B$ ) lahko teoretično dosegli, je v praksi neuporabna, saj pri majhnih vrednostih  $R_C$  in  $R_L$  napetostno ojačenje  $A_{US}$  postane skoraj enako 0.

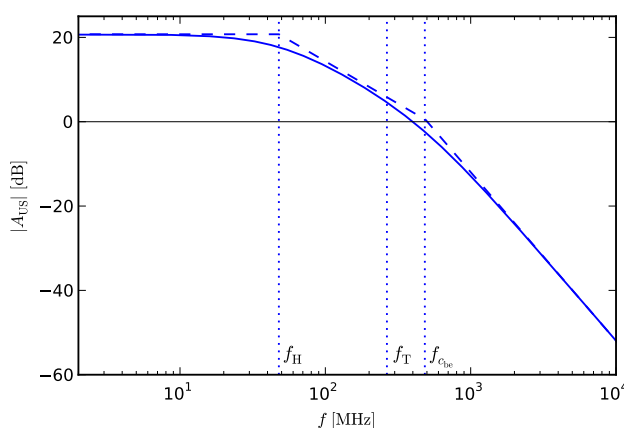


Ojačenje pri nizkih frekvencah znaša

$$A_{US}|_{s=0} = \frac{R_E}{R_{SRC} + R_E} \cdot \frac{(g_{21} + g_{22})R'_{SRC}}{(g_{11} + g_{21} + g_{22} + R'_{SRC})^{-1}(g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}) - g_{22}(g_{21} + g_{22})}. \quad (10.207)$$

Vse izpeljave potekajo enako tudi za unipolarne tranzistorje v orientaciji s skupnimi vrati, le da moramo v tem primeru upoštevati  $g_{11} = 0$  in ustrezno preimenovati elemente vezja.

**Primer 10.14:** Določimo zgornjo frekvenčno mejo ojačenja  $A_{US} = U_{cb}/U_{src}$  ojačevalnika s tranzistorjem v orientaciji s skupno bazo. Elementi vezja so  $R_{SRC} = 50\Omega$ ,  $R_E = 1k\Omega$ ,  $R_C = 5k\Omega$  in  $R_L = 1k\Omega$ . Admitančni parametri in kapacitivnosti tranzistorja v delovni točki znašajo  $g_{11} = 0,1mS$ ,  $g_{21} = 40mS$ ,  $g_{22} = 10\mu S$ ,  $c_{be} = 20pF$  in  $c_{bc} = 4pF$ . Upornost baznega priključka je  $r_B = 50\Omega$ .



Slika 10.33: Potek amplitudnega dela ojačenja  $A_{US}$  za ojačevalnik s tranzistorjem v orientaciji s skupno bazo. Asimptotičen potek je narisani s črtkano črto.

Iz enačb (10.204) in (10.205) dobimo

$$f_{c_{be}} = 484\text{MHz} \quad (10.208)$$

$$f_{c_{bc}} = 47,9\text{MHz}. \quad (10.209)$$

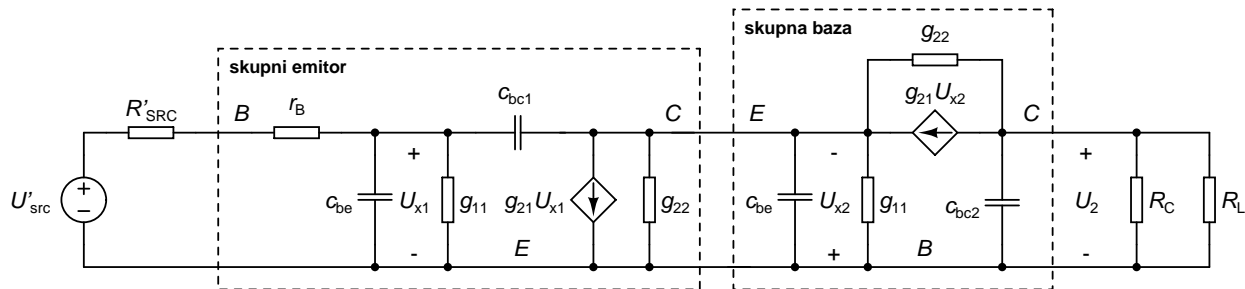
Zgornja frekvenčna meja je pri

$$f_H = 47,9\text{MHz}. \quad (10.210)$$

Ojačenje pri nizkih frekvencah (10.207) znaša 10,9, kar ustreza 20,8dB. Potek amplitudnega dela ojačenja je narisani na sliki 10.33. Vidimo, da se frekvenci  $f_{c_{bc}} = f_H$  in  $f_{c_{be}}$  dobro ujemata z zgornjo frekvenčno mejo in prehodom iz upadanja s strmino  $-20\text{dB/dek}$  v upadanje s strmino  $-40\text{dB/dek}$ .  $\triangle$

#### 10.4.5 Kaskodna vezava

Pri kaskodni vezavi izhajamo iz vezja na sliki 8.33. Vzoredno vezava  $R_2$  in  $R_3$  sta združena v  $R_B$ , namesto obeh tranzistorjev pa vstavimo model za majhne signale (slika 10.14, levo). Pri tem v tranzistorju, ki nastopa v orientaciji s skupno bazo, zanemarimo  $r_B$ . Po pretvorbi  $U_s$ ,  $R_{SRC}$  in  $R_B$  v Théveninovo nadomestno vezje, ki ga tvorita  $U'_{src}$  in  $R'_{SRC}$  (enačbi (10.145) in (10.146)), dobimo vezje na sliki 10.34.



Slika 10.34: Model za majhne signale za kaskodni ojačevalnik z bipolarnima tranzistorjema. Črtkana črta obdaja vezje, ki ga opisuje enačba (10.144). V prvi stopnji je to vezje v orientaciji s skupno sponko E, v drugi pa s skupno sponko B. V slednji smo v modelu tranzistorja zanemarili  $r_B$ .

Kapacitivnosti  $c_{be}$  obeh tranzistorjev sta približno enaki, ker sta približno enaka tudi parametra  $g_{21}$ . To pa ne velja za obe kapacitivnosti  $c_{bc}$ , saj se zaporni napetosti  $U_{CB}$  obeh tranzistorjev razlikujeta. Označili ju bomo z indeksoma 1 in 2. Celotno ojačenje lahko zapišemo kot

$$A_{US} = \frac{U_2}{U_{src}} = \frac{U'_{src}}{U_{src}} \cdot \frac{-U_{x2}}{U'_{src}} \cdot \frac{U_2}{-U_{x2}}. \quad (10.211)$$

Prvi ulomek v produktu je določen z (10.145) in je neodvisen od frekvence. Drugi ulomek predstavlja napetostno ojačenje z upoštevanjem notranje admittance signalnega vira za tranzistor v orientaciji s skupnim emitorjem, ki ga obremenjuje vhodna admitanca druge stopnje (tranzistorja v orientaciji s skupno bazo). Tretji ulomek je napetostno ojačenje tranzistorja v orientaciji s skupno bazo. Slednjega lahko zapišemo kot

$$\frac{U_2}{-U_{x2}} = -\frac{y_{21B}}{y_{22B} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (10.212)$$

Ko vstavimo admitančne parametre iz enačbe (10.198), dobimo

$$\frac{U_2}{-U_{x2}} = \frac{g_{21} + g_{22}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1} + j\omega c_{bc2}}. \quad (10.213)$$

Da določimo ojačenje  $-U_{x2}/U'_{src}$  (vpliv prve ojačevalne stopnje na ), potrebujemo vhodno admitanco v tranzistor druge ojačevalne stopnje. Ta znaša

$$Y_{in2} = y_{11B} - \frac{y_{21B}}{y_{22B} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} = g_{11} + g_{21} + g_{22} + j\omega c_{be} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1} + j\omega c_{bc2}}. \quad (10.214)$$

Drugi ulomek v izrazu (10.211) je enak

$$\frac{-U_{x2}}{U'_{src}} = -\frac{y_{21E}}{(y_{11E} + R'_{SRC})^{-1}(y_{22E} + Y_{in2}) - y_{12E}y_{21E}}. \quad (10.215)$$

Ko vstavimo (10.215), (10.214), (10.213) in admitančne parametre iz enačbe (10.144) v (10.211), dobimo zapleten izraz za  $A_{US}$ , katerega poli določajo zgornjo frekvenčno mejo. Da določanje polov poenostavimo, se bomo zadovoljili s približki polov in predpostavili, da zgornjo frekvenčno mejo določa bodisi  $c_{bc2}$  ali pa vse ostale kapacitivnosti. V prvem primeru upoštevamo  $c_{be} = c_{bc1} = 0$  in dobimo

$$Y_{in2} = g_{11} + g_{21} + g_{22} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1} + j\omega c_{bc2}}, \quad (10.216)$$

$$\frac{-U_{x2}}{U'_{src}} = -\frac{g_{21}}{(g_{11} + R'_{SRC})^{-1}(g_{22} + Y_{in2})}. \quad (10.217)$$

Vidimo, da edini pol ojačenja  $A_{US}$  določa enačba  $g_{22} + Y_{in2} = 0$ . Preidemo v prostor kompleksne frekvence ( $j\omega = s$ ) in dobimo

$$g_{11} + g_{21} + 2g_{22} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1} + sc_{bc2}} = 0. \quad (10.218)$$

Sledi pol

$$p_{c_{bc2}} = -\frac{1}{c_{bc2}} \left( R_C^{-1} + R_L^{-1} + \frac{(g_{11} + g_{22})g_{22}}{g_{11} + g_{21} + 2g_{22}} \right). \quad (10.219)$$

Izraz v oklepajih je prevodnost, ki jo na svojih sponkah čuti  $c_{bc2}$ . V ulomku znotraj oklepajev prepoznamo izhodno admitanco kaskodne vezave v srednjefrekvenčnem območju (8.133). Če zgornje frekvenčne meje ne določa  $c_{bc2}$ , vstavimo  $c_{bc2} = 0$  v (10.212)-(10.215). Vhodna admitanca v desni tranzistor (10.214) se poenostavi v

$$Y_{in2} = g_{11} + g_{21} + g_{22} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} + j\omega c_{be} = G_{in2} + j\omega c_{be}. \quad (10.220)$$

Pri tem smo z  $G_{in2}$  označili vhodno admitanco desnega tranzistorja v srednjefrekvenčnem območju.

$$G_{in2} = g_{11} + g_{21} + g_{22} - \frac{g_{22}(g_{21} + g_{22})}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}} = g_{11} + \frac{g_{21} + g_{22}}{1 + \frac{g_{22}}{R_C^{-1} + R_L^{-1}}}. \quad (10.221)$$

Kvocient  $U_2/(-U_{x2})$  (izraz (10.213)) zaradi  $c_{bc2} = 0$  postane realen. Pole sedaj določa izraz (10.215). Vstavimo (10.220) in admitančne parametre iz enačbe (10.144) ter preidemo v prostor kompleksne frekvence  $s = j\omega$ . Opravka imamo z enakim izrazom, kot pri orientaciji s skupnim emitorjem (10.149), le da sedaj namesto admitance bremena  $R_C^{-1} + R_L^{-1}$  nastopa vhodna admitanca desnega tranzistorja  $Y_{in2}$ .

$$\frac{U_{x2}}{U'_{src}} = \frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1}}{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} + g_{11} + s(c_{be} + (1 - A)c_{bc1})} \cdot \underbrace{\frac{-g_{21} + sc_{bc1}}{g_{22} + G_{in2} + s(c_{be} + c_{bc1})}}_A. \quad (10.222)$$

Drugi ulomek ima pol pri

$$p_2 = -\frac{g_{22} + G_{in2}}{c_{be} + c_{bc1}}. \quad (10.223)$$

Spet predpostavimo, da pol  $p_2$  nastopi pri višji frekvenci, kot pol prvega ulomka ( $p_1$ ). Tedaj lahko pri določanju  $p_1$  upoštevamo, da je ojačenje  $A$  frekvenčno neodvisno in enako

$$A_0 = A|_{s=0} = -\frac{g_{21}}{g_{22} + G_{in2}}. \quad (10.224)$$

Sledi pol  $p_1$ .

$$p_1 = -\frac{(R'_{SRC} + r_B)^{-1} + g_{11}}{c_{be} + (1 - A_0)c_{bc1}}. \quad (10.225)$$

Spet imamo opravka z Millerjevo preslikavo  $c_{bc1}$  in navidez se zdi, kot da kaskodna vezava ni nič boljša od orientacije s skupnim emitorjem. To pa ne drži popolnoma. Če je  $R_C$  ali  $R_L$  mnogo manjši od  $g_{22}^{-1}$  in velja  $g_{11}, g_{22} \ll g_{21}$ , imamo

$$G_{in2} \approx g_{11} + g_{21} + g_{22} \approx g_{21}, \quad (10.226)$$

$$A_0 \approx -1. \quad (10.227)$$

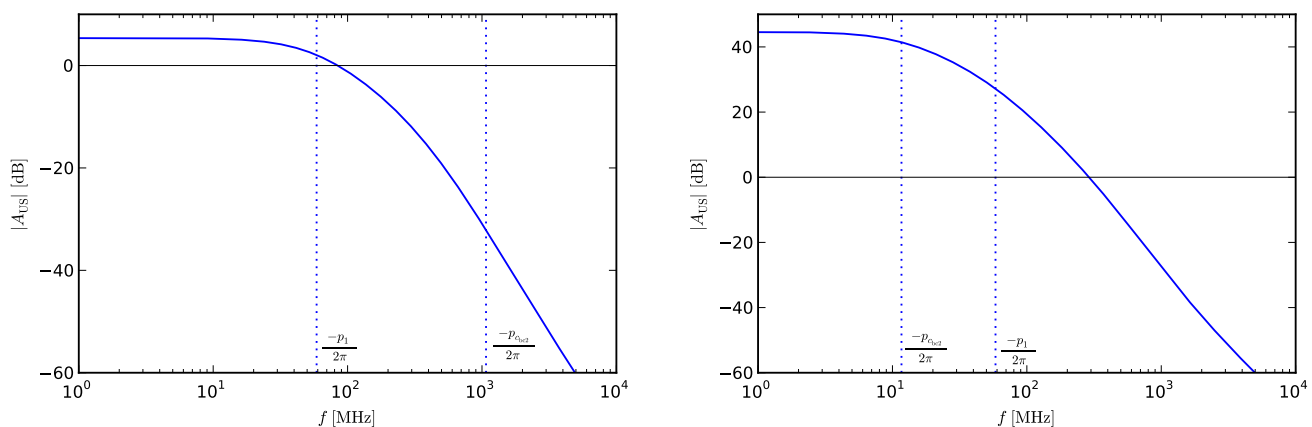
Millerjeva preslikava postane mnogo bolj pohlevna. Pol  $p_1$  je sedaj enak

$$p_1 = -\frac{(R'_{\text{SRC}} + r_B)^{-1} + g_{11}}{c_{be} + 2c_{bc1}}, \quad (10.228)$$

kar je precej boljše, kot pri orientaciji s skupnim emitorjem. Ker ponavadi velja  $-p_2 \gg -p_1$ , zgornjo frekvenčno mejo  $f_H$  določata  $p_1$  in  $p_{c_{bc2}}$ .

$$f_H = \min\left(-\frac{p_1}{2\pi}, -\frac{p_{c_{bc2}}}{2\pi}\right). \quad (10.229)$$

Če sta upornosti  $R_C$  in  $R_L$  veliki, zgornjo frekvenčno mejo določa pol  $p_{c_{bc2}}$ , v nasprotnem primeru pa pol  $p_1$ . Ker imamo pri desnem tranzistorju opravka z orientaciji s skupno bazo, Millerjeva preslikava kapacitivnosti  $c_{bc1}$  levega tranzistorja pa je mnogo bolj pohlevna, sklepamo, **da ima ojačevalnik s tranzistorji v kaskodni vezavi precej višjo zgornjo frekvenčno mejo kot ojačevalnik s tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem**. Do podobnih ugotovitev lahko pridemo tudi za kaskodno vezavo MOSFET in JFET tranzistorjev.



Slika 10.35: Potek amplitudnega dela ojačenja  $A_{US}$  za kaskodni ojačevalnik z  $R_L = 50\Omega$  (levo) in  $R_L = 50k\Omega$  (desno).

**Primer 10.15:** Recimo, da imamo kaskodno vezavo bipolarnih tranzistorjev s parametri  $g_{11} = 0,1\text{mS}$ ,  $g_{21} = 40\text{mS}$ ,  $g_{22} = 10\mu\text{S}$ ,  $c_{be} = 20\text{pF}$ ,  $c_{bc1} = 4\text{pF}$  in  $c_{bc2} = 3\text{pF}$ . Upornost baznega priključka je  $r_B = 50\Omega$ . Upornosti uporov v vezju so  $R_{\text{SRC}} = 50\Omega$ ,  $R_B = 1k\Omega$  in  $R_C = 5k\Omega$ . Določimo zgornjo frekvenčno mejo ojačenja  $U_2/U_{\text{src}}$  pri  $R_L = 50\Omega$  in  $R_L = 50k\Omega$ .

Enačbe (10.221), (10.224), (10.225), (10.223) in (10.219) nam pri  $R_L = 50\Omega$  dajo

$$G_{\text{in}2} = 40,09\text{mS}, \quad (10.230)$$

$$A_0 = -0,998, \quad (10.231)$$

$$f_{p1} = -\frac{p_1}{2\pi} = 58,8\text{MHz}, \quad (10.232)$$

$$f_{p2} = -\frac{p_2}{2\pi} = 266\text{MHz}, \quad (10.233)$$

$$f_{c_{bc2}} = -\frac{p_{c_{bc2}}}{2\pi} = 1,07\text{GHz}. \quad (10.234)$$

V tem primeru zgornjo frekvenčno mejo  $f_H = 58,8\text{MHz}$  določa pol  $p_1$  prve ojačevalne stopnje, kar potrjuje tudi slika 10.35 (levo). Pola  $p_2$  in  $p_{c_{bc2}}$  nastopita pri precej višjih frekvencah. Vidimo, da je  $G_{\text{in}2}$  približno enak  $g_{21}$ , kot je to običajno pri tranzistorju v orientaciji s skupno bazo. Posledično je  $A_0 \approx -1$ .

Pri  $R_L = 50\text{k}\Omega$  dobimo

$$G_{\text{in}2} = 38,37\text{mS}, \quad (10.235)$$

$$A_0 = -1,04, \quad (10.236)$$

$$f_{p1} = -\frac{p_1}{2\pi} = 58,4\text{MHz}, \quad (10.237)$$

$$f_{p2} = -\frac{p_2}{2\pi} = 255\text{MHz}, \quad (10.238)$$

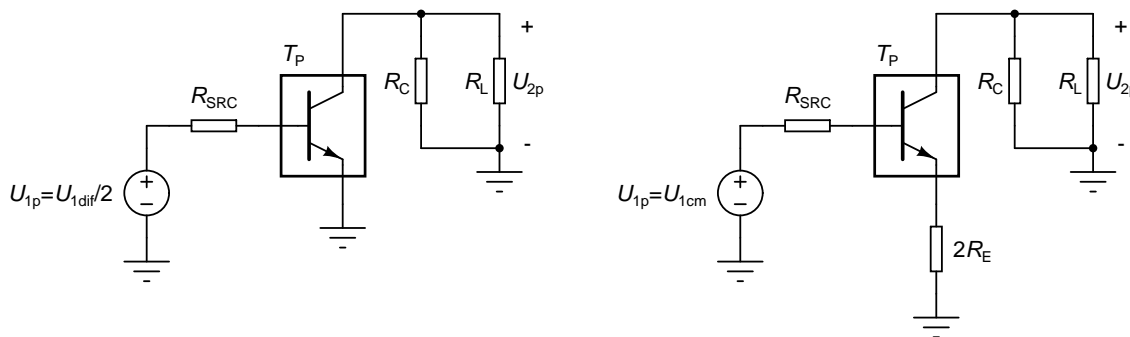
$$f_{c_{bc2}} = -\frac{p_{c_{bc2}}}{2\pi} = 11,7\text{MHz}, \quad (10.239)$$

$$(10.240)$$

Sedaj zgornjo frekvenčno mejo  $f_H = 11,7\text{MHz}$  določa  $p_{c_{bc2}}$  (slika 10.35, desno). Pola  $p_1$  in  $p_2$  nastopita pri mnogo višji frekvenci. Tudi tokrat velja  $G_{\text{in}2} \approx g_{21}$  in  $A_0 \approx -1$ .  $\triangle$

### 10.4.6 Diferencialni ojačevalnik

Izhajali bomo iz modela vezja za majhne signale na sliki 8.43. Modelu bomo dodali notranji upornosti ( $R_{\text{SRC}}$ ) signalnih virov  $U_{1p}$  in  $U_{2p}$  ter predpostavili simetrično breme ( $R_{\text{LP}} = R_{\text{LN}} = R_L$ ). Pri diferencialnem vzbujanju sta zaradi simetrije vezja emitorja obeh tranzistorjev na fiksnem potencialu, kar pomeni, da sta v modelu za majhne signale ozemljena. Zadostuje, da obravnavamo le levo polovico vezja (slika 10.36, levo).



Slika 10.36: Določanje zgornje frekvenčne meje napetostnega ojačenja pri diferencialnem krmiljenju (levo) in sofaznem krmiljenju (desno).

Zanima nas **zgornja frekvenčna meja diferencialnega ojačenja**  $A_{\text{UD}} = U_{2p}/U_{1\text{dif}} = U_{2p}/(2U_{1p})$ . Ker imamo opravka s tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem, predstavlja kvocient  $U_{2p}/U_{1p}$  napetostno ojačenje z upoštevanjem notranje admittance vira. Zgornja frekvenčna meja  $A_{\text{UD}}$  je zato enaka zgornji frekvenčni meji ojačenja  $A_{\text{US}}$  ojačevalnika s tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem (poglavje 10.4.2). V enačbah moramo upoštevati  $R_B \rightarrow \infty$ , saj v vezju nimamo upora  $R_B$ . Ponavadi zgornjo frekvenčno mejo  $f_{\text{HD}}$  določa pol  $p_1$  (enačba (10.153)). Velja

$$f_{\text{HD}} = -\frac{p_1}{2\pi} = \frac{(R_{\text{SRC}} + r_B)^{-1} + g_{11}}{2\pi(c_{be} + (1 - A_0)c_{bc})}, \quad (10.241)$$

kjer je ojačenje  $A_0$  definirano kot

$$A_0 = -\frac{g_{21}}{g_{22} + R_C^{-1} + R_L^{-1}}. \quad (10.242)$$

Pri določanju **zgornje frekvenčne meje sofaznega ojačenja** ( $f_{\text{HC}}$ ) uporabimo enako sklepanje, kot smo pri določanju vhodne admitance za sofazno vzbujanje (slika 8.46). Spet upoštevamo simetrijo vezja in obravnavamo le njegovo levo polovico (slika 10.36, desno). Sofazno ojačenje je definirano kot  $A_{\text{UC}} = U_{2\text{p}}/U_{1\text{cm}} = U_{2\text{p}}/U_{1\text{p}}$ .

V podrobnosti izpeljave se ne bomo spuščali, saj je v dobrem diferencialnem ojačevalniku sofazno ojačenje majhno in le malo prispeva k izhodnemu signalu.

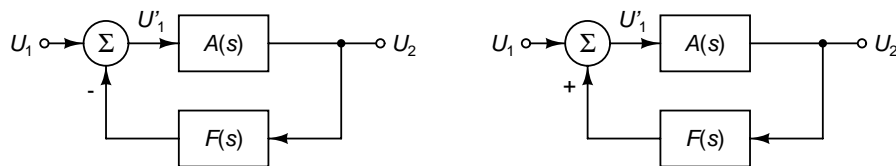
# 11

## Povratna vezava

Vezja s povratno vezavo so pomembna podskupina vezij linearne elektronike. S pomočjo povratne vezave lahko na preprost način izvedemo ojačevalnike z natančnim ojačenjem in majhno nelinearnostjo, oscilatorje, spominska vezja, filtre, itd. Povratna vezava pa s sabo ne prinese le dobrih lastnosti. Glavna slabost vezij s povratno vezavo je, da lahko postanejo nestabilna. V nekaterih primerih je to zaželeno (npr. pri oscilatorjih), v drugih pa ni (npr. pri ojačevalnikih).

### 11.1 Sistemi s povratno vezavo

V sistemu s povratno vezavo (**zaprtzančnem sistemu**) izhodni signal ( $U_2$ ) iz vezja ( $A$ ) obdelamo in nato odštejemo (slika 11.1, levo) ali prištejemo (slika 11.1, desno) vhodnemu signalu ( $U_1$ ). Obe obliki sta enakovredni, saj s spremembo ojačenja  $F(s)$  v  $-F(s)$  in zamenjavo predznaka na spodnjem vhodu seštevalnika eno vezje prevedemo v drugo. Vezju ( $F$ ), ki obdela izhodni signal, pravimo **povratna vezava**, signalu, ki iz njega prihaja v seštevalnik pa **signal povratne vezave**. Celotnemu sistemu s povratno vezavo pravimo tudi **zaprtzančen sistem**.



Slika 11.1: Sistem s povratno vezavo, ki izhodni signal ojači z ojačenjem  $F(s)$  in rezultat odšteje od vhodnega signala (levo) ali prišteje k vhodnemu signalu (desno).

Predpostavimo za začetek, da sta tako vezje  $A$ , kot povratna vezava  $F$  linearna. Z  $A(s)$  in  $F(s)$  bomo označili njuni prevajalni funkciji v prostoru kompleksne frekvence  $s$ . Velja

$$U_2 = A(s)U_1'. \quad (11.1)$$

Za sistem na sliki 11.1 (levo) lahko pišemo

$$U_1' = U_1 - F(s)U_2. \quad (11.2)$$

Če oboje združimo, dobimo enačbo

$$U_2 = A(s)(U_1 - F(s)U_2), \quad (11.3)$$

Sledi prevajalna funkcija sistema na sliki 11.1 (levo).

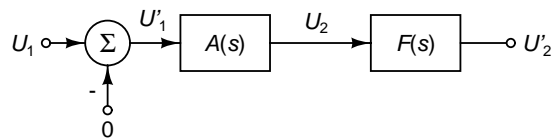
$$A'(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{A(s)}{1 + A(s)F(s)}. \quad (11.4)$$

Za sistem na sliki 11.1 (desno) velja

$$U'_1 = U_1 + F(s)U_2. \quad (11.5)$$

Z upoštevanjem (11.1) je prevajalna funkcija zaprtozančnega sistema enaka

$$A'(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{A(s)}{1 - A(s)F(s)}. \quad (11.6)$$



Slika 11.2: Odprtozančna prevajalna funkcija.

Izraz  $W(s) = A(s)F(s)$  nastopa v obeh oblikah zaprtozančnega sistema. Imenujemo ga **odprtozančna prevajalna funkcija** ali tudi **ojačenje odprte zanke**. Odprtozančno prevajalno funkcijo dobimo, če izhod povratne vezave  $F$  odklopimo od seštevalnika ( $\Sigma$ ) in opazujemo prevajalno funkcijo  $W(s) = U'_2/U_1$  (slika 11.2).

Predpostavimo, da sta ojačenji  $A(s) = A_0$  in  $F(s) = F_0$  frekvenčno neodvisni in realni. Odprtozančno ojačenje je v tem primeru prav tako realno ( $W_0 = A_0F_0$ ). Če povečanje izhodnega signala  $U_2$  preko povratne vezave vpliva na vhod sistema  $A(s)$  tako, da se izhodni signal  $U_2$  zmanjša, pravimo, da imamo **negativno povratno vezavo**. To se zgodi, če je ojačenje signala na poti od izhoda  $A(s)$  preko  $F(s)$  in nato skozi  $A(s)$  do izhoda  $A(s)$  negativno. Za vezje na sliki 11.1 (levo) se pogoj za negativno povratno vezavo glasi

$$W_0 = A_0F_0 > 0. \quad (11.7)$$

Če povečanje izhodnega signala  $U_2$  preko povratne vezave vodi v dodatno povečanje izhodnega signala, imamo opravka s **pozitivno povratno vezavo**. Pogoj za pozitivno povratno vezavo za vezje na sliki 11.1 (levo) se glasi

$$W_0 = A_0F_0 < 0. \quad (11.8)$$

Za vezje na sliki 11.1 (desno) pogoja (11.7) in (11.8) zamenjata vlogi. V literaturi pogosto zasledimo, da levo vezje predstavlja negativno povratno vezavo, desno pa pozitivno povratno vezavo. To drži le, če je  $A_0F_0 > 0$ . Negativno povratno vezavo srečamo ponavadi v ojačevalnikih, pozitivno povratno vezavo pa v oscilatorjih in spominskih vezjih.

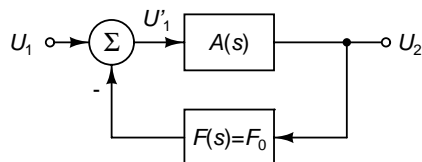
Ko dovolimo, da sta  $A(s)$  in  $F(s)$  frekvenčno odvisna in s tem tudi kompleksna, pojem pozitivne in negativne povratne vezave izgubi svoj pomen, saj pri kompleksnih številih ne moremo govoriti o predznaku. Oba pojma v tem primeru uporabljamo za območje frekvenc, kjer je odprtozančno ojačenje  $W(s)$  realno in mu zato lahko določimo predznak. Zaradi frekvenčne odvisnosti  $W(s)$  se lahko povratna vezava v določenem območju frekvenc obnaša kot negativna, v nekem drugem območju pa kot pozitivna.

Z vidika izpeljav je primernejše uporabljati le eno od obeh vezij na sliki 11.1. Iz zgodovinskih razlogov se v praksi uporabljata obe vezji. Do poglavja 11.4 bomo uporabljali levo vezje, v nadaljevanju pa desno vezje.



## 11.2 Ojačevalniki z negativno povratno vezavo

Od podskupin vezij s povratno vezavo bomo najprej podrobneje obravnavali ojačevalnike. V splošnem je ojačenje ojačevalnika  $A(s)$  frekvenčno odvisno. V naši obravnavi bomo predpostavili, da je v srednjefrekvenčnem območju neodvisno od frekvence in realno ( $A_0$ ). Za negativno povratno vezavo bomo prav tako predpostavili, da je frekvenčno neodvisna ( $F_0$ ). Frekvenčno odvisnih negativnih povratnih vezav ne bomo posebej obravnavali. Pri izpeljavah bomo izhajali iz vezja na sliki 11.3.



Slika 11.3: Ojačevalnik s frekvenčno neodvisno negativno povratno vezavo  $F_0$ .

Pogoj za negativno povratno vezavo se v srednjefrekvenčnem območju glasi

$$W_0 = A_0 F_0 > 0. \quad (11.9)$$

Da je pogoj izpolnjen, morata imeti  $A_0$  in  $F_0$  enak predznak.

### 11.2.1 Ojačenje in popačenja

V časovnem prostoru obravnavajmo ojačevalnik s frekvenčno neodvisnim ojačenjem  $A_0$ . Namesto kompleksorjev  $U_1$ ,  $U_1'$  in  $U_2$  bodo v enačbah nastopali časovni poteki signalov  $u_1(t)$ ,  $u_1'(t)$  in  $u_2(t)$ . Če je ojačevalnik  $A$  nelinearen, lahko zvezo med njegovim vhodnim signalom  $u_1'(t)$  in izhodnim signalom  $u_2(t)$  pišemo kot

$$u_2(t) = A_0 u_1'(t) + f(u_1'(t)), \quad (11.10)$$

kjer funkcija  $f$  predstavlja nelinearnost ojačevalnika  $A$ . Člen  $A_0 u_1'(t)$  predstavlja linearen ojačevalnik s frekvenčno neodvisnim ojačenjem  $A_0$ . Če v prvi člen (11.10) vstavimo (11.2) in pri tem nadomestimo kompleksorje s časovnimi poteki,  $F(s)$  pa z  $F_0$ , dobimo enačbo

$$u_2(t) = A_0(u_1(t) - F_0 u_2(t)) + f(u_1'(t)), \quad (11.11)$$

iz katere lahko izrazimo  $u_2(t)$ .

$$u_2(t) = \frac{A_0}{1 + A_0 F_0} u_1(t) + \frac{f(u_1'(t))}{1 + A_0 F_0}. \quad (11.12)$$

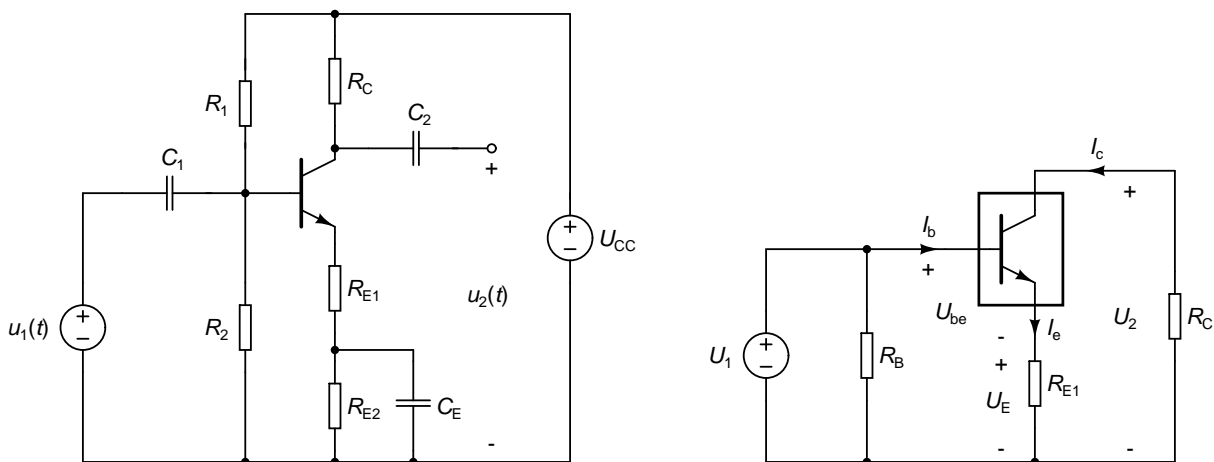
Prvi člen predstavlja linearen ojačevalnik z ojačenjem

$$A'_0 = \frac{A_0}{1 + A_0 F_0}. \quad (11.13)$$

Vidimo, da negativna povratna vezava ( $W_0 > 0$ ) zmanjša ojačenje za faktor  $1 + W_0 = 1 + A_0 F_0$ . Drugi člen v (11.12) predstavlja nelinearnost zaprtozančnega sistema. Ta je za faktor  $1 + W_0$  manjša od nelinearnosti ojačevalnika  $A$ , ki jo predstavlja funkcija  $f$ . **Negativna povratna vezava torej zmanjša ojačenje in popačenja za faktor  $1 + W_0 = 1 + A_0 F_0$ .** Če je ojačenje  $A_0$  veliko, velja

$$A'_0 \approx \lim_{A_0 \rightarrow \infty} \frac{A_0}{1 + A_0 F_0} = \frac{1}{F_0}. \quad (11.14)$$

Ojačenje zaprtozančnega sistema je tedaj določeno zgolj s povratno vezavo  $F_0$ . To dejstvo pogosto izkoriščamo v ojačevalnikih. Lastnosti tranzistorjev (kot naprimer  $\beta_F$ ) se spreminjajo v zelo širokem območju. To ima za posledico, da so tudi vrednosti prevajalne funkcije za večje število vezij močno razpršene, čeprav uporabljamo tranzistorje enakega tipa. Po drugi strani pa imajo elementi, kot so upori in kondenzatorji dokaj majhne tolerance (lahko tudi 1% ali manj). Ojačevalnik pogosto izvedemo kot zaprtozančen sistem z velikim, a dokaj nenatančnim ojačenjem  $A_0$ , in negativno povratno vezavo  $F_0$ , ki jo tvorijo elementi z majhnimi tolerancami. Tedaj je njegovo ojačenje praktično enako  $A'_0 = 1/F_0$  in se spreminja le toliko, kot se spreminjajo elementi, ki tvorijo povratno vezavo.



Slika 11.4: Ojačevalnik z negativno povratno vezavo, ki jo predstavlja  $R_{E1}$  (levo) in model vezja za majhne signale (desno).

**Primer 11.1:** Vzemimo za primer ojačevalnik na sliki 11.4. Predpostavimo, da so kapacitivnosti dovolj velike, da kondenzatorji predstavljajo kratek stik za izmenične signale. Upora  $R_{E1}$  in  $R_{E2}$  prevzameta vlogo upora  $R_E$  pri določanju delovne točke vezja. V modelu vezja za majhne signale se upora  $R_1$  in  $R_2$  vežeta vzporedno v upor  $R_B$ . Ker je  $C_E$  vezan vzporedno z  $R_{E2}$ , predstavlja upor  $R_{E1}$  povratno vezavo za izmenične signale (slika 11.4, desno).

Povečanje napetosti  $U_1$  vodi v povečanje kolektorskega toka  $I_c$ . Ker je za velike  $\beta$  emitorski tok praktično enak kolektorskemu toku, povzroči povečanje  $I_c$  povečanje padca napetosti na uporu  $R_{E1}$  in s tem višji potencial baze. Slednje pomeni, da se napetost  $U_{be}$  zmanjša, kar vodi v zmanjšanje kolektorskega toka. Imamo torej negativno povratno vezavo.

V nadaljevanju predpostavimo, da so parametri tranzistorja v delovni točki enaki  $g_{11}$ ,  $g_{21}$  in  $g_{22}$ , pri čemer naj bo  $g_{22}$  zanemarljiv. Določimo napetostno ojačenje vezja  $A_U = U_2/U_1$ . Tokova  $I_b$  in  $I_c$  lahko izrazimo kot

$$I_b = g_{11}U_{be}, \quad (11.15)$$

$$I_c = g_{21}U_{be}. \quad (11.16)$$

Tok  $I_e = I_b + I_c$  znaša

$$I_e = (g_{11} + g_{21})U_{be} \quad (11.17)$$

in povzroča padec napetosti  $U_E$  na uporu  $R_{E1}$ .

$$U_e = (g_{11} + g_{21})R_{E1}U_{be}. \quad (11.18)$$

Sedaj lahko izrazimo napetosti  $U_1$  in  $U_2$  z napetostjo  $U_{be}$ .

$$U_1 = U_{be} + U_E = ((g_{11} + g_{21})R_{E1} + 1)U_{be}, \quad (11.19)$$

$$U_2 = -R_C I_c = -g_{21}R_C U_{be}. \quad (11.20)$$

Sledi napetostno ojačenje

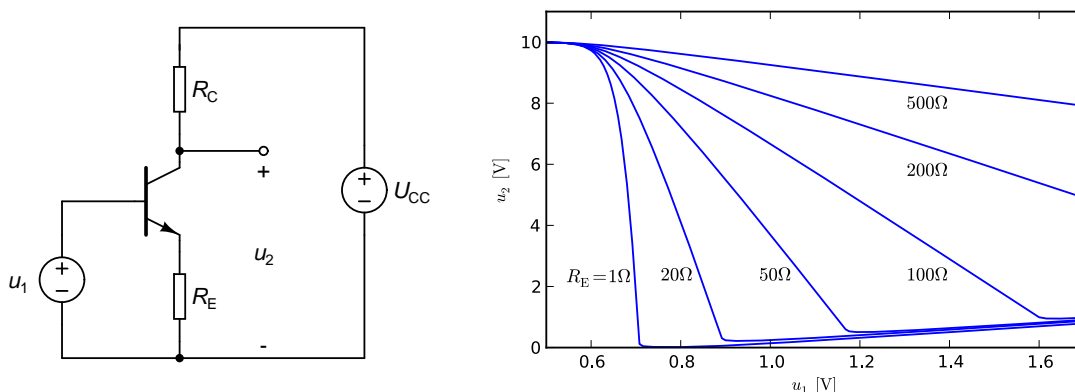
$$A_U = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{g_{21}R_C}{1 + (g_{11} + g_{21})R_{E1}} = -\frac{R_C}{R_{E1}} \cdot \frac{\beta}{(g_{11}R_{E1})^{-1} + 1 + \beta}. \quad (11.21)$$

Če je  $\beta$  velik in velja  $(g_{11}R_{E1})^{-1} \ll \beta$ , lahko pišemo

$$A_U \approx \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( -\frac{R_C}{R_{E1}} \cdot \frac{\beta}{(g_{11}R_{E1})^{-1} + 1 + \beta} \right) = -\frac{R_C}{R_{E1}}. \quad (11.22)$$

Vidimo, da pri velikem  $\beta$  ojačenje vezja določata upora  $R_C$  in  $R_{E1}$ , kar se ujema z ugotovitvijo (11.14), ki smo jo izpeljali za splošen sistem z negativno povratno vezavo. Na ojačevalnik lahko pogledamo tudi v smislu sistema na sliki 11.3. Ojačenje ojačevalnika predstavlja kvocient

$$A_0 = \frac{U_2}{U_{be}} = -g_{21}R_C < 0. \quad (11.23)$$



Slika 11.5: Ojačevalnik enosmernih signalov z negativno povratno vezavo (levo) in njegove karakteristike za različne vrednosti  $R_E$  (desno).  $R_C = 1k\Omega$ .

Negativno povratno vezavo tvori  $R_{E1}$ , na katerem je padec napetosti  $U_e$ . Prevajalna funkcija povratne vezave je enaka

$$F_0 = \frac{U_e}{U_2} = -\frac{(g_{11} + g_{21})R_E}{g_{21}R_C} < 0. \quad (11.24)$$

$F_0$  je sicer res negativna, ampak ker je tudi ojačenje  $A_0$  negativno, je odprtozančna prevajalna funkcija ( $W_0 = A_0F_0$ ) pozitivna. Napetost  $U_e$ , ki predstavlja izhod iz prevajalne funkcije  $F_0$ , se odšteva od vhodnega signala  $U_1$ , da dobimo vhodni signal v ojačevalnik ( $U_{be}$ ). Zaradi teh dveh lastnosti vezja imamo negativno povratno vezavo. Z upoštevanjem (11.4) dobimo enak rezultat, kot (11.21).

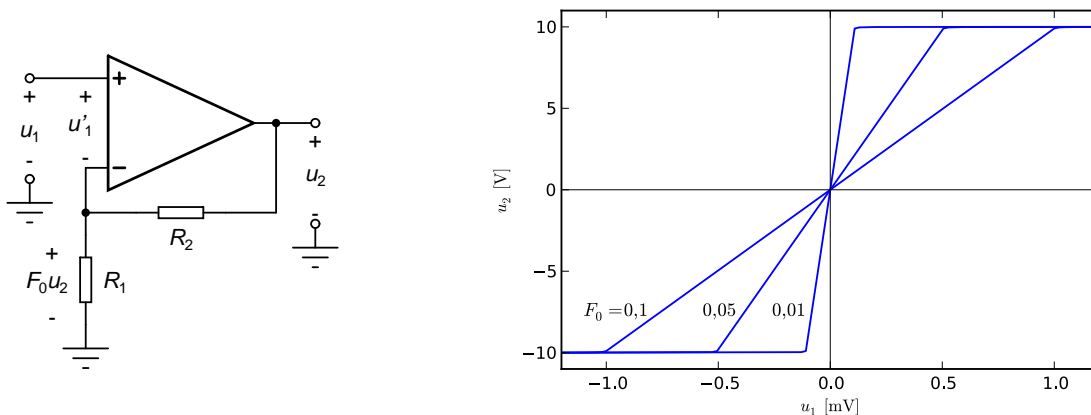
$$A_U = A'_0 = \frac{A_0}{1 + A_0F_0} = -\frac{g_{21}R_C}{1 + (g_{11} + g_{21})R_{E1}} = -\frac{R_C}{R_{E1}} \cdot \frac{\beta}{1 + (g_{11}R_{E1})^{-1} + \beta}. \quad (11.25)$$

Če odstranimo upora  $R_1$  in  $R_2$ , kratko sklenemo vse kondenzatorje in preimenujemo  $R_{E1}$  v  $R_E$ , dobimo ojačevalnik enosmernih signalov na sliki 11.5 (levo). Z naraščanjem napetosti delovne točke  $U_{1Q}$  (z naraščanjem  $u_1$  na sliki 11.5, desno) se večja parameter  $g_{11}$  tranzistorja. Ko postane  $1 + (g_{11}R_E)^{-1}$  majhen v primerjavi z  $\beta$ ,

so strmine karakteristik odvisne le še od uporov, saj parametri tranzistorja zaradi velikega  $\beta$  izpadejo iz (11.25). Negativna povratna vezava močno zmanjša popačenja, kar se kaže v linearnosti karakteristik (slika 11.5, desno). Strmine karakteristik so v linearnem delu približno enake

$$A_U = \frac{du_2}{du_1} = -\frac{R_C}{R_E}. \quad (11.26)$$

Najmanj nelinearnosti izkazuje karakteristika, ki pripada  $R_E = 500\Omega$ . Ta ima najmanjše ojačenje, saj večji  $R_E$  pomeni močnejšo povratno vezavo. Z naraščanjem  $u_1$  izhodna napetost  $u_2$  pada, pri dovolj veliki  $u_1$  pa začne ponovno naraščati. Tedaj tranzistor preide iz aktivnega področja v področje nasičenja, kjer se obnaša kot nelinearen upor med kolektorjem in emitorjem z relativno majhno upornostjo. Izhodna napetost sedaj raste na račun povečevanja padca napetosti na  $R_E$ , ki zaradi približno konstantne napetosti med bazo in emitorjem (0,7V) raste enako hitro kot  $u_1$ .  $\triangle$



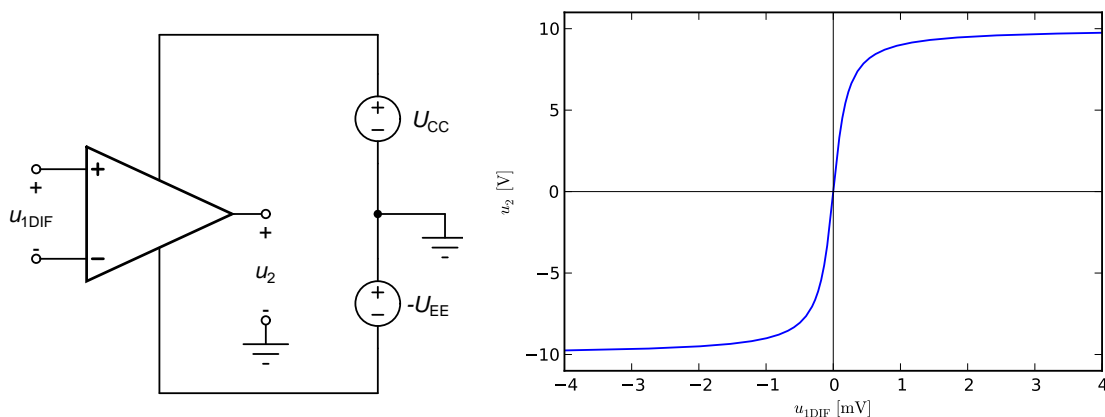
Slika 11.6: Neinvertirajoči ojačevalnik (levo) in njegove karakteristike za različne vrednosti ojačenja povrate vezave (desno).

**Primer 11.2:** Imejmo neinvertirajoči ojačevalnik, ki ga zgradimo s pomočjo operacijskega ojačevalnika (slika 11.6, levo). Operacijski ojačevalnik potrebuje dvojno napajanje (slika 11.7, levo), ki ga tvorita  $U_{CC}$  in  $-U_{EE}$ . Ponavadi velja  $U_{CC} = -U_{EE}$  (simetrično napajanje). V shemah (naprimer na sliki 11.6) pogosto izpuščamo napajalne sponke in se osredotočimo le na vhodne in izhodne signale operacijskega ojačevalnika.

Vhodno napetost predstavlja  $u_{1DIF}$  (vhodna diferencialna napetost med priključkoma „+“ in „-“), izhodno pa  $u_2$ . Slednjo merimo proti referenčni sponki, ki jo predstavlja stičišče obeh napajalnih virov. Pri dobrih operacijskih ojačevalnikih je izhodna napetost odvisna predvsem od  $u_{1DIF}$ . Vhodna sofazna napetost (srednja vrednost potenciala na obeh vhodnih priključkih) ima zaradi visokega rejekcijskega faktorja (poglavje 8.10, enačba (8.197)) le majhen (ponavadi zanemarljiv) vpliv na  $u_2$ .

Karakteristiko operacijskega ojačevalnika prikazuje slika 11.7 (desno). Pri dovolj veliki pozitivni (oziroma negativni) napetosti  $u_{1DIF}$  se izhodna napetost približuje pozitivnemu nasičenju  $U_A$  (oziroma negativnemu nasičenju  $U_B$ ). Nasičenje  $U_A$  je ponavadi nekoliko nižje od pozitivne napajalne napetosti  $U_{CC}$ . Podobno velja tudi za negativno nasičenje  $U_B$ , ki je nekoliko višje od najnižjega potenciala v vezju ( $-U_{EE}$ ). Na sliki 11.7 (desno) sta napajalni napetosti izbrani tako, da sta napetosti nasičenja enaki  $U_A = -U_B = 10V$ . Ojačenje operacijskega ojačevalnika v najbolj strmem delu karakteristike je ponavadi zelo veliko. V našem primeru naj znaša  $A_0 = 10^5 = 100dB$ .

Vrnimo se sedaj k neinvertirajočemu ojačevalniku na sliki 11.6 (levo). Upora  $R_1$  in  $R_2$  tvorita negativno povratno vezavo, saj povečanje napetosti  $u_2$  vodi v povišanje potenciala sponke „-“ ojačevalnika, kar vodi v zmanjšanje



Slika 11.7: Operacijski ojačevalnik z napajanjem (levo) in njegova karakteristika (desno). Napajalni napetosti  $U_{CC}$  in  $U_{EE}$  sta izbrani tako, da sta napetosti nasičenja enaki  $U_A = -U_B = 10$  V. Največje ojačenje znaša  $A_0 = 10^5 = 100$  dB.

izhodnega signala  $u_2$ . Vezje si lahko razlagamo kot zaprtizančen sistem na sliki 11.1 (levo). Ojačenje povratne vezave je frekvenčno neodvisno in enako delilnemu razmerju napetostnega delilnika, ki ga tvorita  $R_1$  in  $R_2$ .

$$F_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (11.27)$$

Zaradi velikega ojačenja  $A_0$  lahko predpostavimo, da je ojačenje neinvertirajočega ojačevalnika enako

$$A'_0 = \frac{u_2}{u_1} \approx \frac{1}{F_0} = 1 + \frac{R_2}{R_1}. \quad (11.28)$$

Odvisnost izhodne napetosti od vhodne napetosti za različne vrednosti  $F_0$  je podana na sliki 11.6 (desno). Vidimo, da so karakteristike mnogo bolj linearne, kot pa karakteristika operacijskega ojačevalnika (slika 11.7, desno).  $\triangle$

### 11.2.2 Frekvenčna karakteristika

Imejmo ojačevalnik z ojačenjem  $A_0$  v srednjefrekvenčnem območju in zgornjo frekvenčno mejo pri  $\omega_H$ . Ojačenje v prostoru kompleksne frekvence podaja izraz

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + s/\omega_H}. \quad (11.29)$$

Če ima ojačevalnik spodnjo frekvenčno mejo precej nižjo od  $\omega_H$ , nad zgornjo frekvenčno mejo pa njegovo ojačenje  $A(j\omega)$  upada s strmino  $-20$  dB/dek, lahko potek njegovega ojačenja v srednje- in visokofrekvenčnem območju dobro opišemo z (11.29). Zanima nas ojačenje zaprtizančnega sistema  $A'(s)$ , ki ga dobimo, če ojačevalniku dodamo frekvenčno neodvisno negativno povratno vezavo z ojačenjem  $F_0$ . S pomočjo enačbe (11.4) dobimo

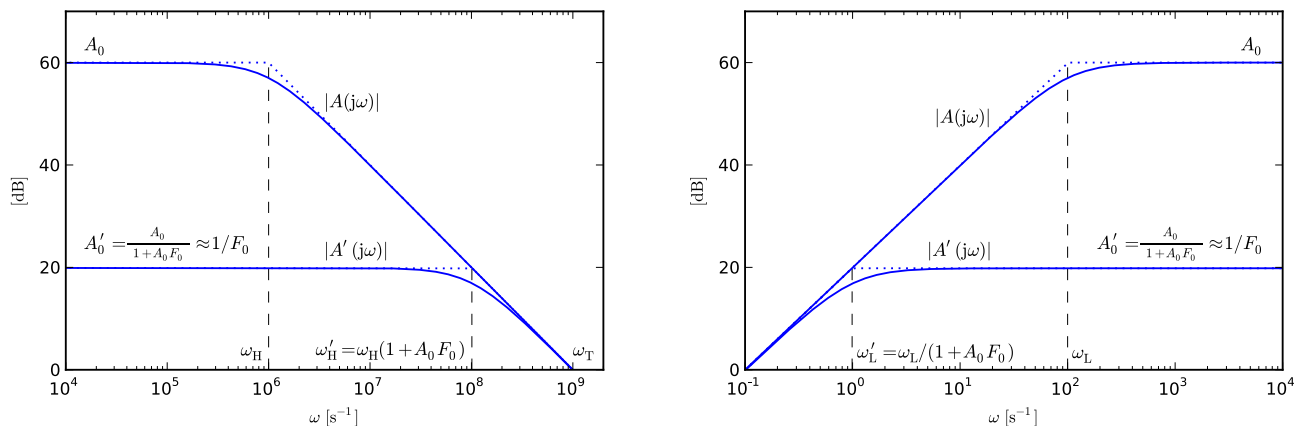
$$A'(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)F_0} = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\omega_H} + A_0F_0} = \frac{A_0}{1 + A_0F_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{(1+A_0F_0)\omega_H}} = \frac{A'_0}{1 + s/\omega'_H}. \quad (11.30)$$

Ker imamo negativno povratno vezavo, je odprtozančno ojačenje v srednjefrekvenčnem območju pozitivno ( $W_0 = A_0F_0 > 0$ ). Potek ojačenja  $A'(s)$  je po obliki enak poteku (11.29), le da je ojačenje  $A'_0$  za faktor  $1 + A_0F_0 > 1$

manjše od  $A_0$ , zgornja frekvenčna meja  $\omega'_H$  pa za enak faktor večja od  $\omega_H$ . Vidimo, da **negativna povratna vezava zmanjša ojačenje in zviša zgornjo frekvenčno mejo**. Pri tem velja

$$|A_0|\omega_H = |A'_0|\omega'_H = \omega_T. \quad (11.31)$$

Frekvenci  $\omega_T$ , ki sledi iz (11.31), pravimo tudi **produkt pasovne širine in ojačenja (gain-bandwidth product)**. Razmere v okolici zgornje frekvenčne meje so prikazane na sliki 11.8 (levo). Če ojačenje  $A(j\omega)$  nad zgornjo frekvenčno mejo ne upada s strmino  $-20\text{dB/dek}$ , zveza (11.31) ne velja.



Slika 11.8: Vpliv negativne povratne vezave na spodnjo (levo) in zgornjo (desno) frekvenčno mejo. Asimptotični poteki so narisani s pikčasto črto.

Potek ojačenja za ojačevalnik, ki ima spodnjo frekvenčno mejo  $\omega_L$  in ojačenje  $A_0$  v srednjefrekvenčnem območju, lahko pišemo kot

$$A(s) = \frac{A_0 s / \omega_L}{1 + s / \omega_L}. \quad (11.32)$$

Izraz (11.32) dobro opisuje potek ojačenja v nizko- in srednjefrekvenčnem območju, če je zgornja frekvenčna meja ojačevalnika precej višja od  $\omega_L$ , do spodnje frekvenčne meje pa ojačenje  $A(j\omega)$  raste s strmino  $20\text{dB/dek}$ . Poglejmo, kaj se zgodi, če ojačevalniku dodamo frekvenčno neodvisno negativno povratno vezavo z ojačenjem  $F_0$ . Ponovno izhajamo iz enačbe (11.4).

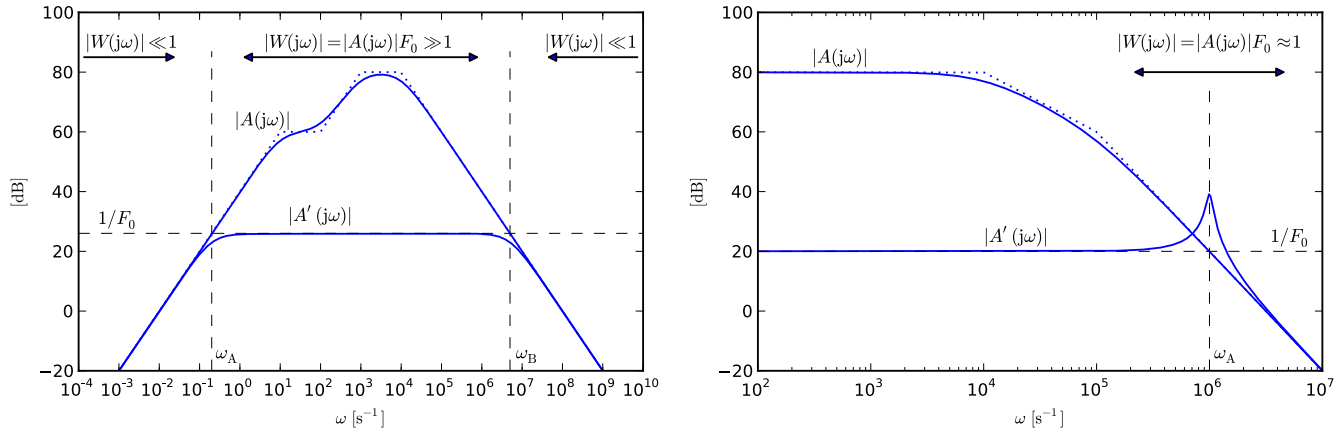
$$A'(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)F_0} = \frac{A_0 \frac{s}{\omega_L}}{1 + \frac{s}{\omega_L} + A_0 F_0 \frac{s}{\omega_L}} = \frac{A_0}{1 + A_0 F_0} \cdot \frac{(1 + A_0 F_0) \frac{s}{\omega_L}}{1 + (1 + A_0 F_0) \frac{s}{\omega_L}} = \frac{A'_0 s / \omega'_L}{1 + s / \omega'_L}. \quad (11.33)$$

Spodnja frekvenčna meja zaprtozančnega sistema je enaka

$$\omega'_L = \frac{\omega_L}{1 + A_0 F_0}. \quad (11.34)$$

**Negativna povratna vezava zniža spodnjo frekvenčno mejo za faktor  $1 + A_0 F_0$** . Razmere v okolici spodnje frekvenčne meje so prikazane na sliki 11.8 (desno). Če pod spodnjo frekvenčno mejo ojačenje  $A(j\omega)$  raste s strmino  $20\text{dB/dek}$ , lahko pišemo

$$\frac{\omega_L}{|A_0|} = \frac{\omega'_L}{|A'_0|}. \quad (11.35)$$



Slika 11.9: Vpliv negativne povratne vezave pri splošnem poteku  $A(s)$  (levo) in pojav resonance v območju, kjer je  $|W(j\omega)| = |A(j\omega)|F_0 \approx 1$  (desno). Asimptotičen potek  $|A(j\omega)|$  je narisan s pikčasto črto.

Predpostavimo sedaj splošen potek ojačenja  $A(s)$  in frekvenčno neodvisno negativno povratno vezavo  $F_0$ . Ojačenje zaprtozančnega sistema je določeno z enačbo (11.4), ki se v frekvenčnem prostoru ( $s = j\omega$ ) glasi

$$A'(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + A(j\omega)F_0} \quad (11.36)$$

Če je vrednost  $|A(j\omega)F_0|$  mnogo večja od 1, lahko (11.36) poenostavimo v

$$A'(j\omega) \approx \frac{A(j\omega)}{A(j\omega)F_0} = \frac{1}{F_0}. \quad (11.37)$$

**Za velike vrednosti  $A(j\omega)F_0$  je ojačenje zaprtozančnega sistema neodvisno od frekvence in enako  $1/F_0$ .** Ko velja  $|A(j\omega)F_0| \ll 1$ , se (11.36) poenostavi v

$$A'(j\omega) \approx \frac{A(j\omega)}{1} = A(j\omega). \quad (11.38)$$

**Pri majhnih vrednostih  $A(j\omega)F_0$  je ojačenje zaprtozančnega sistema enako ojačenju sistema brez povratne vezave  $A(j\omega)$ .** Razmere, ki jih podajata poenostavitvi (11.37) in (11.38) so prikazane na sliki 11.9 (levo). Z  $\omega_A$  in  $\omega_B$  smo označili frekvenci, kjer je  $|A(j\omega)F_0| = 1$ . Obnašanje zaprtozančnega ojačenja  $A'(j\omega)$  v prehodnem območju (okolici frekvenc  $\omega_A$  in  $\omega_B$ ) ni zmeraj tako pohlevno, kot je to prikazano na sliki 11.9 (levo). Vzemimo prevajalno funkcijo

$$A(s) = \frac{A_0}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2)}, \quad (11.39)$$

kjer je  $A_0 = 10^4$ ,  $p_1 = -10^4 \text{ s}^{-1}$  in  $p_2 = -10^5 \text{ s}^{-1}$ . Z  $\omega_A$  označimo frekvenco, pri kateri velja  $|A(j\omega_A)F_0| = 1$ . Če je ojačenje povratne vezave enako  $F_0 = 1/10$ , dobimo potek zaprtozančnega ojačenja  $A'(j\omega)$ , ki ima resonanco v prehodnem območju (okolici  $\omega_A$ ). Razmere so prikazane na sliki 11.9 (desno). Prisotnosti resonance ne moremo ugotoviti iz poenostavljenih izrazov (11.37) in (11.38), saj ta nastopi v prehodnem območju, kjer izraza nista veljavna.

### 11.2.3 Poli zaprtozančne prevajalne funkcije

V sistemih s povratno vezavo nas pogosto zanima lega polov zaprtozančnega ojačenja v odvisnosti od nekega parametra sistema (naprimer  $F_0$ ). Če pole vrišemo v kompleksno ravnino, dobimo **diagram lege korenov**, ki je zelo priročno orodje za razumevanje zveze med ojačenjem povratne vezave in stabilnostjo zaprtozančnega sistema[22]. Poglejmo si ga za dva primera ojačevalnikov z negativno povratno vezavo.

**Primer 11.3:** Za ojačevalnik s prevajalno funkcijo  $A(s)$ , ki ima dva realna pola ( $-\omega_1$  in  $-\omega_2$ ) in ojačenje  $A_0$  v nizko- in srednjefrekvenčnem območju, narišimo diagram lege korenov zaprtozančnega ojačenja. Parameter pri risanju diagrama naj bo ojačenje povratne vezave  $F(s) = F_0$ . Pol  $-\omega_1$  je dominanten ( $\omega_1 < \omega_2$ ).

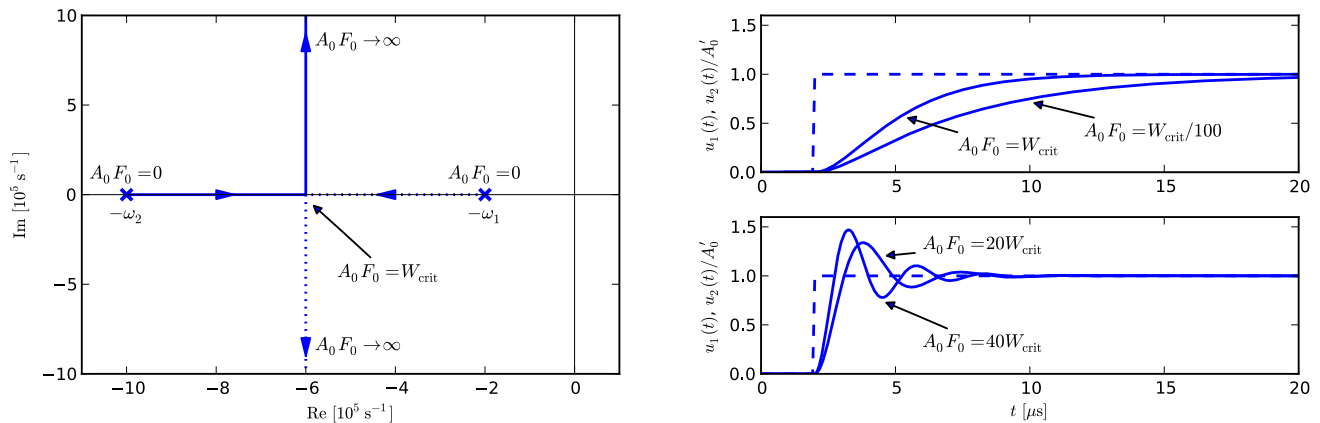
$$A(s) = \frac{A_0}{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)}. \quad (11.40)$$

Zaprtozančno ojačenje (11.4) je enako

$$A'(s) = \frac{\frac{A_0}{(1+s/\omega_1)(1+s/\omega_2)}}{1 + \frac{A_0 F_0}{(1+s/\omega_1)(1+s/\omega_2)}} = \frac{A_0 \omega_1 \omega_2}{s^2 + (\omega_1 + \omega_2)s + (1 + A_0 F_0)\omega_1 \omega_2}. \quad (11.41)$$

Če vstavimo  $s = 0$  v (11.41), dobimo ojačenje pri nizkih frekvencah, ki znaša

$$A'_0 = \frac{A_0}{1 + A_0 F_0}. \quad (11.42)$$



Slika 11.10: Diagram lege korenov za ojačevalnik z dvema poloma ((11.40),  $A_0 = 100$ ,  $\omega_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 10^6 \text{ s}^{-1}$ ) in časovni potek normiranega odziva sistema (polna črta) na enotino stopnico (črtkana črta), ko sta pola realna (desno zgoraj) in konjugirano kompleksna (desno spodaj).

Pole zaprtozančnega sistema dobimo iz enačbe, ki zahteva, da je imenovalec  $A'(s)$  enak 0.

$$s^2 + (\omega_1 + \omega_2)s + (1 + A_0 F_0)\omega_1 \omega_2 = 0. \quad (11.43)$$

Imamo dva pola

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm \frac{\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 - 4A_0 F_0 \omega_1 \omega_2}}{2}. \quad (11.44)$$



Če je  $A_0F_0 = 0$  (sistem brez povratne vezave, ko je  $F_0 = 0$ ), sta pola  $p_1 = -\omega_1$  in  $p_2 = -\omega_2$  enaka poloma  $A(s)$ . Z večanjem  $A_0F_0$  se  $p_1$  pomika proti višjim frekvencam,  $p_2$  pa proti nižjim frekvencam. Ko je

$$A_0F_0 = \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{4\omega_1\omega_2} = W_{\text{crit}}, \quad (11.45)$$

se pola zlijeta v en dvojen realen pol

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (11.46)$$

Z nadaljnjim večanjem  $A_0F_0$  postane izraz pod korenem v (11.44) negativen, pola pa konjugirano kompleksna.

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm j \frac{\sqrt{4A_0F_0\omega_1\omega_2 - (\omega_1 + \omega_2)^2}}{2}. \quad (11.47)$$

Konjugirano kompleksna pola imata od  $F_0$  neodvisen realni del. Ležita na vzporednici z imaginarno osjo, ki gre skozi točko, kjer sta se pola združila v dvojen realen pol (11.46). Z večanjem  $A_0F_0$  se pola čedalje bolj odmikata od realne osi. Vidimo, da za nobeno pozitivno vrednost  $A_0F_0$  pola ne uideta na desno stran imaginarne osi, kar pomeni, da je zaprtizančen sistem z negativno povratno vezavo zmeraj stabilen. Razmere ilustrira slika 11.10 (levo).

Ko pola postaneta konjugirano kompleksna, realni del pola pa večji od imaginarnega (izraz (9.113) postane realen), se v frekvenčni karakteristiki zaprtizančnega sistema pojavi resonanca. To se zgodi, ko velja

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} < \frac{\sqrt{4A_0F_0\omega_1\omega_2 - (\omega_1 + \omega_2)^2}}{2}, \quad (11.48)$$

oziroma, ko  $A_0F_0$  izpolnjuje pogoj

$$A_0F_0 > \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{2\omega_1\omega_2}. \quad (11.49)$$

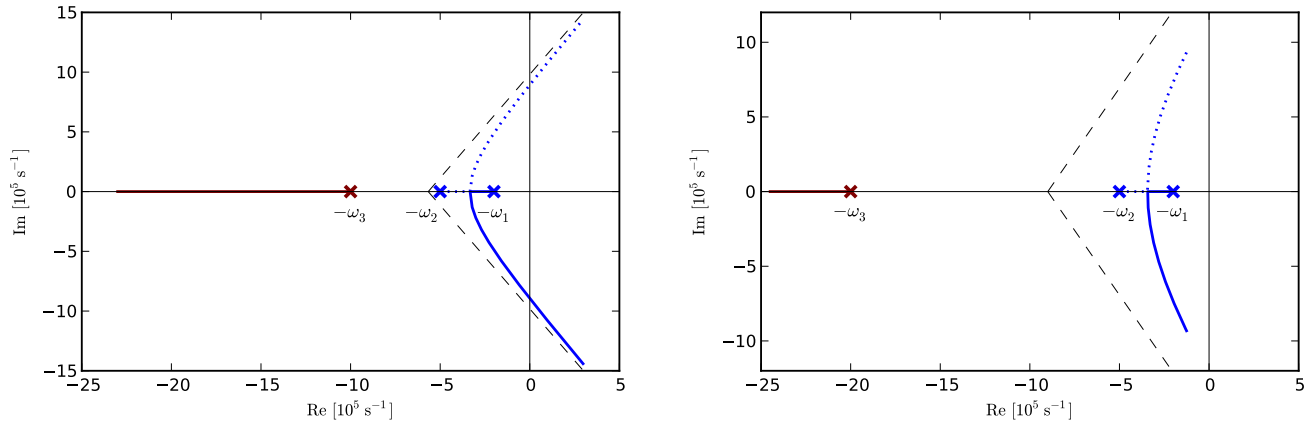
Lega polov vpliva na odzive sistema v časovnem prostoru. Če sistem vzbujamo z enotino stopnico, dobimo za  $A_0F_0 \leq W_{\text{crit}}$ , eksponentne odzive brez prenihaja (slika 11.10, desno zgoraj). Pola zaprtizančnega sistema sta tedaj realna. Ko zaradi večanja  $A_0F_0$  pola postaneta konjugirano kompleksna, se v časovnem poteku odziva pojavi prenihaj, ki se sčasoma izniha (slika 11.10, desno spodaj). Višina prenihaja in frekvenca nihanja se večata, ko večamo  $A_0F_0$ , hitrost iznihavanja pa ostaja nespremenjena, saj je realni del obeh polov neodvisen od  $A_0F_0$ . V splošnem velja, da se hitrost odziva na enotino stopnico večja z večanjem  $A_0F_0$ , kar lahko pripišemo višji zgornji frekvenčni meji sistema, čemur za večjo hitrost pa je prenihaj.  $\triangle$

**Primer 11.4:** Če ima ojačevalnik več kot dva pola, zaprtizančen sistem ni zmeraj stabilen. Slika 11.11 prikazuje diagram lege korenov za zaprtizančen sistem z ojačevalnikom, katerega ojačenje je enako

$$A(s) = \frac{A_0}{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)(1 + s/\omega_3)}. \quad (11.50)$$

Enačba polov zaprtizančnega sistema se glasi

$$s^3 + (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)s^2 + (\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3)s + A_0F_0\omega_1\omega_2\omega_3 = 0. \quad (11.51)$$



Slika 11.11: Diagram lege korenov za ojačevalnik s tremi poli in  $A_0 > 0$ , ki je nestabilen pri dovolj velikem  $F_0 \leq 1$  (levo). Če leži tretji pol pri dovolj visoki frekvenci, ojačevalnika ne moremo destabilizirati z negativno povratno vezavo, ki ne ojačuje signala (desno). Diagrama sta narisana za  $0 \leq F_0 \leq 1$ . Asimptote so narisane s črtkanimi črtami.

Pri večanju  $A_0 F_0$  postajajo vrednosti  $s$ , ki rešijo enačbo, čedalje večje. Tedaj lahko zanemarimo vse člene, razen dveh najvišjih potenc  $s$  in člena, ki vsebuje  $A_0 F_0$ . Ostali členi so nepomembni in z njihovimi koeficienti lahko počnemo karkoli. Spremenili jih bomo tako, da bo enačba (11.51) postala

$$s^3 + (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)s^2 + \underbrace{\frac{1}{3}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2 s + \frac{1}{27}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^3 + A_0 F_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3}_{\text{nepomembno}} = 0. \quad (11.52)$$

Dobimo enačbo

$$\left(s + \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{3}\right)^3 + A_0 F_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3 = 0. \quad (11.53)$$

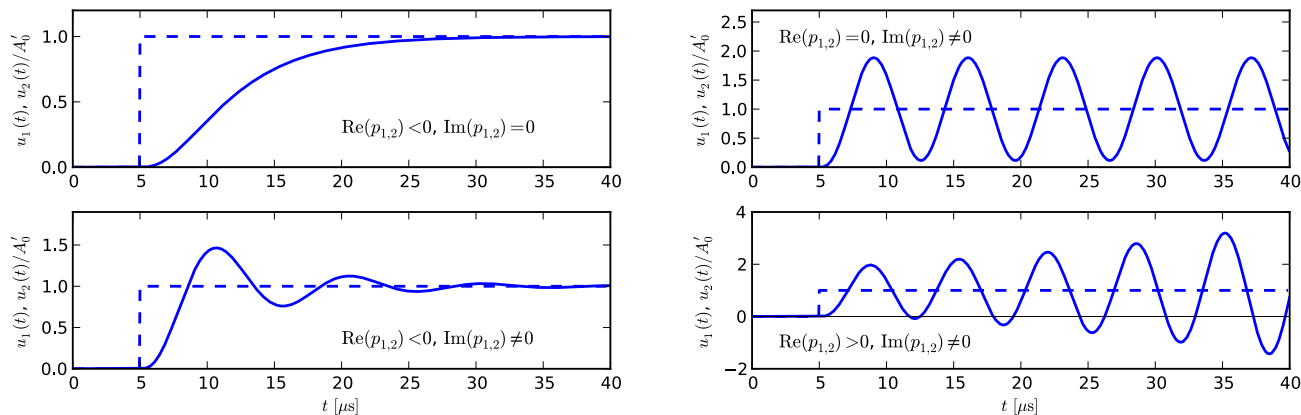
Enačba ima tri rešitve

$$s_i = (A_0 F_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/3} e^{j \frac{i\pi}{3}} - \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{3}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (11.54)$$

Rešitve predstavljajo asimptotično lego polov, ko  $A_0 F_0$  raste preko vseh meja. Asimptote se sekajo v točki  $-(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)/3$  in potekajo v smereh, ki s pozitivno realno osjo oklepajo kote  $60^\circ$ ,  $180^\circ$  in  $-60^\circ$ .

Še posebej zanimiv je tisti del diagrama lege korenov, ki ustreza vrednostim  $|F_0| \leq 1$ . Ta del pripada povratnim vezavam, ki ne ojačujejo signala. Za negativne povratne vezave in  $A_0 > 0$  mu pripadajo vrednosti  $0 \leq F_0 \leq 1$ , za  $A_0 < 0$  pa vrednosti  $-1 \leq F_0 \leq 0$ . Če izberemo  $A_0 = 50$ ,  $\omega_1 = 2 \cdot 10^5 \text{s}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 5 \cdot 10^5 \text{s}^{-1}$  in  $\omega_3 = 10 \cdot 10^5 \text{s}^{-1}$ , dobimo diagram lege korenov na sliki 11.11 (levo). Pri dovolj velikem  $F_0 \leq 1$  dva pola zaideta na desno stran imaginarne osi in zaprtizančen sistem postane nestabilen. Odzive zaprtizančnega sistema s tremi poli na enotino stopnico prikazuje slika 11.12. Še posebej zanimiv je primer, ko sta dva pola na imaginarni osi (slika 11.12, desno zgoraj). Odziv ima tedaj obliko sinusnega nihanja. Tak sistem imenujemo **sinusni oscilator**.

Vsi sistemi, ki imajo tri pole, pa ne postanejo nestabilni pri največji negativni povratni vezavi, ki ne ojačuje signala ( $|F_0| = 1$ ). Če izberemo  $A_0 = 10$ ,  $\omega_1 = 2 \cdot 10^5 \text{s}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 5 \cdot 10^5 \text{s}^{-1}$  in  $\omega_3 = 20 \cdot 10^5 \text{s}^{-1}$ , je zaprtizančen sistem za  $0 \leq F_0 \leq 1$  zmeraj stabilen (slika 11.11, desno), saj vsi poli ostanejo na levi strani imaginarne osi. Nestabilen



Slika 11.12: Normiran odziv ojačevalnika s tremi poli (polna črta) na entino stopnico (črtkana črta) za različne lege polov  $p_1$  in  $p_2$ .

sistem dobimo šele z dovolj velikim  $F_0 > 1$ . Tako obnašanje je še posebej zaželeno pri realnih ojačevalnikih, ki imajo ponavadi vsaj tri pole. Z ustrezno lego teh polov lahko dosežemo, da ojačevalnika ne moremo destabilizirati s frekvenčno neodvisno negativno povratno vezavo, ki ne ojačuje signala.  $\triangle$

Ko ima zaprtizančen sistem več kot dva pola, določanje polov ni enostavna naloga, saj moramo poiskati ničle polinoma. Posledično tudi določanje stabilnosti zaprtizančnega sistema iz lege polov prevajalne funkcije ni enostavno.

## 11.3 Stabilnost sistemov s povratno vezavo

Stabilnost zaprtizančnega sistema lahko določimo preko polov prevajalne funkcije. Za sisteme z več kot dvema poloma je to dokaj zahtevna naloga, saj moramo poiskati ničle polinoma. Če vsi poli ležijo levo od imaginarne osi, je sistem stabilen. V tem poglavju si bomo ogledali, kako lahko brez določanja polov ugotovimo, ali je zaprtizančen sistem stabilen.

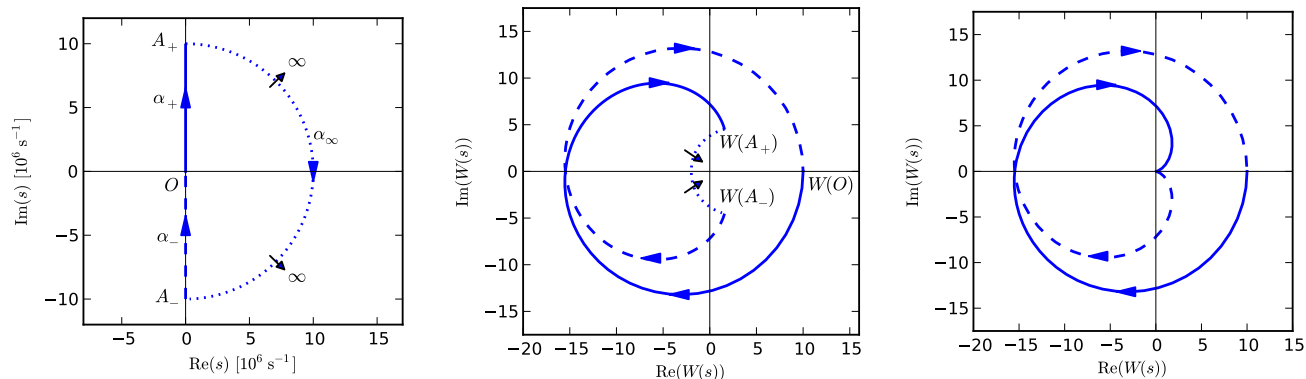
### 11.3.1 Nyquistov diagram

Nyquistov diagram[22] je pomembno orodje pri analizi linearnih sistemov, saj lahko z njegovo pomočjo hitro ugotovimo, ali je zaprtizančen sistem stabilen. V kompleksni ravnini si izberimo sklenjeno pot ( $\alpha$ ) po kateri bo potovala točka, ki pripada kompleksni frekvenci  $s$ . Pot naj se začne na imaginarni osi v točki  $-j\infty$ , poteka vzdolž imaginarne osi skozi izhodišče (točka  $O$ ) proti  $+j\omega$  (odseka  $\alpha_-$  in  $\alpha_+$ ) in nato zaključi v loku z neskončnim polmerom (odsek  $\alpha_\infty$ ). Pri tem pot v smeri urinega kazalca objame desno kompleksno polravnino (slika 11.13, levo). Ko točka  $s$  potuje vzdolž poti  $\alpha$ , odprtozančno ojačenje  $W(s) = A(s)F(s)$  popiše krivuljo v kompleksni ravnini, ki jo imenujemo **Nyquistova krivulja** (slika 11.13, desno). Dobljeni sliki pravimo tudi **Nyquistov diagram**.

Nyquistova krivulja na sliki 11.13 pripada funkciji

$$W(s) = \frac{A_0(1 - s/\omega_0)}{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)(1 + s/\omega_3)}, \quad (11.55)$$

kjer je  $A_0 = 10$ ,  $\omega_0 = 10^6 \text{s}^{-1}$ ,  $\omega_1 = 3 \cdot 10^6 \text{s}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 4 \cdot 10^6 \text{s}^{-1}$ , in  $\omega_3 = 5 \cdot 10^6 \text{s}^{-1}$ .



Slika 11.13: Sklenjena pot  $\alpha$ , po kateri potuje  $s$  pri risanju Nyquistovega diagrama (levo). Nyquistova krivulja funkcije (11.55) pri končnem (na sredini) in neskončnem (desno) polmeru odseka  $\alpha_\infty$ .  $W(s)$  preslika točki  $A_-$  in  $A_+$  v točki  $W(A_-)$  in  $W(A_+)$ . Če obstaja  $\lim_{s \rightarrow \infty} W(s)$ , polmer poti  $\alpha_\infty$  pa raste proti neskončnosti, se točki  $W(A_-)$  in  $W(A_+)$  skupaj z odsekom, ki ustreza  $\alpha_\infty$ , skrčita v točko  $\lim_{s \rightarrow \infty} W(s)$ .

Iz teorije sistemov [18] in lastnosti Laplaceove transformacije [19] sledi, da imajo prevajalne funkcije vezij lastnost

$$H(s^*) = (H(s))^*. \quad (11.56)$$

To lastnost ima tudi odprtozančno ojačenje  $W(s)$ , ki ga izrazimo kot produkt prevajalnih funkcij  $A(s)$  in  $F(s)$ .

$$W(s^*) = (W(s))^*. \quad (11.57)$$

Ker je pot  $\alpha$  simetrična glede na realno os (in  $s$  tem ob konjugaciji preide sama vase), je zaradi lastnosti (11.57) tudi Nyquistova krivulja  $W(s)$  simetrična glede na realno os. Recimo, da je  $W(s)$  racionalna funkcija, ki ima  $N$  ničel in  $P$  polov. Če je  $N \leq P$ , velja

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W(j\omega) = \lim_{s \rightarrow -\infty} W(j\omega), \quad (11.58)$$

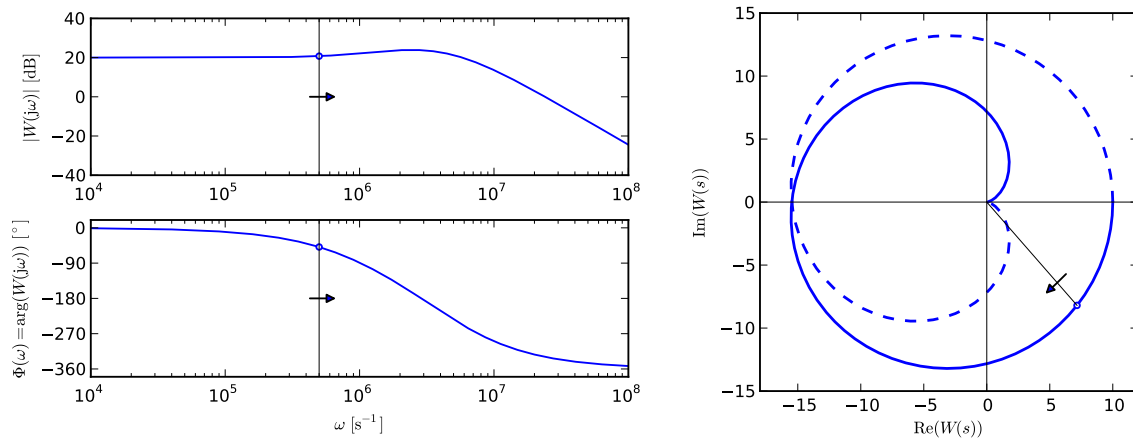
V tem primeru se odsek, ki ustreza poti  $\alpha_\infty$ , po preslikavi z  $W(s)$  skrči v eno točko. Tako naprimer se za (11.55) točke  $s$  polkroga  $\alpha_\infty$  preslikajo v pikčasto krivuljo na srednjem grafu slike 11.13, ki se ob večanju polmera polkroga krči proti koordinatnemu izhodišču (slika 11.13, desno). Za take  $W(s)$  zadošča, če narišemo le odsek, ki ustreza poti  $\alpha_+$ , preostanek Nyquistove krivulje pa dobimo z zrcaljenjem preko realne osi (lastnost (11.57)).

Točke Nyquistove krivulje, ki jih dobimo iz odseka  $\alpha_+$ , ustrezajo frekvencam na realni osi Bodejevega diagrama  $W(j\omega)$ . Del Nyquistove krivulje  $W(s)$ , ki ustreza poti  $\alpha_+$  lahko narišemo neposredno iz Bodejevega diagrama ojačenja  $W(j\omega)$ . Pri tem vsaki frekvenci  $\omega$  v Bodejevem diagramu priredimo točko na kompleksni ravnini, ki je od izhodišča oddaljena za  $|W(j\omega)|$  in oklepa kot  $\Phi(\omega)$  s pozitivno realno osjo (slika 11.14). Če za  $W(s)$  velja (11.58), se odsek, ki ustreza poti  $\alpha_\infty$ , skrči v točko, do celotne Nyquistove krivulje pa manjka le še odsek, ki ustreza poti  $\alpha_-$ . Dobimo ga tako, da točke, ki pripadajo poti  $\alpha_+$ , zrcalimo preko realne osi (lastnost (11.57)).

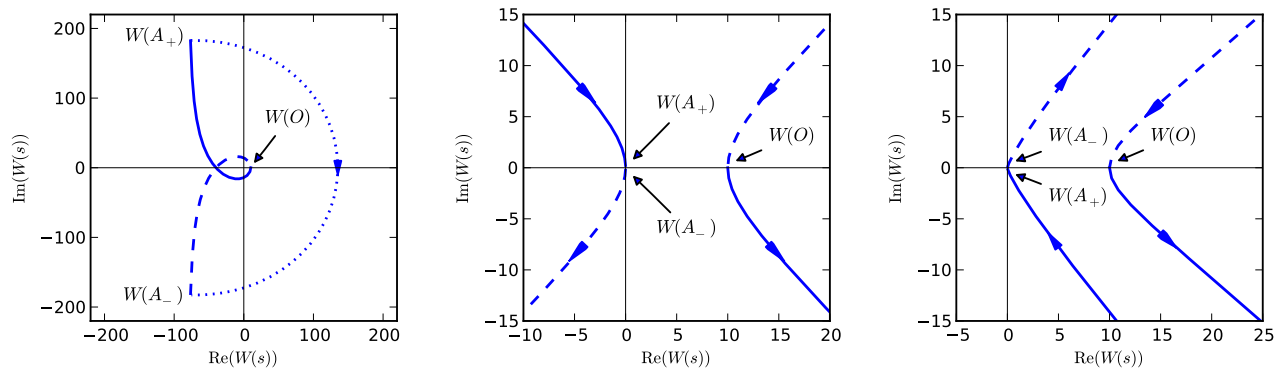
Vse funkcije  $W(s)$  pa nimajo tako enostavnih Nyquistovih diagramov. Odprtozančno ojačenje

$$W(s) = \frac{A_0(1 - s/\omega_0)^2}{1 + s/\omega_1}, \quad (11.59)$$

kjer je  $A_0 = 10$ ,  $\omega_0 = 10^6 \text{s}^{-1}$  in  $\omega_1 = 2 \cdot 10^6 \text{s}^{-1}$  ima več ničel, kot polov. Zato pričakujemo, da se odsek, ki ustreza poti  $\alpha_\infty$ , ne bo skrčil v eno točko. Točki  $A_+$  in  $A_-$  se preslikata v  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} W(j\omega)$  in  $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} W(j\omega)$ ,



Slika 11.14: Iz Bodejevega diagrama (levo) lahko narišemo Nyquistov diagram (desno), če je vrednost  $|W(s)|$  omejena, ko gre  $s$  proti neskončnosti. Dobimo krivuljo, ki je izrisana s polno črto. Z zrcaljenjem te krivulje preko realne osi dobimo še odsek, ki ustreza poti  $\alpha_-$  (črtkana črta).



Slika 11.15: Nyquistove krivulje za funkcije (11.59) (levo), (11.60) (na sredini) in (11.61) (desno).

ki ležita na nasprotnih koncih kompleksne ravnine. Povezuje ju polkrog z neskončnim polmerom, ki predstavlja preslikavo poti  $\alpha_\infty$  (slika 11.15, levo). Zaradi njega je Nyquistova krivulja sklenjena, čeprav točka na njej pobegne v neskončnost.

Večje število polov kot ničel pa ni edini razlog, da točka na Nyquistovi krivulji pobegne v neskončnost. To se zgodi tudi, ko gre pot  $\alpha$  skozi pol funkcije  $W(s)$ . Pol  $p$  ne more ležati na odseku  $\alpha_\infty$ , saj bi člen  $1 - s/p$ , ki ga ta pol vnese v imenovalcec  $W(s)$ , zaradi  $|p| \rightarrow \infty$  bil enak 1 in  $s$  tem izpadel. Če pot  $\alpha$  gre skozi kak pol, mora ta leži na odsekih  $\alpha_-$  ali  $\alpha_+$ , ki pokrivata imaginarno os. Poglejmo si naprimer funkcijo

$$W(s) = \frac{A_0(1 - s/\omega_0)}{1 + s^2/\omega_1^2}, \quad (11.60)$$

kjer sta  $A_0 = 10$ ,  $\omega_0 = \omega_1 = 10^6 \text{ s}^{-1}$ .  $W(s)$  ima pola  $p_{1,2} = \pm j\omega_1$ , ki ležita na imaginarni osi. Nyquistov diagram ima nezveznost, kjer  $W(s)$  pobegne v neskončnost, ko se  $s$  bliža kateremu od teh dveh polov. Razmere prikazuje slika 11.15 (na sredini). Na sliki odseka  $\alpha_+$  točka pobegne v neskončnost desno spodaj in se vrne levo zgoraj, na sliki odseka  $\alpha_-$  pa pobegne levo spodaj in se vrne desno zgoraj. Tokrat Nyquistova krivulja ni sklenjena, saj ima pri  $s = p_1$  in  $s = p_2$  nezveznost.

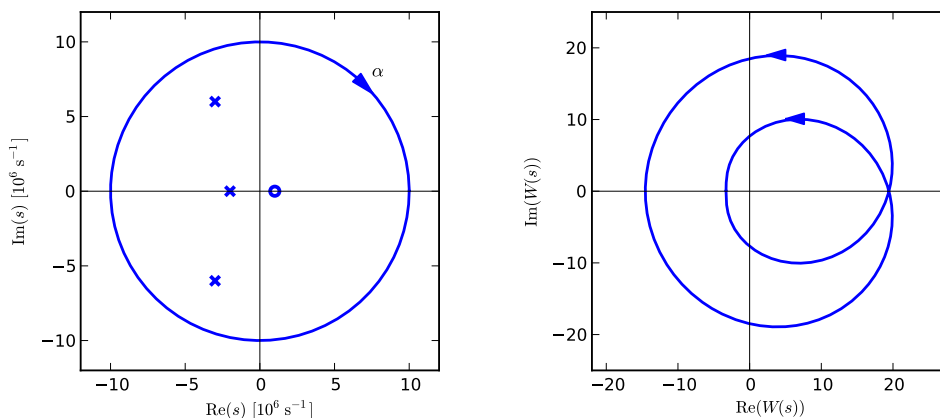
Če je pol na imaginarni osi večkratni, kot je to pri funkciji

$$W(s) = \frac{A_0(1 - s/\omega_0)}{(1 + s^2/\omega_1^2)^2}, \quad (11.61)$$

dobimo Nyquistovo krivuljo na sliki (11.15) (desno). Tokrat krivulja  $W(s)$  pobegne v neskončnost in se od tam tudi vrne na isti strani kompleksne ravnine.

### 11.3.2 Nyquistov kriterij stabilnosti

Pri izpeljavi Nyquistovega kriterija stabilnosti izhajamo iz **načela argumenta** [23], ki nam govori o učinku preslikave  $W(s)$  na sklenjeno pot v kompleksni ravnini. Izberimo si sklenjeno pot  $\alpha$ , ki ne gre skozi noben pol ali ničlo  $W(s)$ , v smeri urinega kazalca pa enkrat obkroži  $P$  polov in  $N$  ničel funkcije  $W(s)$ . Če gremo vzdolž poti  $\alpha$  in gledamo v smeri premikanja, ležijo obkroženi poli in ničle na naši desni strani. Krivulja, ki jo dobimo, če pot  $\alpha$  preslikamo z  $W(s)$ , v smeri urinega kazalca obkroži koordinatno izhodišče  $N - P$  krat. En obhod v smeri urinega kazalca štejemo kot eno pozitivno (+1) obkroženje, en obhod v nasprotni smeri pa kot eno negativno (-1) obkroženje.



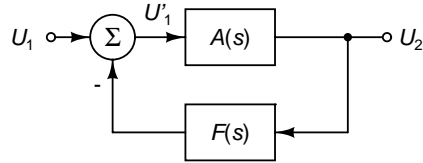
Slika 11.16: Načelo argumenta. Poli in ničle funkcije  $W(s)$  ter sklenjena pot  $\alpha$  (levo). Preslikava poti  $\alpha$  s funkcijo  $W(s)$  (desno).

**Primer 11.5:** Poglejmo si načelo argumenta za funkcijo

$$W(s) = \frac{A_0(1 - s/\omega_0)}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2)(1 - s/p_3)}, \quad (11.62)$$

kjer je  $A_0 = 10$ ,  $\omega_0 = 10^6 \text{ s}^{-1}$ ,  $p_{1,2} = (-3 \pm 6j) \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$  in  $p_3 = -2 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ . Funkcija ima tri pole ( $P = 3$ ) in eno ničlo ( $N = 1$ ). Sklenjena pot  $\alpha$  v smeri urinega kazalca enkrat obkroži vse pole in ničle (slika 11.16, levo). Če jo preslikamo s funkcijo  $W(s)$ , pričakujemo sklenjeno pot, ki v smeri urinega kazalca obkroži koordinatno izhodišče  $N - P = -2$  krat. En negativen obhod v smeri urinega kazalca je enakovreden enemu pozitivnemu obhodu v nasprotni smeri urinega kazalca. Preslikana krivulja v nasprotni smeri urinega kazalca dvakrat obkroži koordinatno izhodišče (slika 11.16, desno).  $\triangle$

**Imejmo zaprtizančen sistem, ki je sestavljen iz ojačevalnika s prevajalno funkcijo  $A(s)$  in povratne ve-zave z ojačenjem  $F(s)$ , katere signal odštevamo od vhodnega signala (slika 11.17). Kot sklenjeno pot  $\alpha$  uporabimo kar tisto, ki je prikazana na sliki 11.13 (levo). Izhajali bomo iz dveh predpostavk:**



Slika 11.17: Zaprtozančen sistem, ki ga obravnavamo pri izpeljavi Nyquistovega kriterija stabilnosti.

1. Če je  $z$  ničla  $F(s)$ , potem  $z$  ne more biti pol  $A(s)$ .
2. Poli in ničle izraza  $1 + W(s)$  ne ležijo na imaginarni osi.

Prva predpostavka pomeni, da so vsi poli  $A(s)$  hkrati tudi poli odprtozančnega ojačenja  $W(s) = A(s)F(s)$ . Izraza  $1 + W(s)$  in  $W(s)$  imata enake pole. Iz druge predpostavke izhaja, da na poti  $\alpha$  ni polov ali ničel izraza  $1 + W(s)$ , saj so poli in ničle lahko le končna kompleksna števila in zato ne morejo ležati na odseku  $\alpha_\infty$ . Zaprtozančno ojačenje sistema podaja enačba (11.4).

$$A'(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)F(s)} = \frac{A(s)}{1 + W(s)}. \quad (11.63)$$

Zaradi prve predpostavke se poli  $A(s)$  v izrazu (11.63) krajšajo s poli  $1 + W(s)$  in tako izpadejo kot poli zaprtozančnega ojačenja (11.63). Ostanejo le tisti poli, ki so ničle izraza  $1 + W(s)$ . Da jih dobimo, moramo rešiti enačbo

$$1 + A(s)F(s) = 0. \quad (11.64)$$

Poli izraza  $1 + W(s)$  so hkrati tudi poli odprtozančnega ojačenja  $W(s) = A(s)F(s)$ . Na desni strani imaginarne osi leži  $N$  ničel in  $P$  polov izraza  $1 + W(s)$ . Sklenjena pot  $\alpha$  v smeri urinega kazalca objame te ničle in pole. Zaradi druge predpostavke na poti  $\alpha$  ne leži noben pol niti ničla, zaradi česar smemo uporabiti načelo argumenta. Po preslikavi poti s funkcijo  $1 + W(s)$  dobimo pripadajočo Nyquistovo krivuljo, ki je zaradi druge predpostavke sklenjena, saj ne gre skozi noben pol  $W(s)$ . Iz načela argumenta sledi, da krivulja obkroži koordinatno izhodišče  $N - P$  krat.

Nyquistova krivulja odprtozančnega ojačenja  $W(s)$ , je po obliki enaka Nyquistovi krivulji  $1 + W(s)$ , le da je premaknjena v levo za 1 in  $N - P$  krat obkroži točko  $-1$  v smeri urinega kazalca. Stabilen zaprtozančen sistem nima polov na desni strani imaginarne osi ( $N = 0$ ). Za tak sistem je število obkroženj v smeri urinega kazalca enako  $-P \leq 0$ . Če je zaprtozančen sistem stabilen, Nyquistova krivulja odprtozančnega ojačenja  $W(s)$  ne obkroži točke  $-1$  v smeri urinega kazalca. Slednja ugotovitev je znana pod imenom Nyquistov kriterij stabilnosti [24] in je pomembna, ker lahko z njeno pomočjo sklepamo o stabilnosti zaprtozančnega sistema zgolj na osnovi odprtozančnega ojačenja  $W(s) = A(s)F(s)$ .

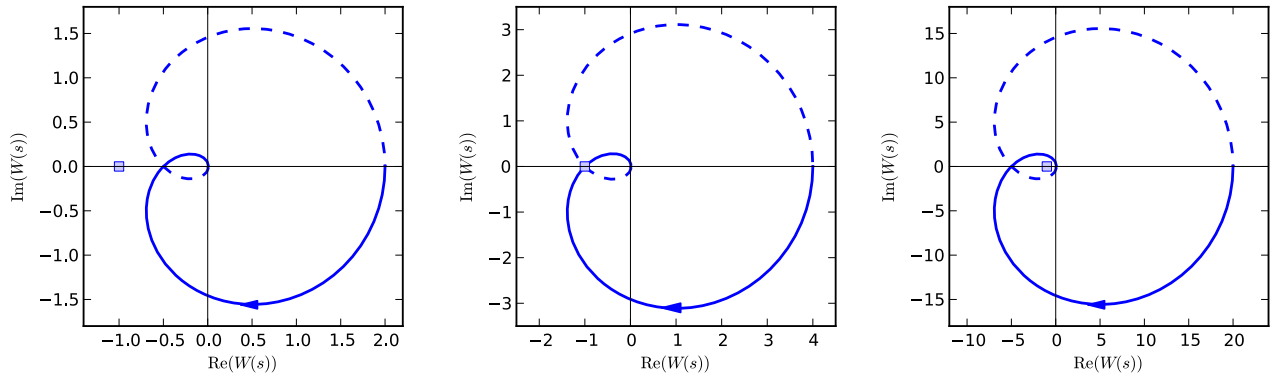
**Primer 11.6:** Imejmo sistem z ojačevalnikom

$$A(s) = \frac{A_0}{(1 + s/\omega_1)^4}, \quad (11.65)$$

kjer je  $A_0 = 20$  in  $\omega_1 = 5 \cdot 10^6 \text{s}^{-1}$ , in frekvenčno neodvisno povratno vezavo  $F(s) = F_0$ . Narišimo Nyquistov diagram za ojačenja povratne vezave  $F_0 = 0.1$ ,  $F_0 = 0.2$  in  $F_0 = 1.0$ .

Odpertozančno ojačenje je enako

$$W(s) = \frac{A_0 F_0}{(1 + s/\omega_1)^4} \quad (11.66)$$



Slika 11.18: Nyquistov diagram za ojačevalnik s štirikratnim realnim polom  $\omega_1 = 5 \cdot 10^6 \text{s}^{-1}$  in ojačenjem  $A_0 = 20$  pri ojačenju povratne vezave  $F_0 = 0,1$  (levo),  $F_0 = 0,2$  (na sredini) in  $F_0 = 1$  (desno). Točka  $-1$  je označena s kvadratom.

in ima en štirikraten realen pol na levi strani imaginarne osi pri  $-\omega_1$ . Ker noben od polov  $W(s)$  ne leži na imaginarni osi, pričakujemo, da bo Nyquistova krivulja  $W(s)$  sklenjena. Pri  $F_0 = 0.1$  Nyquistova krivulja ne obkroži točke  $-1$  v smeri urinega kazalca (slika 11.18, levo). Zaprtizančen sistem je zato stabilen, saj vsi njegovi poli ležijo levo od imaginarne osi.

Pri  $F_0 = 1$  krivulja obkroži točko  $-1$  dvakrat v smeri urinega kazalca (slika 11.18, desno), zato sklepamo, da je zaprtizančen sistem nestabilen. Iz števila obkroženj ugotovimo, da je  $N - P = 2$ . Desno od imaginarne osi ne leži noben pol  $W(s)$ , kar pomeni, da je  $P = 0$ . Sklepamo lahko, da je število polov zaprtizančnega sistema ( $N$ ), ki ležijo desno od imaginarne osi, enako 2. Preverimo to še po drugi poti. Prevajalna funkcija zaprtizančnega sistema je enaka

$$A'(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)F_0} = \frac{A_0}{(1 + s/\omega_1)^4 + A_0F_0}. \quad (11.67)$$

Iz enačbe

$$(1 + s/\omega_1)^4 + A_0F_0 = 0 \quad (11.68)$$

dobimo štiri pole zaprtizančnega sistema

$$p_{1,2} = \left( \left( \frac{A_0F_0}{4} \right)^{1/4} (-1 \pm j) - 1 \right) \omega_1, \quad (11.69)$$

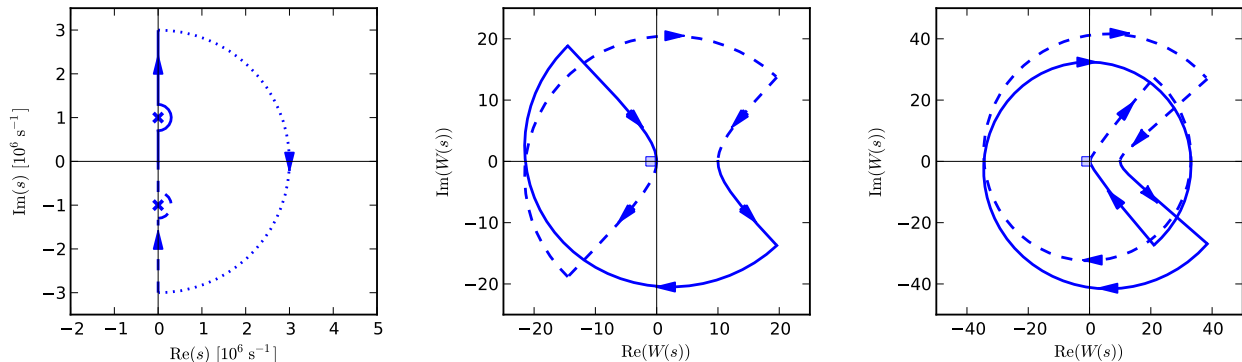
$$p_{3,4} = \left( \left( \frac{A_0F_0}{4} \right)^{1/4} (1 \pm j) - 1 \right) \omega_1. \quad (11.70)$$

Pri  $A_0F_0 = 4$  (pri  $F_0 = 0,2$ ) pola  $p_3$  in  $p_4$ , ki sta hkrati tudi ničli izraza  $1 + W(s)$ , padeta na imaginarno os. V tem primeru ne moremo uporabiti načela argumenta, saj je kršena druga predpostavka. Nyquistova krivulja tedaj gre skozi točko  $-1$  (slika 11.18, na sredini). Če je  $A_0F_0 > 4$  (pri  $F_0 > 0,2$ ), ležita pola desno od imaginarne osi, Nyquistova krivulja pa obkroži točko  $-1$  (slika 11.18, desno)  $\triangle$

**Če na poti  $\alpha$  leži katera od ničel izraza  $1 + W(s)$ , ne moremo uporabiti načela argumenta.** V tem primeru je kršena druga predpostavka. Kljub neveljavnosti načela argumenta, pa lahko podamo eno ugotovitev o Nyquistovi krivulji  $W(s)$ . V ničli  $z$  izraza  $1 + W(s)$  (ko je  $s = z$ ) je odprtizančno ojačenje  $W(s)$  enako  $-1$ . Če pot  $\alpha$  gre



skozi ničlo, se ta z  $W(s)$  preslika v točko  $-1$ . To se zgodi tolikokrat, kot je ničel  $1 + W(s)$  na poti  $\alpha$ . Ker ničle in poli ne morejo ležati na odseku  $\alpha_\infty$ , je število prečkanj točke  $-1$  enako številu ničel  $1 + W(s)$  na imaginarni osi. **Ker pa so ničle  $1 + W(s)$  hkrati tudi poli zaprtozančnega ojačenja  $A'(s)$ , je število prehodov Nyquistove krivulje skozi točko  $-1$  enako številu polov zaprtozančnega ojačenja, ki ležijo na imaginarni osi.** To potrди tudi primer 11.6, saj pri  $F_0 = 0,2$  ležita dva pola na imaginarni osi, Nyquistova krivulja pa dvakrat prečka točko  $-1$  (slika 11.18, na sredini).



Slika 11.19: Pot  $\alpha$ , ki se izogne polom odprtozančnega ojačenja  $W(s)$  na imaginarni osi pri  $\pm j\omega_1$ ,  $\omega_1 = 10^6 \text{s}^{-1}$  (levo). Nyquistov diagram  $W(s)$ , ki dobimo s pomočjo te poti za (11.60) (na sredini) in (11.61) (desno). Točka  $-1$  je označena s kvadratom.

Druga predpostavka je kršena tudi v primeru, če imamo na imaginarni osi pole izraza  $1 + W(s)$ . Ti poli so hkrati tudi poli odprtozančnega ojačenja  $W(s)$ . Ker jih pot  $\alpha$  prečka, postane Nyquistova krivulja nezvezna. Tudi v tem primeru ne moremo uporabiti načela argumenta. Lahko pa ga uporabimo, če se pot  $\alpha$  izogne polom na imaginarni osi. To izvedemo ponavadi tako, da se vsakemu polu izognemo v polkrogu s polmerom  $\rho$ . Polkrog pri izogibanju zavije na desno stran imaginarne osi. Ko polmer polkroga krčimo proti 0, se pripadajoče točke Nyquistove krivulje odmikajo v neskončnost in tam povežejo prekinjeno krivuljo, da postane spet sklenjena. Sedaj lahko spet uporabimo načelo argumenta in z njim Nyquistov kriterij stabilnosti.

**Primer 11.7:** Poglejmo si Nyquistova diagrama za odprtozančni ojačeni, ki ju podajata enačbi (11.60) in (11.61).

V primeru enačbe (11.60) ima  $W(s)$  dva pola pri  $\pm j\omega_1$ , kjer je  $\omega_1 = 10^6 \text{s}^{-1}$ .  $W(s)$ , ki ga podaja (11.61) ima dva dvojna pola pri  $\pm j\omega_1$ . Če pot  $\alpha$  gre skozi ta pola, dobimo Nyquistovo krivuljo, ki je nezvezna (slika 11.15, na sredini in desno). Poloma se zato izognemo z dvema polkrogoma, katerih polmer  $\rho$  skrčimo proti 0 (slika 11.19, levo).

Iz obeh infinitezimalnih polkrogov nastaneta loka v neskončnosti, ki naredita Nyquistovo krivuljo nazaj zvezno. Za odprtozančno ojačenje z enojnima poloma loka obsegata vsak po  $180^\circ$  (slika 11.19, na sredini), za odprtozančno ojačenje z dvojnima poloma pa  $360^\circ$  (slika 11.19, desno). V obeh primerih Nyquistova krivulja  $W(s)$  obkroži točko  $-1$  skupaj  $N - P = 2$  krat, odprtozančno ojačenje  $W(s)$  pa nima polov na desni strani imaginarne osi ( $P = 0$ ). Zaprtozančno ojačenje ima zato  $N = 2 + P = 2$  pola na desni strani imaginarne osi, zaprtozančen sistem pa je nestabilen.  $\triangle$

Če imamo ojačenje  $A(s)$ , pri katerem se nekateri poli  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$  ojačenja  $A(s)$  pokrivajo z ničlami  $(z_1, z_2, \dots, z_k)$  povratne vezave  $F(s)$ , je kršena prva predpostavka. V odprtozančnem ojačenju  $W(s) = A(s)F(s)$  se ti poli krajšajo z ničlami in izpadejo. Slednje je zato enako produktu  $A_x(s)$  in  $F_x(s)$ , ki sta definirana z enač-

bama

$$A(s) = \frac{A_x(s)}{(1 + s/p_1)(1 + s/p_2) \dots (1 + s/p_k)}, \quad (11.71)$$

$$F(s) = F_x(s) \cdot (1 + s/z_1)(1 + s/z_2) \dots (1 + s/z_k). \quad (11.72)$$

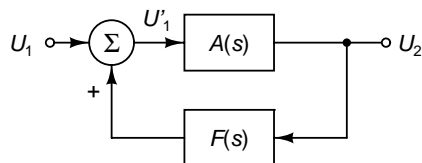
Sedaj niso več vsi poli ojačenja  $A(s)$  tudi poli izraza  $W(s)$ , oziroma izraza  $1 + W(s)$ . Zaprtzoančno ojačenje lahko v tem primeru zapišemo kot

$$A'(s) = \frac{1}{(1 + s/p_1)(1 + s/p_2) \dots (1 + s/p_k)} \cdot \frac{A_x(s)}{1 + A_x(s)F_x(s)}. \quad (11.73)$$

Ker je Nyquistov diagram  $W(s)$  enak Nyquistovemu diagramu  $A_x(s)F_x(s)$ , nam ta govori zgolj o stabilnosti sistema, katerega zaprtzoančno ojačenje podaja

$$A'_x(s) = \frac{A_x(s)}{1 + A_x(s)F_x(s)} \neq A'(s). \quad (11.74)$$

Informacija, ki jo iz Nyquistovega diagrama dobimo o stabilnosti  $A'(s)$ , zato ni popolna, saj ne upošteva polov  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . V diagramu lege korenov  $A'(s)$  se poli  $p_1, p_2, \dots, p_k$  ne premikajo, če parameter, ki se spreminja v diagramu, ne vpliva na lego polov  $p_1, p_2, \dots, p_k$  ojačenja  $A(s)$  in ničel  $z_1, z_2, \dots, z_k$  povratne vezave  $F(s)$ .



Slika 11.20: Zaprtzoančen sistem, kjer signal povratne vezave prištevamo k vhodnemu signalu.

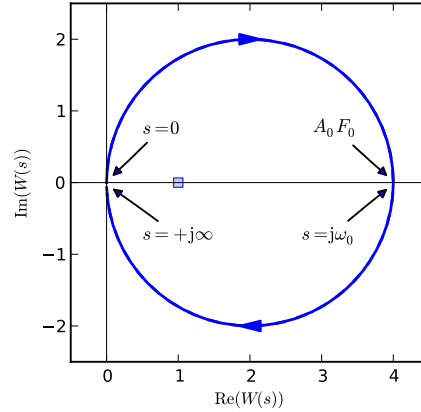
Če signal povratne vezave prištevamo k vhodnemu signalu (slika 11.20) se Nyquistov kriterij stabilnosti nekoliko spremeni. Zaprtzoančno ojačenje podaja enačba (11.6), ki jo bomo na tem mestu ponovili.

$$A'(s) = \frac{A(s)}{1 - A(s)F(s)} = \frac{A(s)}{1 - W(s)}. \quad (11.75)$$

O stabilnosti sistema odloča število obkroženj koordinatnega izhodišča v smeri urinega kazalca, ki jih naredi Nyquistova krivulja  $1 - W(s)$ . Krivuljo za  $W(s)$  dobimo tako, da krivuljo  $1 - W(s)$  premaknemo v levo za 1, kar nam da krivuljo  $-W(s)$ , koordinatno izhodišče pa se preslika v točko  $-1$ . Nato točke dobljene krivulje pomnožimo z  $-1$ , kar ustreza zrcaljenju čez koordinatno izhodišče. Pri tem se točka  $-1$  preslika v točko 1. Zrcaljenje čez točko ne spremeni smeri obhoda po krivulji (če je bila ta pred zrcaljenjem v smeri urinega kazalca, je tudi po zrcaljenju enaka). **Nyquistov kriterij stabilnosti za primer, ko signal povratne vezave prištevamo k vhodnemu signalu, se torej glasi: če Nyquistova krivulja odprtzoančnega ojačenja  $W(s)$  ne obkroži točke 1 v smeri urinega kazalca, je zaprtzoančen sistem stabilen.** Vse ostalo, kar smo povedali o Nyquistovem kriteriju stabilnosti, še vedno velja v nespremenjeni obliki.

**Primer 11.8:** Imejmo zaprtzoančen sistem s frekvenčno neodvisnim ojačevalnikom ( $A(s) = A_0 > 0$ ), kjer signal povratne vezave prištevamo k vhodnemu signalu (slika 11.20). Prevajalna funkcija povratne vezave je enaka

$$F(s) = \frac{2F_0\delta\omega_0s}{s^2 + 2\delta\omega_0s + \omega_0^2}, \quad (11.76)$$



Slika 11.21: Nyquistova krivulja  $W(s)$  za izraz (11.78) pri  $A_0F_0 = 4$ . Veja, ki pripada poti  $\alpha_-$  se pokriva z vejo, ki pripada poti  $\alpha_+$  (na sliki). Točka 1 je označena s kvadratom.

kjer so  $\omega_0$ ,  $\delta$  in  $F_0$  pozitivne realne konstante. Določimo vrednosti  $A_0$ , za katere je zaprtizančen sistem stabilen.

Če namesto  $s$  vstavimo  $j\omega$ , dobimo prevajalno funkcijo, ki smo jo obravnavali v primeru 9.9, ko smo risali Bodejev diagram za nihajni krog. Potek  $|F(j\omega)|$  ima ekstrem (resonanco) pri  $\omega = \omega_0$ , kjer je  $F(s) = F_0$ .  $F(s)$  ima dva konjugirano kompleksna pola

$$p_{1,2} = -\omega_0 \left( \delta \pm j\sqrt{1 - \delta^2} \right). \quad (11.77)$$

Zaradi  $A_0F_0 > 0$  in prištevanja signala povratne vezave k vhodnemu signalu je povratna vezava pozitivna, ko se nahajamo v resonanci  $F(j\omega)$ . Odprtizančno ojačenje ima enako obliko kot  $F(s)$ .

$$W(s) = A(s)F(s) = \frac{2A_0F_0\delta\omega_0s}{s^2 + 2\delta\omega_0s + \omega_0^2}. \quad (11.78)$$

Ker ima  $W(s)$  več polov kot ničel, zadošča, da narišemo del Nyquistove krivulje, ki ustreza poti  $\alpha_+$ , preostanek pa dobimo z zrcaljenjem preko realne osi. Če v  $W(s)$  vstavimo  $s = j\omega$ , dobimo

$$W(j\omega) = \frac{2A_0F_0\delta\omega_0j\omega}{-\omega^2 + 2\delta\omega_0j\omega + \omega_0^2} = A_0F_0 \left( \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{-\omega^2 + 2\delta\omega_0j\omega + \omega_0^2} + 1 \right). \quad (11.79)$$

Vpeljemo novo spremenljivko  $x = 2\delta\omega_0\omega/(\omega^2 - \omega_0^2)$ .

$$W(j\omega) = A_0F_0 \left( \frac{1}{-1 + jx} + 1 \right) = A_0F_0 \left( 1 - \frac{1 + jx}{x^2 + 1} \right). \quad (11.80)$$

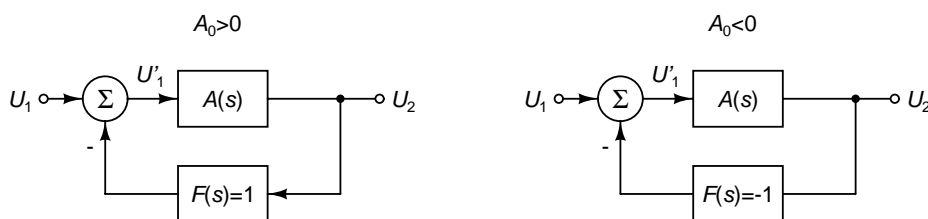
Ko  $\omega$  preleti vrednosti od 0 do  $\infty$ ,  $x$  popiše celotno realno os (najprej od 0 do  $\infty$  in nato še od  $-\infty$  do 0). Vpeljimo  $x = \tan \varphi$ , pri čemer  $\varphi$  preleti vrednosti od 0 do  $\pi$ .

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= A_0F_0 \left( 1 - \frac{1 + j \tan \varphi}{\tan^2 \varphi + 1} \right) = A_0F_0 (1 - (\cos^2 \varphi + j \sin \varphi \cos \varphi)) \\ &= \frac{A_0F_0}{2} (1 - (2 \cos^2 \varphi - 1) - j2 \sin \varphi \cos \varphi) \\ &= \frac{A_0F_0}{2} - \frac{A_0F_0}{2} (\cos(2\varphi) + j \sin(2\varphi)). \end{aligned} \quad (11.81)$$

Ko gre  $\varphi$  od 0 do  $\pi$ , preleti  $2\varphi$  vrednosti od 0 do  $2\pi$ , izraz (11.81) pa opiše krog s središčem v točki  $A_0F_0/2$  in polmerom  $A_0F_0/2$ . Veja Nyquistove krivulje, ki ustreza poti  $\alpha_+$ , se prične v koordinatnem izhodišču ( $\varphi = 0$ ), gre do skrajne točke  $A_0F_0$  pri  $\varphi = \pi/2$  in se vrne v koordinatno izhodišče pri  $\varphi = \pi$ . Ker je krog simetričen glede na realno os, se pokrije z vejo Nyquistove krivulje, ki pripada poti  $\alpha_-$  (slika 11.21). Vidimo, da je za  $A_0F_0 < 1$  zaprtizančen sistem stabilen, saj tedaj krivulja ne obkroži točke 1 v smeri urinega kazalca. Če jo obkroži, jo obkroži dvakrat, saj je veja krivulje, ki ustreza poti  $\alpha_-$ , skrita pod vejo, ki ustreza poti  $\alpha_+$ . Ker sta pola  $W(s)$  zaradi  $\delta > 0$  na levi strani imaginarne osi, je  $P = 0$ , zaprtizančno ojačenje pa ima  $N = 2 + P = 2$  pola na desni strani imaginarne osi.  $\triangle$

### 11.3.3 Amplitudni in fazni razložek

Predpostavimo, da signal povratne vezave odštevamo od vhodnega signala (slika 11.1, levo). V zaprtizančnih sistemih s frekvenčno neodvisno povratno vezavo ( $F(s) = F_0$ ) slednjo pogosto načrtujemo tako, da ne ojačuje signala ( $|F_0| \leq 1$ ). Tako povratno vezavo lahko izvedemo z upori. Odprtizančno ojačenje  $W(s) = A(s)F_0$  ima tedaj do multiplikativne konstante  $F_0$  enako obliko, kot ojačenje ojačevalnika  $A(s)$ . Če narišemo Nyquistov diagram  $W(s)$ , se pri povečevanju  $|F_0|$  krivulja odmika od koordinatnega izhodišča, njena oblika pa ostaja nespremenjena. Tak sistem smo obravnavali v primeru 11.6. Slika 11.18 prikazuje Nyquistov diagram odprtizančnega ojačenja tega sistema za tri različne vrednosti  $F_0$ .



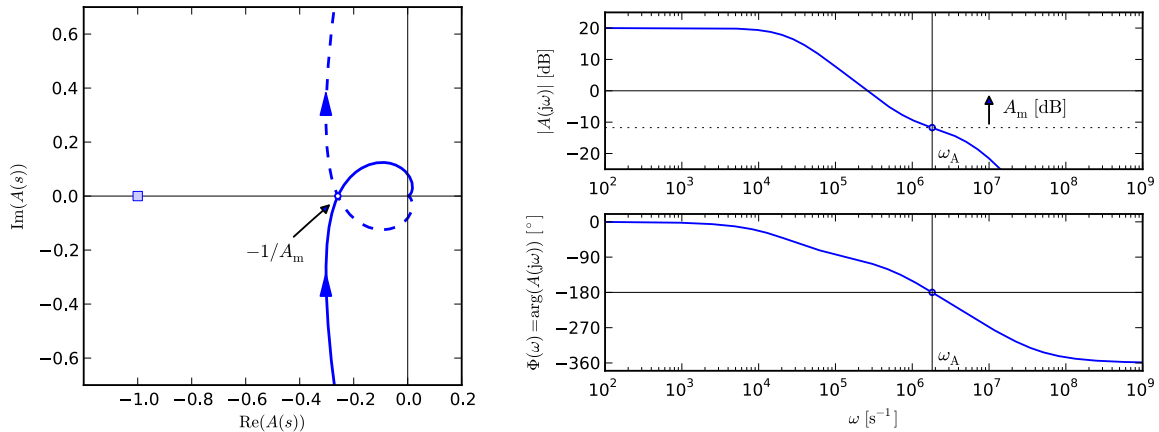
Slika 11.22: Izvedba sledilnika z ojačevalnikom, ki ima v srednjefrekvenčnem območju pozitivno ojačenje (levo) oziroma negativno ojačenje (desno).

Če signal povratne vezave odštevamo od vhodnega signala, postane zaprtizančen sistem nestabilen, ko Nyquistova krivulja  $W(s)$  obkroži točko  $-1$  v smeri urinega kazalca. Če se omejimo na povratne vezave, ki ne ojačujejo signala, imamo največ možnosti, da se to zgodi, ko velja  $|F_0| = 1$ . Tedaj je Nyquistova krivulja najbolj raztegnjena.  $|F_0| = 1$  ustreza povratni vezavi, ki celoten izhodni signal pripelje na vhod ojačevalnika  $A(s)$ . Sistemu z negativno povratno vezavo  $|F_0| = 1$  in ojačenjem  $A(s)$ , za katerega v srednjefrekvenčnem območju velja  $|A(s)| \gg 1$ , pravimo **sledilnik** (slika 11.22). Če je ojačenje  $A(s)$  v srednjefrekvenčnem območju pozitivno, izvedemo sledilnik z  $F_0 = 1$  (slika 11.22, levo). Za negativna ojačenja  $A(s)$  moramo uporabiti  $F_0 = -1$  (slika 11.22, desno).

V nadaljevanju se bomo omejili na primer s pozitivnim  $A(s)$  in  $0 \leq F_0 \leq 1$ . Zaprtizančno ojačenje takega sledilnika je približno enako  $1/F_0 = 1$ . Tedaj je izhodni signal enak vhodnemu signalu ( $U_2 = U_1$ ). Prav sledilnik ima med vsemi sistemi z negativno povratno vezavo, ki ne ojačuje signala, največ možnosti, da postane nestabilen. Ker zanj velja  $W(s) = A(s)F_0 = A(s)$ , se bomo osredotočili na Nyquistovo krivuljo ojačenja  $A(s)$ . Če ta krivulja obkroži točko  $-1$  v smeri urinega kazalca, je sledilnik nestabilen. Merilu, s katerim številsko ovrednotimo stabilnost sledilnika, ki ga izvedemo z ojačevalnikom  $A(s)$ , pravimo **razložek** (ali tudi ponekod **varnost**).

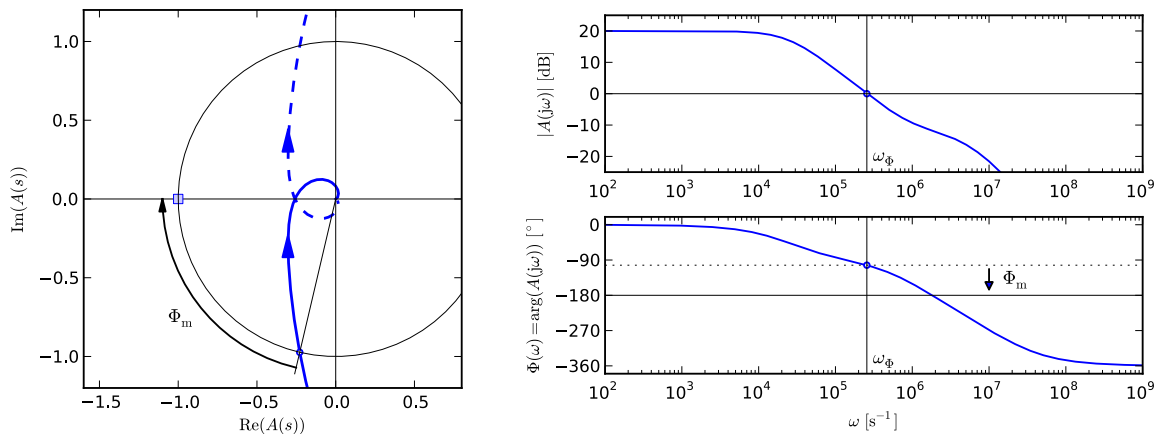
**Amplitudni razložek** je faktor, s katerim moramo pomnožiti ojačenje  $A(s)$ , da bo veja Nyquistovega diagrama, ki ustreza poti  $\alpha_+$ , šla skozi točko  $-1$ . Označevali ga bomo z  $A_m$ . Indeks prihaja od angleške besede „margin“, ki jo prevajamo kot razložek. V angleški literaturi se za amplitudni razložek uporablja pojem „gain margin“. Določanje amplitudnega razložka je prikazano na sliki 11.23. Nyquistova krivulja  $A(s)$  seka realno os v točki  $-1/A_m$  (slika 11.23, levo). Amplitudni razložek lahko izrazimo tudi v decibelih kot

$$A_m[\text{dB}] = 20 \log_{10} |A_m|. \quad (11.82)$$



Slika 11.23: Amplitudni razložek v Nyquistovem (levo) in Bodejevem (desno) diagramu za ojačevalnik z ojačenjem  $A(s)$ . Točka  $-1$  je označena s kvadratom.

Za neposredno določanje amplitudnega razločka je najbolj primeren Bodejev diagram (slika 11.23, desno). Pri tem iščemo frekvenco  $\omega_A$ , kjer postane faza enaka  $-180^\circ$ . Pri tej frekvenci odčitamo ojačenje, ki je enako  $-A_m$  [dB]. Določanje amplitudnega razločka ima smisel le, če argument  $A(j\omega)$  pada z naraščujočo frekvenco  $\omega$  (veja Nyquistove krivulje  $A(s)$ , ki ustreza poti  $\alpha_+$ , poteka v smeri urinega kazalca) in vsaj enkrat doseže  $-180^\circ + k \cdot 360^\circ$  ( $k$  je celo število). Če se to zgodi pri večjih frekvencah, upoštevamo tisto, kjer je  $|A(s)|$  največji. Da postane zaprtizančen sistem nestabilen, moramo ojačenje povratne vezave povečati za najmanj  $A_m$ -krat. Sledilnik je stabilen, če je amplitudni razložek ojačevalnika pozitiven. Tedaj so stabilni tudi zaprtizančni sistemi za  $0 \leq F_0 \leq 1$ .



Slika 11.24: Fazni razložek v Nyquistovem (levo) in Bodejevem (desno) diagramu za ojačevalnik z ojačenjem  $A(s)$ . Točka  $-1$  je označena s kvadratom.

**Fazni razložek** je kot, za katerega moramo v smeri urinega kazalca zavrteti Nyquistov diagram  $A(s)$ , da bo veja, ki ustreza poti  $\alpha_+$  šla skozi točko  $-1$ . Označevali ga bomo s  $\Phi_m$ . V angleški literaturi se za fazni razložek uporablja pojem „phase margin“. Določanje faznega razločka prikazuje slika 11.24. Nyquistova krivulja  $A(s)$  seka krog s polmerom 1 in središčem v koordinatnem izhodišču v točki, ki jo lahko z zasukom okrog koordinatnega izhodišča za kot  $\Phi_m$  v smeri urinega kazalca zavrtimo v točko  $-1$  (slika 11.24, levo).

Fazni razložek lahko določimo tudi iz Bodejevega diagrama (slika 11.24, desno). Pri tem iščemo frekvenco  $\omega_\Phi$ , pri kateri postane ojačenje enako 0 dB. Fazni razložek je enak

$$\Phi_m = \Phi(\omega_\Phi) - (-180^\circ) = \Phi(\omega_\Phi) + 180^\circ. \quad (11.83)$$

Fazni razloček ima smisel samo, če absolutna vrednost ojačenja  $A(j\omega)$  pada in doseže 0dB pri natanko eni frekvenci (veja Nyquistove krivulje  $A(s)$ , ki ustreza poti  $\alpha_+$ , enkrat seka krog s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 1). Sledilnik je stabilen, če je fazni razloček ojačevalnika pozitiven. Tedaj so stabilni tudi zaprtozančni sistemi za  $0 \leq F_0 \leq 1$ .

Amplitudni in fazni razloček lahko določimo tudi za splošen zaprtozančen sistem (slika 11.1, levo). Pri tem gledamo odprtozančno ojačenje  $W(s) = A(s)F(s)$ , vrednosti  $A_m$  in  $\Phi_m$  pa nam številsko ovrednotita stabilnost zaprtozančnega sistema z ojačenjem  $A'(s) = A(s)/(1 + W(s))$ . Ta je stabilen, če je amplitudni ali fazni razloček pozitiven. V praksi je pogosteje uporabljan fazni razloček, ker ga lahko določimo tudi, ko faza ne doseže  $-180^\circ$ .

Če signal povratne vezave prištevamo k vhodnemu signalu (slika 11.1, desno), lahko uporabimo enako definicijo za amplitudni in fazni razloček, le da moramo sedaj gledati Nyquistov diagram  $-A(s)$  oziroma  $-W(s)$ .

**Primer 11.9:** Za ojačevalnik z dvem realnima poloma ( $-\omega_1$  in  $-\omega_2 = -a\omega_1$ ;  $a \geq 1$ ) določimo najmanjši razmik  $a$  med poloma, da bo odziv na enotino stopnico sledilnika, ki ga dobimo, če ojačevalniku dodamo povratno vezavo  $F_0 = 1$ , brez prenihaja. Kolikšen je fazni razloček takega ojačevalnika? Ojačenje ojačevalnika pri nizkih frekvencah naj bo  $A_0 \gg 10$ .

Prevajalna funkcija ojačevalnika je enaka

$$A(s) = \frac{A_0}{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)}. \quad (11.84)$$

Zaradi pozitivnega ojačenja v srednjefrekvenčnem območju signal povratne vezave odštevamo od vhodnega signala, da dobimo negativno povratno vezavo. Odziv na enotino stopnico nima prenihaja, če pola zaprtozančnega ojačenja ležita na realni osi. V primeru 11.3 smo pokazali, da odziv na enotino stopnico zaprtozančnega sistema z dvema poloma nima prenihaja, če velja

$$A_0 F_0 \leq W_{\text{crit}} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{4\omega_1\omega_2} = \frac{(1 - a)^2}{4a}. \quad (11.85)$$

Ker obravnavamo sledilnik, je  $F_0 = 1$ . Ko to upoštevamo v (11.85) in enačbo pomnožimo s  $4a > 0$ , dobimo

$$(1 - a)^2 - 4aA_0 \geq 0, \quad (11.86)$$

$$a^2 - 2a(1 + 2A_0) + 1 \geq 0. \quad (11.87)$$

Sledita rešitvi

$$a \geq 2A_0 + 1 + \sqrt{(2A_0 + 1)^2 - 1}, \quad (11.88)$$

$$a \leq 2A_0 + 1 - \sqrt{(2A_0 + 1)^2 - 1}. \quad (11.89)$$

Desna stran rešitve (11.89) je za vse  $A_0 > 0$  manjša od 1 in s tem nasprotuje predpostavki  $a \geq 1$ . Ostane nam rešitev (11.88), ki jo z upoštevanjem  $A_0 \gg 1$  poenostavimo v

$$a \geq 4A_0. \quad (11.90)$$

Za frekvence  $\omega > \omega_1$  amplitudni del ojačenja  $|A(j\omega)|$  pada s strmino 20dB/dek. Asimptotičen potek doseže 0dB pri frekvenci  $\omega_\Phi = A_0\omega_1$ . Argument ojačenja (faza) pri frekvenci  $\omega_\Phi$  lahko zapišemo kot

$$\Phi(\omega_\Phi) = -\arctan \frac{\omega_\Phi}{\omega_1} - \arctan \frac{\omega_\Phi}{\omega_2} = -\arctan A_0 - \arctan \frac{A_0}{a} \quad (11.91)$$

Zaradi  $A_0 \gg 10$  je prvi člen praktično enak  $-\pi/2$ .

$$\Phi(\omega_\Phi) \approx -\pi/2 - \arctan \frac{A_0}{a}. \quad (11.92)$$

Fazni razloček znaša

$$\Phi_m = \pi + \Phi(\omega_\Phi) = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{A_0}{a} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{A_0}{a}, \quad (11.93)$$

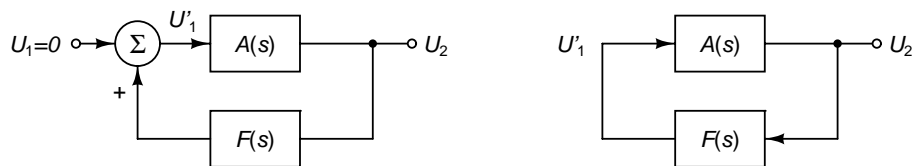
kar znaša v stopinjah

$$\Phi_m = 90^\circ - \frac{180^\circ}{\pi} \arctan \frac{A_0}{a}. \quad (11.94)$$

Pri  $a = 4A_0$  je fazni razloček enak  $76^\circ$ , ko večamo  $a$ , pa se bliža  $90^\circ$ . Zahteva po odzivu brez prenihaja je torej enakovredna zahtevi po vsaj  $76^\circ$  faznega razločka. Rezultat je uporaben tudi za ojačevalnike z večimi poli, če dodatni poli ležijo pri frekvencah, ki so mnogo večje od  $\omega_2$ . V tem primeru jih lahko pri določanju faznega razločka zanemarimo in pridemo do enakega rezultata, kot smo ga dobili za ojačevalnik z dvema poloma.  $\triangle$

## 11.4 Sinusni oscilatorji

Pogosto si želimo zaprtzančen sistem, ki se tudi ob odsotnosti vzbujanja na vходу ( $u_1(t) = 0$ ) odziva s sinusnim nihanjem na izhodu ( $u_2(t) = U_0 \sin(\omega t)$ ). Tak sistem imenujemo **sinusni oscilator**. Njegov odziv ni posledica vzbujanja, temveč nastane kot prehodni pojav. Ker oscilator ni stabilno vezje, prehodni pojav ne more izzveneti.



Slika 11.25: Sinusni oscilator izveden kot sistem s povratno vezavo v katerem signal povratne vezave prištejemo k vhodnemu signalu (levo). Zaradi odsotnosti vhodnega signala lahko sistem poenostavimo (desno).

Sinusne oscilatorje ponavadi obravnavamo kot zaprtzančne sisteme v katerih signal povratne vezave prištejemo k vhodnemu signalu (slika 11.25, levo). Ker oscilatorji nimajo vhodnega signala, lahko sistem še poenostavimo (slika 11.25, desno).

### 11.4.1 Barkhausenov pogoj za stabilno nihanje

V sinusnem oscilatorju se amplituda nihanja prehodnega pojava s časom ne sme niti večati niti manjšati. Zaprtzančno ojačenje mora torej imeti vsaj en par konjugirano kompleksnih polov na imaginarni osi oblike  $\pm j\omega_p$ , ki povzročita prehodni pojav oblike  $u_2(t) = U_0 \sin(\omega t)$ . Poli zaprtzančnega ojačenja so rešitve enačbe

$$1 - W(s) = 0, \quad (11.95)$$

ki jo dobimo, če imenovalc izraza (11.4) izenačimo z 0. Za pole oblike  $s = j\omega$  mora veljati

$$1 - W(j\omega) = 0, \quad (11.96)$$

oziroma

$$A(j\omega)F(j\omega) = 1. \quad (11.97)$$

Enačbo (11.97) imenujemo **Barkhausenov pogoj za stabilno nihanje**[25]. Rešitev enačbe ( $\omega$ ) je krožna frekvenca stabilnega nihanja. Pri tem s pojmom stabilno nihanje označujemo nihanje s sinusnim časovnim potekom in konstantno amplitudo. Pogoj zahteva, da ima sistem pri frekvenci nihanja pozitivno povratno vezavo z ojačenjem odprte zanke, ki znaša 1. Pogoj lahko razbijemo na dve enačbi, ki predstavljata njegov realni in imaginarni del.

$$\Re(A(j\omega)F(j\omega)) = 1, \quad (11.98)$$

$$\Im(A(j\omega)F(j\omega)) = 0. \quad (11.99)$$

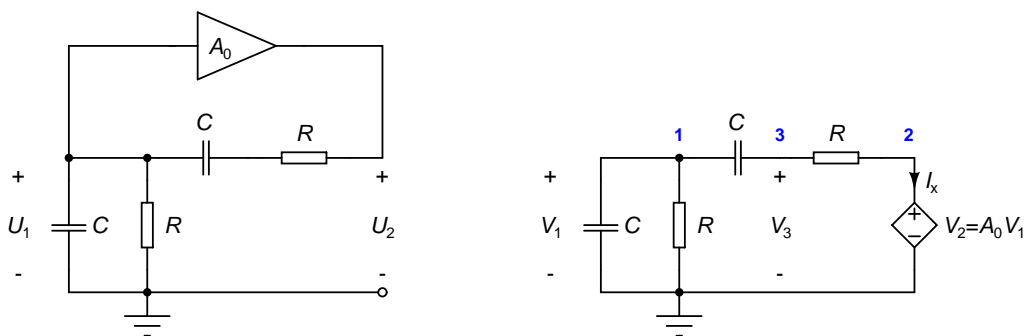
Ker je  $\omega$  le eno realno število, imamo pa dve enačbi ((11.98) in (11.99)), dobimo iz pogoja še en podatek. Ta pove, kakšno mora biti ojačenje ojačevalnika in povratne vezave pri frekvenci nihanja, da bo nihanje stabilno. Enačbo (11.97) lahko zapišemo tudi v polarni obliki in dobimo dve realni enačbi, eno za absolutno vrednost in drugo za argument odprtozanknega ojačenja.

$$|A(j\omega)F(j\omega)| = 1, \quad (11.100)$$

$$\arg(A(j\omega)) + \arg(F(j\omega)) = 2k\pi. \quad (11.101)$$

Pri tem je  $k$  celo število. Enačba (11.100) zahteva, da mora biti absolutna vrednost odprtozanknega ojačenja enaka 1 oziroma 0dB. Iz enačbe (11.101) sledi, da mora biti argument odprtozanknega ojačenja enak celemu večkratniku  $2\pi$ .

Barkhausenov pogoj nam ne pove ničesar o tem, kako pridemo od mirujočega vezja (izklopljeno napajanje) do sinusnega nihanja s konstantno amplitudo. Prav tako ne izvemo nič o amplitudi nihanja. Odgovore dobimo šele, ko analiziramo vezje upoštevajoč vse njegove nelinearnosti, kar pa leži izven dometa linearne elektronike. Kljub temu lahko s pridobljenim znanjem in nekaj poenostavitvami za določena vezja na omenjeni vprašanji vsaj delno odgovorimo (glej poglavje 11.4.2).



Slika 11.26: Wienov oscilator z napetostnim ojačevalnikom (levo) in model vezja, ki ga dobimo, ko ojačevalnik nadomestimo z napetostno krmiljenim napetostnim virom (desno).

**Primer 11.10:** Za **Wienov oscilator** (slika 11.26, levo) določimo frekvenco stabilnega nihanja in napetostno ojačenje  $A_0$ , ki je za to potrebno. Ojačevalnik ima neskončno vhodno upornost.

Prevajalna funkcija ojačevalnika je neodvisna od frekvence in enaka  $A(s) = A_0$ . Ojačevalnik vezju vsili pogoj  $U_2 = A_0 U_1$ . Prevajalna funkcija povratne vezave  $F(s)$  se zaradi neskončne vhodne upornosti ojačevalnika ne



spremeni, če slednjega odstranimo. Ko to naredimo, velja  $F(s) = U_1/U_2$ . Razmerje določa delilnik napetosti, ki ga tvorijo upori in kondenzatorji. Velja

$$F(s) = \frac{\frac{R(sC)^{-1}}{R+(sC)^{-1}}}{R + (sC)^{-1} + \frac{R(sC)^{-1}}{R+(sC)^{-1}}} = \frac{R(sC)^{-1}}{(R + (sC)^{-1})^2 + R(sC)^{-1}} = \frac{sRC}{(sRC + 1)^2 + (sRC)}. \quad (11.102)$$

Odpertožančno ojačenje  $W(j\omega)$  je enako zmnožku  $A(s)$  in  $F(s)$ . Ko namesto kompleksne frekvence  $s$  vstavimo  $j\omega$  in  $W(j\omega)$  izenačimo z 1, dobimo Barkhausenov pogoj.

$$\frac{A_0 j\omega RC}{(j\omega RC + 1)^2 + j\omega RC} = 1. \quad (11.103)$$

Z nekaj preurejanja dobimo

$$(j\omega RC + 1)^2 + (1 - A_0)(j\omega RC) = 0, \quad (11.104)$$

Realni del enačbe se glasi

$$-(\omega RC)^2 + 1 = 0. \quad (11.105)$$

Odtod sledi frekvenca stabilnega nihanja  $f = \omega/(2\pi)$ .

$$f = \frac{1}{2\pi RC}. \quad (11.106)$$

Imaginarni del enačbe (11.104) je

$$2\omega RC + (1 - A_0)\omega RC = 0. \quad (11.107)$$

Sledi ojačenje  $A_0$ , ki je potrebno za stabilno nihanje.

$$A_0 = 3. \quad (11.108)$$

△

Izbrati sklenjeno zanko in razdeliti oscilator na  $A(s)$  in  $F(s)$  pa ni zmeraj enostavna naloga. **Poglejmo si pot od enačb vezja do Barkhausenovega kriterija.** V poglavju 9.4 smo ugotovili, da so od nič različni poli prevajalnih funkcij tudi rešitve enačbe

$$\det([M]) = 0, \quad (11.109)$$

kjer je  $\det([M])$  determinanta matrike koeficientov sistema modificiranih vozliščnih enačb, ki opisujejo vezje. Pri tem moramo v enačbe vezja vključiti tudi elemente, ki vezje vzbujajo. Enačbe vezja pišemo v prostoru kompleksne frekvence, kar pomeni, da je determinanta matrike  $[M]$  funkcija kompleksne frekvence  $s$ . Če namesto  $s$  vstavimo  $j\omega$ , kot smo to naredili že z enačbo (11.95), dobimo Barkhausenov pogoj v obliki

$$\det([M])|_{s=j\omega} = 0, \quad (11.110)$$

Vsaka od nič različna rešitev  $\omega$  enačbe (11.110), ki ustreza polu neke prevajalne funkcije vezja, pomeni, da lahko vsaj ena od veličin v vezju niha sinusno s frekvenco  $\omega/(2\pi)$ , ki ustreza temu polu. To nihanje sa lahko vzdržuje tudi ko vezja ne vzbujamo.

**Primer 11.11:** Za Wienov oscilator (slika 11.26, levo) določimo frekvenco stabilnega nihanja in potrebno ojačenje  $A_0$  s pomočjo enačbe (11.110).

Najprej nadomestimo napetostni ojačevalnik ojačevalnik z napetostno krmiljenim napetostnim virom (slika 11.26, desno). Vezje, ki ga dobimo, ima  $n + 1 = 4$  vozlišča, od katerih je eno referenčno. Ker imamo tudi en napetostni vir, bo sistem modificiranih vozliščnih enačb poleg vozliščnih napetosti  $V_1$ ,  $V_2$  in  $V_3$  vseboval kot neznanico tudi tok napetostnega vira  $I_x$ . Za tri vozlišča lahko zapišemo tri enačbe prvega Kirchoffovega zakona

$$(sC + R^{-1})V_1 + sC(V_1 - V_3) = 0, \quad (11.111)$$

$$R^{-1}(V_2 - V_3) + I_x = 0, \quad (11.112)$$

$$sC(V_3 - V_1) + R^{-1}(V_3 - V_2) = 0. \quad (11.113)$$

Enačba napetostnega vira se glasi

$$V_2 - A_0V_1 = 0. \quad (11.114)$$

Ko zapišemo enačbe vezja (11.111)-(11.114) v matrični obliki, dobimo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2sC + R^{-1} & 0 & -sC & 0 \\ 0 & R^{-1} & -R^{-1} & 1 \\ -sC & -R^{-1} & sC + R^{-1} & 0 \\ -A_0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.115)$$

Determinanto matrike  $[M]$  lahko razvijemo po četrtem stolpcu in dobimo

$$\begin{aligned} \det([M]) &= (-1)^{2+4} \det \left( \begin{bmatrix} 2sC + R^{-1} & 0 & -sC \\ -sC & -R^{-1} & sC + R^{-1} \\ -A_0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= (-sC)^2 - (-A_0)(-R^{-1})(-sC) - (2sC + R^{-1})(sC + R^{-1}) \\ &= A_0sCR^{-1} - (sC + R^{-1})^2 - sCR^{-1} \\ &= -R^{-2}((sRC + 1)^2 + (1 - A_0)sRC) \end{aligned} \quad (11.116)$$

Ko vstavimo  $s = j\omega$  v (11.116) in zahtevamo  $\det([M]) = 0$ , dobimo že znano enačbo Barkhausenovega pogoja za Wienov oscilator (11.104) △

**Barkhausenov pogoj se ukvarja zgolj s stabilnim nihanjem. Iz pogoja ne izvemo nič o obnašanju sistema, ko ojačenje odprte zanke ne ustreza vrednosti, ki jo dobimo kot rešitev pogoja. Če želimo izvedeti kaj več, moramo določiti pole in ničle zaprtzančnega sistema.** Do polov vodita dve poti. Prva gre preko prevajalne funkcije zaprtzančnega sistema, v katerem signal povratne vezave prištevamo k vhodnemu signalu (enačba (11.6)).

$$A'(s) = \frac{A(s)}{1 - A(s)F(s)}. \quad (11.117)$$

Enačba polov se glasi

$$1 - A(s)F(s) = 0. \quad (11.118)$$

Drugo pot smo spoznali v poglavju 9.4. Pole dobimo iz enačbe

$$\det([M]) = 0. \quad (11.119)$$

Pri tem ne smemo pozabiti, da je determinanta matrike koeficientov sistema enačb vezja ( $[M]$ ) funkcija kompleksne frekvence. Če kateri od polov leži na desni strani imaginarne osi, je sistem nestabilen, njegov prehodni pojav pa s časom narašča. Če vsi poli ležijo na levi strani imaginarne osi, je sistem stabilen in prehodni pojav zamre po dovolj dolgem času.

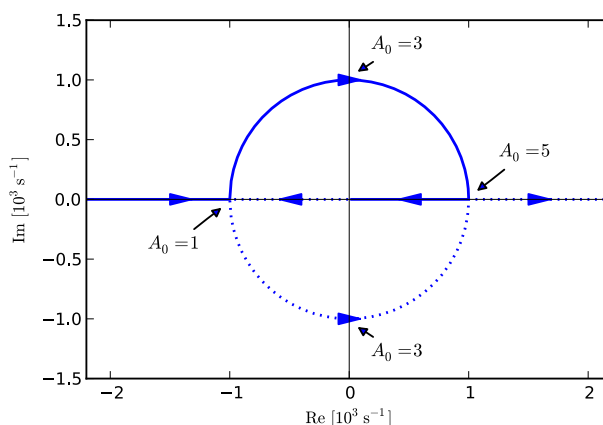
**Primer 11.12:** Določimo lego polov Wienovega oscilatorja (slika 11.26) v odvisnosti od ojačenja ojačevalnika ( $A_0$ ).

Do enačbe polov lahko pridemo po dveh poteh. Eno nakazuje primer 11.10, drugo pa primer 11.11. Obakrat pridemo do enačbe

$$(sRC + 1)^2 + (1 - A_0)sRC = 0 \quad (11.120)$$

Ko jo preuredimo, dobimo

$$s^2 + \frac{3 - A_0}{RC}s + \frac{1}{(RC)^2} = 0. \quad (11.121)$$



Slika 11.27: Diagram lege korenov za Wienov oscilator ( $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $C = 1\mu\text{F}$ ). Puščice nakazujejo premikanje polov, ko se  $A_0$  spreminja od  $-\infty$  do  $+\infty$ .

Enačba ima dve rešitvi, ki ustrezata poloma

$$p_{1,2} = \frac{A_0 - 3}{2RC} \pm j \frac{1}{2RC} \sqrt{4 - (A_0 - 3)^2}. \quad (11.122)$$

Absolutna vrednost obeh polov je enaka

$$|p_{1,2}| = \frac{1}{RC}. \quad (11.123)$$

Ko spreminjamo  $A_0$ , se pola gibljeta po krožnici s polmerom  $1/(RC)$ . Pri  $A_0 = 3$  ležita pola na imaginarni osi. Tedaj je izpolnjen Barkhausenov pogoj in vezje niha s frekvenco  $f = |p_{1,2}|/(2\pi) = 1/(2\pi RC)$ . Za  $A_0 > 3$  se pola pomakneta na desno, za  $A_0 < 3$  pa na levo stran imaginarne osi. Dokler velja  $1 \leq A_0 \leq 5$ , sta pola

konjugirano kompleksna, kot to opisuje enačba (11.121). V območju  $1 < A_0 < 3$  torej dobimo prehodni pojav, ki ima obliko dušenega sinusnega nihanja. Za  $3 < A_0 < 5$  je prehodni pojav eksponentno naraščujoče sinusno nihanje. Za  $A_0 \leq 1$  oziroma  $A_0 \geq 5$  pola postaneta realna.

$$p_{1,2} = \frac{1}{2RC} \left( A_0 - 3 \pm \sqrt{(A_0 - 3)^2 - 4} \right). \quad (11.124)$$

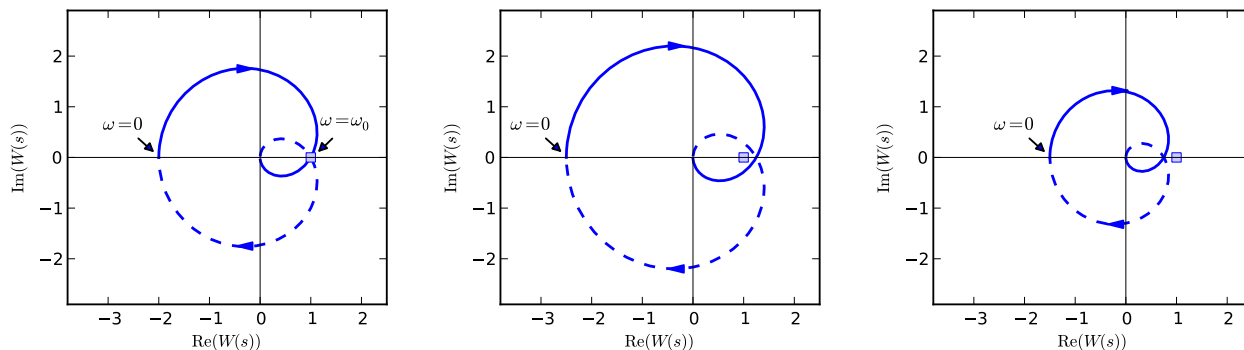
Ker je  $|A_0 - 3|$  večje od  $\sqrt{(A_0 - 3)^2 - 4}$ , ostajata oba pola za vse vrednosti  $A_0 < 1$  na levi strani imaginarne osi, prehodni pojav pa ima obliko eksponentnega upadanja. Podobno lahko sklepamo, da za  $A_0 > 5$  oba pola ležita na desni strani imaginarne osi, prehodni pojav pa ima obliko eksponentnega naraščanja. Iz povedanega lahko narišemo diagram lege korenov, ki ga prikazuje slika 11.27.  $\triangle$

### 11.4.2 Zagon oscilatorja in stabilizacija amplitude nihanja

Ker Barkhausenov pogoj govori zgolj o stabilnem nihanju, nam ostane še, da razjasnimo, kako oscilator prične nihati in kako dosežemo, da niha s predpisano amplitudo. Odgovor na to vprašanje lahko zaslutimo že v primeru 11.12. Ob vklopu napajanja oscilator ne niha. Da prične amplituda nihanja naraščati, moramo pola oscilatorja z imaginarne osi začasno premakniti na njeno desno stran. To ima za posledico nestabilnost, ki ob predpostavki, da sta pola konjugirano kompleksna, povzroči eksponentno naraščujoč prehodni pojav. Ko nihanje doseže željeno amplitudo, pola premaknemo nazaj na imaginarno os in s tem vzpostavimo pogoje za stabilno nihanje. Če zaradi kakega vzroka amplituda nihanja postane prevelika, pola začasno premaknemo na levo stran imaginarne osi in s tem povzročimo eksponentno upadanje amplitude. Ko se ta povrne na željeno vrednost, upadanje prekinemo tako, da pola vrnemo na imaginarno os.

Ponavadi pole premikamo s spreminjanjem ojačenja  $A(s)$ , ki je pri večini oscilatorjev frekvenčno neodvisno ( $A(s) = A_0$ ). Odprtozančno ojačenje takega oscilatorja je enako

$$W(s) = A_0 F(s). \quad (11.125)$$

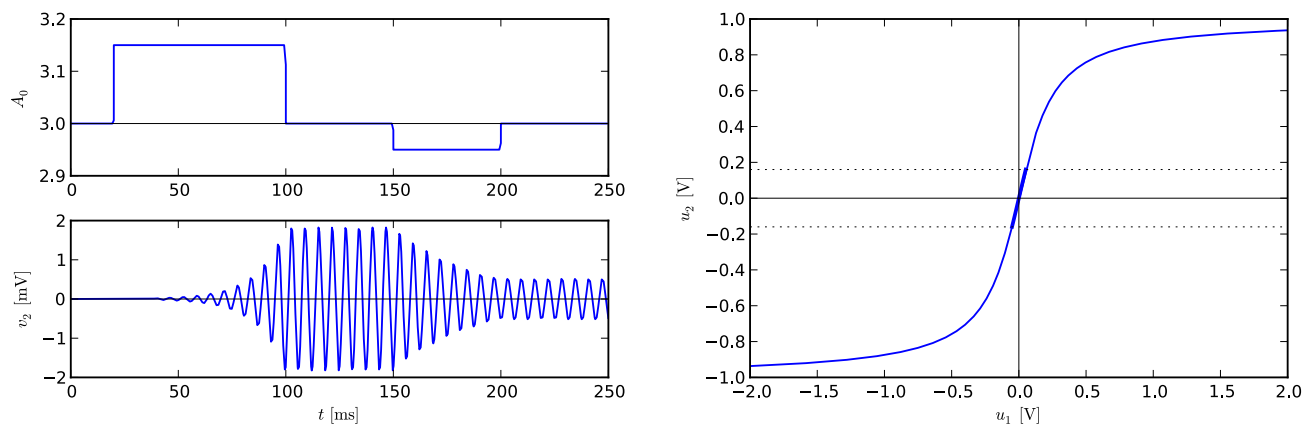


Slika 11.28: Nyquistov diagram odprtozančnega ojačenja  $W(s)$  oscilatorja gre skozi točko 1 (kvadrček na sliki), ko je izpolnjen Barkhausenov pogoj in velja  $A_0 = A_B$  (levo). Če ojačenje  $A(s)$  povečamo za faktor  $\gamma > 1$  na  $\gamma A_0 > A_B$ , se diagram napihne in obkroži točko 1 (na sredini). Če ojačenje zmanjšamo za faktor  $\gamma > 1$ , se diagram skrči in točke 1 ne obkroži (desno).

Če Barkhausenov pogoj za stabilno nihanje zahteva ojačenje  $A_0 = A_B$ , potem Nyquistova krivulja odprtozančnega ojačenja oscilatorja  $W(s)$  gre skozi točko 1 pri krožni frekvenci stabilnega nihanja, ko je  $s = j\omega_0$  (slika 11.28, levo). Če sta pola konjugirano kompleksna, enojna in različna od 0, potem krivulja seka točko 1 vsaj dvakrat. S

povečanjem ojačenja  $A(s)$  za faktor  $\gamma > 1$  se Nyquistov diagram „napihne“, kar v večini oscilatorjev pomeni, da obkroži točko 1 v smeri urinega kazalca (slika 11.28, na sredini). Posledica je nestabilen sistem, katerega prehodni pojav je eksponentno naraščujoče nihanje. Zmanjšanje  $A(s)$  za faktor  $\gamma > 1$  povzroči, da se Nyquistov diagram  $W(s)$  skrči in ne obkroži točke 1 (slika 11.28, desno). Tedaj oscilator postane stabilen, prehodni pojav pa se spremeni v eksponentno upadajoče nihanje. S faktorjem  $\gamma$  ne kaže pretiravati, saj smo že v primeru 11.12 pokazali, da lahko tako preveliko, kot tudi premajhno ojačenje povzroči, da poli sistema padejo na realno os. Tedaj odziv sistema ni več (naraščujoče ali padajoče) sinusno nihanje.

Ob zagonu oscilatorja poskrbimo, da je absolutna vrednost ojačenja  $A(s)$  večja od tiste, ki jo predpisuje Barkhausenov pogoj. Kljub temu pa vsaj v nekaterih simulacijah opazimo, da oscilator ne prične nihati z naraščujočo amplitudo. Vzrok tiči v dejstvu, da je za pričetek nihanja potrebna neka motnja, ki pa ni zmeraj prisotna v idealiziranem okolju simulatorja. V naravi so motnje zmeraj prisotne, bodisi kot elektromagnetno sevanje iz okolice, bodisi kot šum, katerega izvor so praktično vsi realni elementi vezij. V simulatorju lahko motnjo poustvarimo s kratkim pulzom, ki ga z ustreznim tokovnim virom vrinemo v eno od vozlišč oscilatorja.

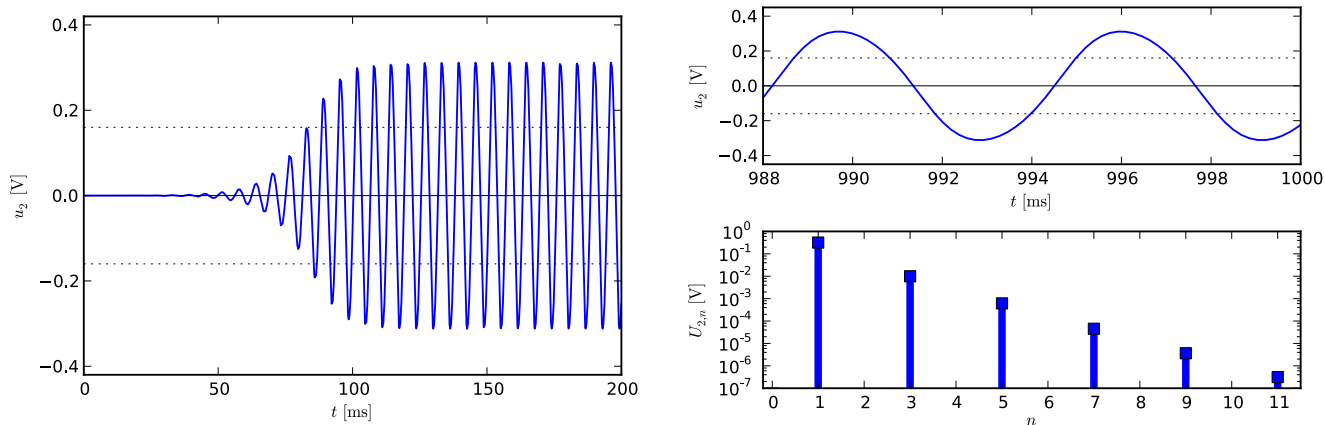


Slika 11.29: Časovni potek ojačenja  $A_0$  (levo zgoraj) in odziv Wienovega oscilatorja (levo spodaj), če uporabimo linearen ojačevalnik s spremenljivim ojačenjem. Karakteristika nelinearnega ojačevalnika (desno). Pikčaste črte omejujejo območje izhodnih napetosti, znotraj katerega je ojačenje večje od 3.

Obnašanje Wienovega oscilatorja ( $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $C = 1\mu\text{F}$ ) pri spreminjanju ojačenja  $A_0$  prikazuje slika 11.29 (levo). Če je ojačenje večje od  $A_B = 3$ , amplituda nihanja narašča, če je manjše od  $A_B$  pa pada. Samo ko je  $A_0 = A_B = 3$ , oscilator niha sinusno s frekvenco  $f = 1/(2\pi RC) = 159,15\text{Hz}$ .

Kadar natančnost frekvence in oblika signala nista najbolj pomembna, oscilatorje načrtujemo tako, da uporabimo nelinearen ojačevalnik, ki ima za majhne amplitude ojačenje večje, kot to zahteva Barkhausenov pogoj. Pri večjih amplitudah se karakteristika ojačevalnika zravnja, ojačenje pa zmanjša pod  $A_B$ . Povedano velja tudi za Wienov oscilator. Če uporabimo ojačevalnik s karakteristiko na sliki 11.29 (desno), ki ima v svojem najbolj strmem delu ojačenje  $A_0 = 3.2 > A_B$ , je eksponentno naraščanje amplitude ob vklopu napajanja zagotovljeno. Izhodni signal ojačevalnika z naraščujočo amplitudo prej ali slej pride iz območja, kjer velja  $A_0 > A_B$  (na sliki je to območje omejeno s pikčastima črtama pri  $-U_{\max} = -0.16\text{V}$  in  $U_{\max} = 0.16\text{V}$ ). Tako pri majhnih vrednostih  $u_2$  signal poteka kot eksponentno naraščujoče sinusno nihanje, pri vrednostih izven območja omejenega s pikčastima črtama pa kot eksponentno upadajoče sinusno nihanje.

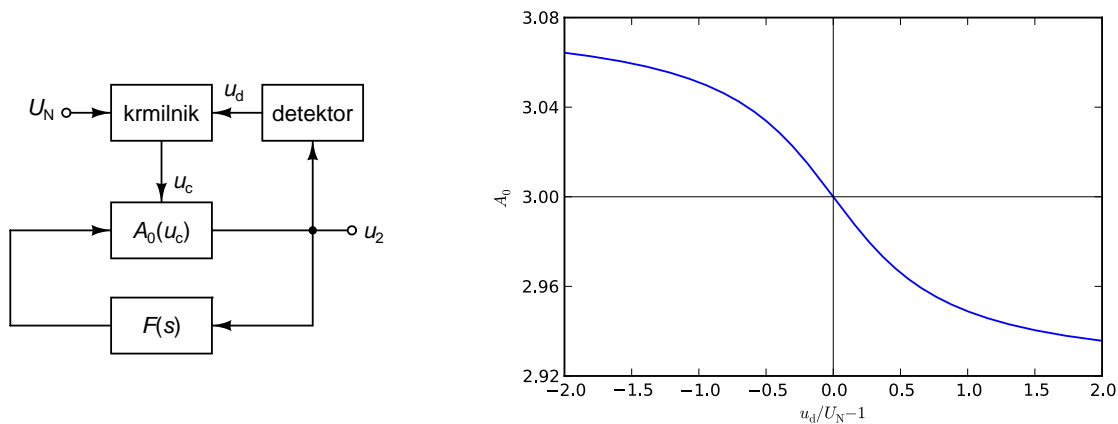
Ko se pri dovolj veliki amplitudi eksponentno naraščanje in upadanje uravnesita, se amplituda izhodnega signala ustali pri vrednosti izven  $\pm U_{\max}$ , kot to prikazuje slika 11.29 (levo). Pikčasti črti na sliki označujeta  $\pm U_{\max}$ . Cena za tako stabilizacijo amplitude je popačen signal, ki ne niha z enako frekvenco, kot smo jo določili iz Barkhausenovega pogoja. Tako naprimer Wienov oscilator s prej opisanim nelinearnim ojačevalnikom niha s frekvenco



Slika 11.30: Odziv Wienovega oscilatorja z nelinearnim ojačevalnikom (levo). Oblika odziva po dolgem času (desno zgoraj) in njegov amplitudni spekter (desno spodaj).

Prikčasti črti označujeta napetost  $\pm U_{\max}$ .

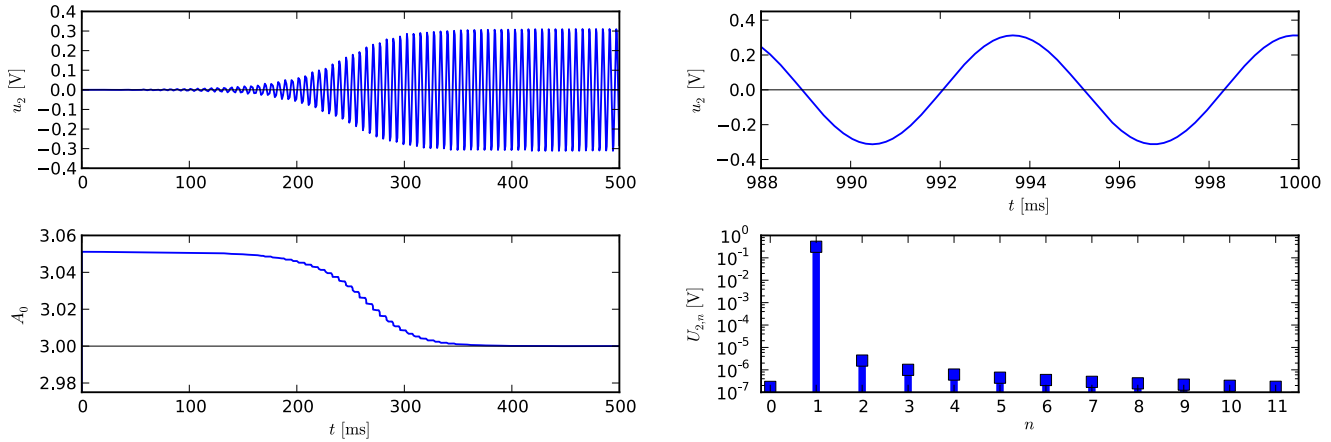
158,79Hz, nihanje pa je popačeno (11.29, desno zgoraj), saj vsebuje precej višjiharmonskih komponent, kar lahko potrdimo s pomočjo amplitudnega spektra signala (11.29, desno spodaj). Čeprav signal na prvi pogled ne izgleda slabo, pa popačenje v opisanem primeru znaša  $\text{THD} = 3,1\%$ . Zaradi lihe karakteristike ojačevalnika ( $u_2(-u_1) = -u_2(u_1)$ ) signal vsebuje le lihe višjiharmonske komponente.



Slika 11.31: Zgradba sistema za samodejno nastavitvev ojačenja (levo) in primer prenosne funkcije krmilnika za Wienov oscilator (desno).

Mnogo boljše rezultate dosežemo s pomočjo **samodejne nastavitve ojačenja** (ang. **Automatic Gain Control, AGC**). Zasnova vezja je prikazana na sliki 11.31. S pomočjo detektorja iz izhodnega signala določimo njegovo amplitudo  $u_d$ . Krmilnik primerja amplitudo z želeno vrednostjo  $U_N$  in na osnovi dobljene razlike uravnava ojačenje ojačevalnika. Kot detektor lahko uporabimo vsako vezje, katerega izhod je sorazmeren z amplitudo vhodnega sinusnega signala.

Tudi Wienov oscilator lahko opremimo s samodejno nastavitvijo ojačenja. Če uporabimo krmilnik, katerega prenosna funkcija je na sliki 11.31 (desno), dobimo odziv na sliki 11.32 (levo zgoraj). Ojačenje se po dovolj dolgem času ustali pri vrednosti 3 (slika 11.32, levo spodaj). Po dovolj dolgem času, ko se sistem ustali, dobimo izhoden sinusen signal (slika 11.32, desno zgoraj). O kakovosti signala govori njegov spekter (slika 11.32, desno spodaj), ki vsebuje bistveno manj višjiharmonskih komponent. Temu primerno je tudi popačenje signala (THD), ki znaša



Slika 11.32: Odziv Wienovega oscilatorja s samodejno nastavitvijo ojačenja (levo zgoraj) in potek ojačenja (levo spodaj). Ko vezje doseže ustaljeno stanje, je odziv zelo podoben idealnemu sinusnemu signalu (desno zgoraj), njegov amplitudni spekter pa praktično brez višjiharmonskih komponent (desno spodaj).

0,001%. Tudi frekvenca nihanja se dobro ujema z izračunano, saj znaša 159,15Hz.

Samodejno nastavitvev ojačenja v Wienovem oscilatorju lahko na zelo enostaven način izvedemo s pomočjo žarnice. Za izvedbo ojačenja  $A_0$  uporabimo neinvertirajoč ojačevalnik na osnovi operacijskega ojačevalnika (primer 11.2). Pri tem upor  $R_1$  nadomestimo z žarnico (slika 11.33, levo). Žarnica je ob zagonu oscilatorja hladna in ima nizko upornost, ki je precej manjša od  $R_2/2$ . Ojačenje ojačevalnika (enačba (11.28)) je tedaj enako

$$A_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1} > 3 \quad (11.126)$$

in amplituda nihanja prične naraščati. Temperatura žarnice je sorazmerna z efektivno vrednostjo toka in s tem tudi efektivno vrednostjo izhodne napetosti oscilatorja. Upornost žarnice raste s temperaturo. Pri ravno pravi amplitudi izhodnega signala ( $U_{20}$ ) ima žarnica upornost  $R_1 = R_2/2$ . Za večje amplitude je upornost žarnice večja od  $R_2/2$ , ojačenje  $A_0$  pa manjše od 3, kar povzroči upadanje amplitude izhodnega signala. Izhodni signal se zato ustali pri amplitudi  $U_{20}$ , saj je tedaj ojačenje ojačevalnika enako 3.

Sodobnejšo izvedbo vezja dobimo, če žarnico nadomestimo z JFET tranzistorjem (slika 11.33, desno). Pri tem moramo poskrbeti, da je napetost  $u_{DS}$  tranzistorja majhna. Tedaj tranzistor deluje v linearnem področju, tok  $i_D$  pa podaja enačba (4.82) pri  $u_{DS} < u_{GS} - U_P$  in  $u_{GS} > U_P$ .

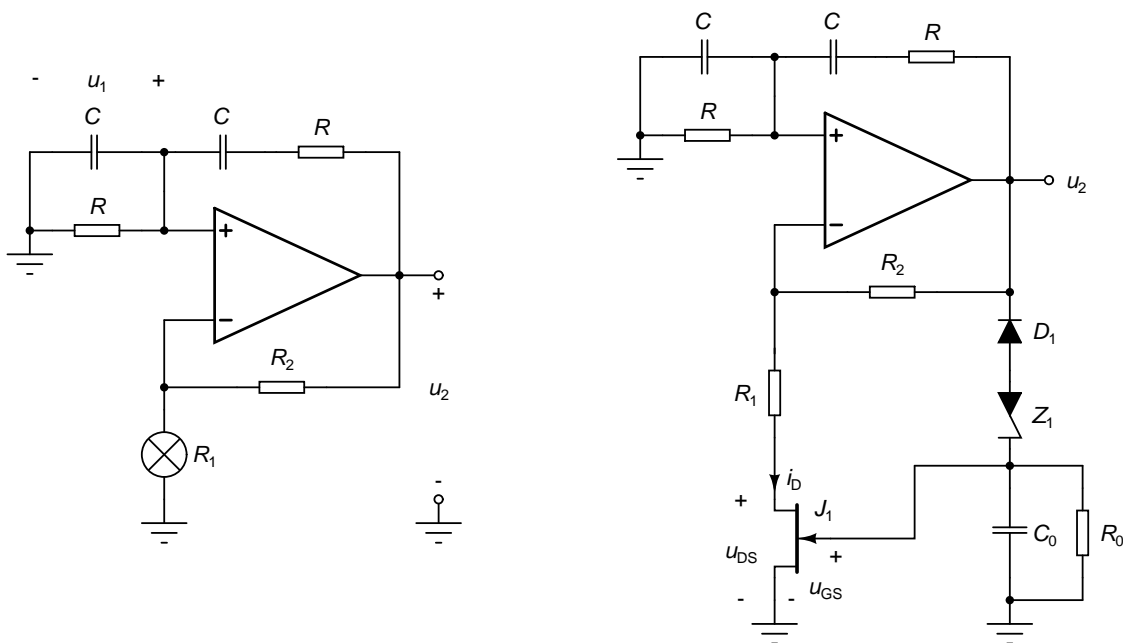
$$i_D = \frac{I_{DSS}}{U_P^2} (2(u_{GS} - U_P) - u_{DS}) u_{DS} (1 + \lambda u_{DS}). \quad (11.127)$$

Če zanemarimo  $\lambda$ , je diferencialna prevodnost kanala med ponorom in izvorom enaka

$$g_{22} = \frac{di_D}{du_{DS}} = \frac{I_{DSS}}{U_P^2} \cdot 2(u_{GS} - U_P - u_{DS}). \quad (11.128)$$

Za vrednosti  $u_{DS} \ll u_{GS} - U_P$  je upornost, ki ustreza prevodnosti  $g_{22}$ , neodvisna od  $u_{DS}$ .

$$R_{DS} = g_{22}^{-1} \approx \frac{U_P^2}{2I_{DSS}(u_{GS} - U_P)}. \quad (11.129)$$



Slika 11.33: Izvedba samodejne nastavitve ojačenja v Wienovem oscilatorju s pomočjo žarnice (levo) in JFET tranzistorja (desno).

Ker za tranzistor s kanalom tipa n velja  $U_P < 0$ , z večanjem negativne napetosti  $u_{GS}$  manjšamo imenovalce izraza (11.129) in s tem večamo  $R_{DS}$ . Ob vklopu napajanja je  $C_0$  prazen,  $u_{GS} = 0$ , upornost  $R_{DS}$  pa je majhna in zanemarljiva v primerjavi z  $R_1$ . Z ustrežno izbiro  $R_1$  in  $R_2$  je tedaj ojačenje  $A_0 = 1 + R_2/R_1$  rahlo večje od  $A_B$  in amplituda nihanja ( $U_2$ ) prične naraščati. Ko ta dovolj naraste, prične dioda  $D_1$  in Zenerjeva dioda  $ZD_1$  prepuščati negativne polperiode signala s katerimi se  $C_0$  nabije na napetost  $-(U_2 - U_K - U_Z)$ . Ker je napetost na  $C_0$  enaka napetosti  $u_{GS}$ , začne upornost  $R_{DS}$  naraščati. Ko naraste dovolj, da velja

$$1 + \frac{R_2}{R_1 + R_{DS}} = A_B, \quad (11.130)$$

se naraščanje amplitude ustavi, na izhodu oscilatorja pa dobimo sinusno nihanje. Amplitudo nihanja  $U_{20}$  dobimo, če iz (11.130) izrazimo  $R_{DS}$  in ga izenačimo z izrazom (11.129), v katerega vstavimo  $u_{GS} = -(U_{20} - U_K - U_Z)$ .

$$\frac{U_P^2}{2I_{DSS}(-(U_{20} - U_K - U_Z) - U_P)} = \frac{R_2}{(A_B - 1)} - R_1 \quad (11.131)$$

Sledi

$$U_{20} = U_K + U_Z - U_P - \frac{U_P^2(A_B - 1)}{2I_{DSS}(R_2 - (A_B - 1)R_1)}. \quad (11.132)$$

Dovolj majhno vrednost  $U_{DS}$  zagotovimo z  $R_1 \gg R_{DS}$  oziroma, če je  $R_1$  le malo manjši od  $R_2/(A_B - 1)$ . Upor  $R_0$  izprazni kondenzator  $C_0$ , če amplituda nihanja zaradi kakršnegakoli razloga upade pod  $U_{20}$ . Tako so spet vzpostavljene razmere za naraščanje amplitude nihanja. Od časovne konstante  $R_0C_0$  je odvisna valovitost napetosti  $u_{GS}$ . Ponavadi jo izberemo tako, da je vsaj 10-krat večja od periode nihanja.

**Primer 11.13:** Recimo, da so elementi vezja na sliki 11.33 (desno)  $R_1 = 48\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 100\text{k}\Omega$ ,  $C_0 = 1\mu\text{F}$ ,  $R_0 = 1\text{M}\Omega$ ,  $R = 1\text{k}\Omega$  in  $C = 1\mu\text{F}$ . Za JFET tranzistor naj velja  $U_P = -5\text{V}$  in  $I_{DSS} = 2.5\text{mA}$ . Zenerjevo diodo



izpustimo in jo nadomestimo s kratkim stikom ( $U_Z = 0$ ). Določimo amplitudo, pri kateri se ustali oscilator in začetno vrednost upornosti  $R_{DS}$ . Kolikšno je tedaj ojačenje ojačevalnika?

Opravka imamo z Wienovim oscilatorjem, kar pomeni, da velja  $A_B = 3$ . Če podatke vstavimo v (11.132), dobimo, da oscilator v ustaljenem stanju niha z amplitudo  $U_{20} = 4,45\text{V}$ .

Upornost kanala tranzistorja ob zagonu oscilatorja ( $R_{DS0}$ ) sledi iz (11.129) pri  $u_{GS} = 0$ . Velja

$$R_{DS0} \approx -\frac{U_P}{2I_{DSS}} = 500\Omega. \quad (11.133)$$

Ojačenje ojačevalnika tedaj znaša

$$1 + \frac{R_2}{R_1 + R_{DS0}} = 3,062. \quad (11.134)$$

△

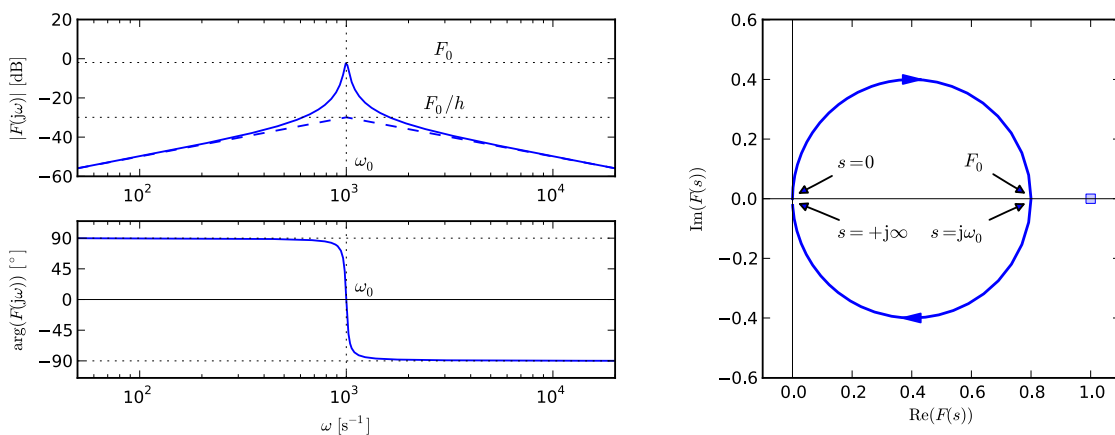
### 11.4.3 Oscilatorji z resonančnim vezjem

Oscilatorjem te družine je skupna prevajalna funkcija povratne vezave, ki ima v amplitudnem delu Bodejevega diagrama ekstrem. Najbolj preprosta prevajalna funkcija te vrste se glasi

$$F(s) = \frac{2F_0\delta\omega_0 s}{s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad (11.135)$$

kjer je  $\omega_0$  resonančna frekvenca,  $F_0 > 0$  in  $\delta > 0$ . Prevajalna funkcija ima dva konjugirano kompleksna pola oblike

$$p_{1,2} = -\omega_0 \left( \delta \pm j\sqrt{1 - \delta^2} \right). \quad (11.136)$$



Slika 11.34: Bodejev diagram (levo) in Nyquistov diagram (desno) resonance s parametri  $F_0 = 0,8$ ,  $\omega_0 = 10^3\text{s}^{-1}$  in  $\delta = 0,02$ . Asimptotičen potek je narisano s črtkano črto.

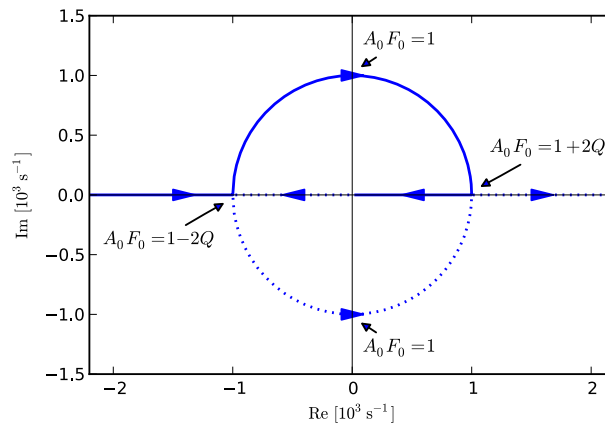
Če namesto  $s$  vstavimo  $j\omega$  in narišemo Bodejev diagram (slika 11.34, levo), ima ta ekstrem pri  $\omega = \omega_0$  z višino  $F_0$ , kjer je faza enaka  $0^\circ$ . Resonanca se povzpne nad presečišče obeh asimptot za faktor (enačba (9.127))

$$h = \frac{|p_{1,2}|^2}{2|\Re(p_{1,2})\Im(p_{1,2})|} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - (2Q)^{-2}}}. \quad (11.137)$$

kjer je  $Q$  faktor kakovosti resonance (9.149), ki je definiran kot

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta\omega_0} = \frac{1}{2\delta}. \quad (11.138)$$

Za resonance z visoko kakovostjo velja  $h \approx Q$ . Če je  $\delta \geq 1$  oziroma  $Q \leq 1/2$ , nimamo resonance v smislu poglavja 9.5, saj se Bodejev diagram ojačenja ne dvigne nad presečišče obeh asimptot ( $h$  ni definiran). Kljub temu pa  $F(j\omega)$  še vedno izkazuje ekstrem v amplitudnem delu Bodejevega diagrama pri  $\omega = \omega_0$ . Nyquistov diagram  $F(s)$  (slika 11.34, desno) smo že risali v primeru 11.8. Veja krivulje, ki ustreza poti  $\alpha_+$  ima obliko kroga. Je simetrična glede na realno os in se pokriva z vejo, ki ustreza poti  $\alpha_-$ . Točka diagrama  $s = j0$  leži v koordinatnem izhodišču, točka  $s = j\omega_0$  pa pri  $F_0$ . Ker je odprotzančno ojačenje ojačevalnika enako  $W(s) = A_0F(s)$ , lahko iz Nyquistovega diagrama razberemo, da je Barkhausenov pogoj izpolnjen, če velja  $A_0F_0 = 1$ . Tedaj gre skrajna desna točka Nyquistove krivulje skozi 1, kar pomeni, da ima zaprtizančen sistem pole na imaginarni osi. Ker tedaj velja  $s = j\omega_0$ , je krožna frekvenca stabilnega nihanja enaka resonančni frekvenci  $\omega_0$ .



Slika 11.35: Diagram lege korenov za oscilator z resonančnim vezjem, katerega prevajalno funkcijo podaja 11.135 ( $\omega_0 = 10^3 \text{s}^{-1}$ ). Puščice nakazujejo premikanje polov, ko se  $A_0F_0$  spreminja od  $-\infty$  do  $+\infty$ .

Pole zaprtizančnega sistema določa enačba  $A_0F(s) = 1$ . Ko vstavimo (11.135), izraz poenostavimo in upoštevamo  $2\delta = Q^{-1}$  dobimo

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q}(1 - A_0F_0)s + \omega_0^2 = 0. \quad (11.139)$$

Za  $1 - 2Q < A_0F_0 < 1 + 2Q$  sta pola konjugirano kompleksna.

$$p_{1,2} = \omega_0 \left( -\frac{1 - A_0F_0}{2Q} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{1 - A_0F_0}{2Q}\right)^2} \right). \quad (11.140)$$

Ko se spreminja  $A_0F_0$ , se pola premikata po krožnici s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom  $\omega_0$ . Če je  $A_0F_0 \geq 1 + 2Q$  ali  $A_0F_0 \leq 1 - 2Q$ , sta pola realna.

$$p_{1,2} = \omega_0 \left( -\frac{1 - A_0F_0}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - A_0F_0}{2Q}\right)^2 - 1} \right). \quad (11.141)$$

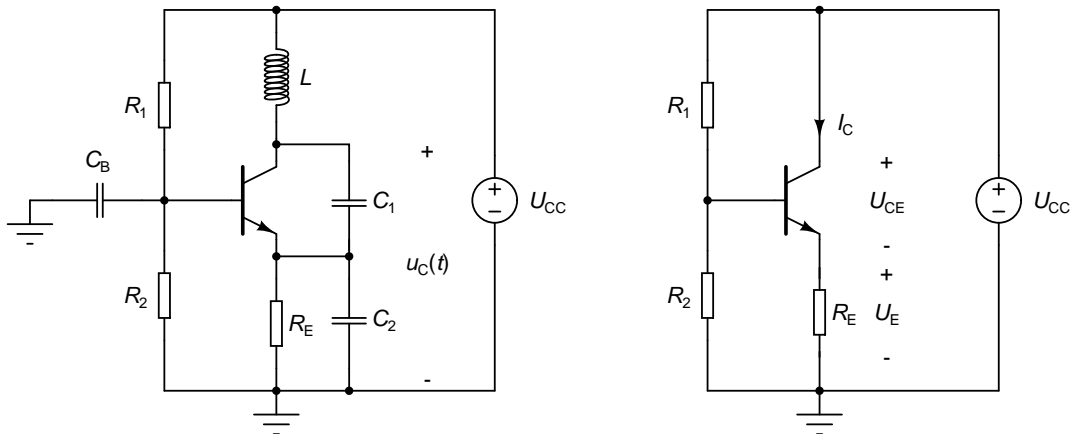
V prvem primeru ležita na desni, v drugem primeru pa na levi strani imaginarne osi. Iz povedanega lahko narišemo diagram lege korenov (slika 11.35), ki je po obliki enak tistemu iz primera 11.12. Iz (11.140) vidimo, da je imaginarni del polov pri vrednostih  $A_0 F_0$ , ki le malo odstopajo od 1, zelo blizu resonančne frekvence  $\omega_0$ . Večja ko je kakovost resonance  $Q$ , večje odstopanje si smemo privoščiti. Ker imaginarni del pola določa frekvenco nihanja prehodnega pojava in s tem tudi oscilatorja, je vpliv sprememb ojačenja  $A_0$  na frekvenco oscilatorja tem manjši, čim večja je kakovost  $Q$  resonance. Slednja ugotovitev je pomembna, če za stabilizacijo amplitude nihanja izkoriščamo nelinearnost ojačevalnika, ki povzroča spreminjanje  $A_0$  v odvisnosti od trenutne vrednosti signala.

**Primer 11.14:** Določimo parametre resonančnega vezja v Wienovem oscilatorju.

Wienov oscilator smo spoznali v primeru 11.10, kjer smo določili prevajalno funkcijo povratne vezave, ki jo na tem mestu zapišimo še enkrat.

$$F(s) = \frac{sRC}{(sRC + 1)^2 + (sRC)} = \frac{(RC)^{-1}s}{s^2 + 3(RC)^{-1}s + (RC)^{-2}}. \quad (11.142)$$

Če jo primerjamo z (11.135), dobimo  $\omega_0 = (RC)^{-1}$ ,  $\delta = 3/2$  in  $F_0 = 1/3$ . Odtod sledi, da je za stabilno nihanje s krožno frekvenco  $\omega_0$  potrebno ojačenje  $A_0 = 1/F_0 = 3$ . Kakovost resonance je majhna ( $Q = 1/(2\delta) = 1/3$ ).  $\Delta$



Slika 11.36: Colpittsov oscilator s tranzistorjem v orientaciji s skupno bazo (levo) in določanje delovne točke oscilatorja (desno).

**Primer 11.15:** Za Colpittsov oscilator na sliki 11.36 (levo) določimo frekvenco stabilnega nihanja in potrebno ojačenje tranzistorja. Tranzistor ima parametra  $\beta_F = 100$  in  $V_{AF} = 50V$ . Ostali elementi vezja so  $R_1 = 5,6k\Omega$ ,  $R_2 = 5,6k\Omega$ ,  $R_E = 2,2k\Omega$ ,  $L = 0,1mH$ ,  $C_1 = C_2 = 0,5\mu F$  in  $U_{CC} = 5V$ . Kapacitivnost  $C_B$  je dovolj velika, da kondenzator predstavlja kratek stik za izmenične signale.

Najprej določimo delovno točko vezja. Ko kondenzatorje nadomestimo z odprtimi sponkami, tuljave in enosmerne napetostne vire pa s kratkimi stiki, dobimo vezje na sliki 11.36 (desno). Predpostavimo, da je tok v bazo tranzistorja zanemarljiv v primerjavi s tokom skozi upora  $R_1$  in  $R_2$ . Na uporu  $R_E$  imamo zato napetost

$$U_E = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{CC} - U_K = 1,8V, \quad (11.143)$$

kjer je  $U_K$  kolenska napetost tranzistorja ( $0,7V$ ). Skozi  $R_E$  teče tok  $I_E = U_E/R_E = 0,818mA$ . Ker je  $\beta_F$  velik, velja  $I_C \approx I_E$ . Napetost med kolektorjem in emitorjem znaša  $U_{CE} = U_{CC} - U_E = 3,2V$ . Sledijo admitančni

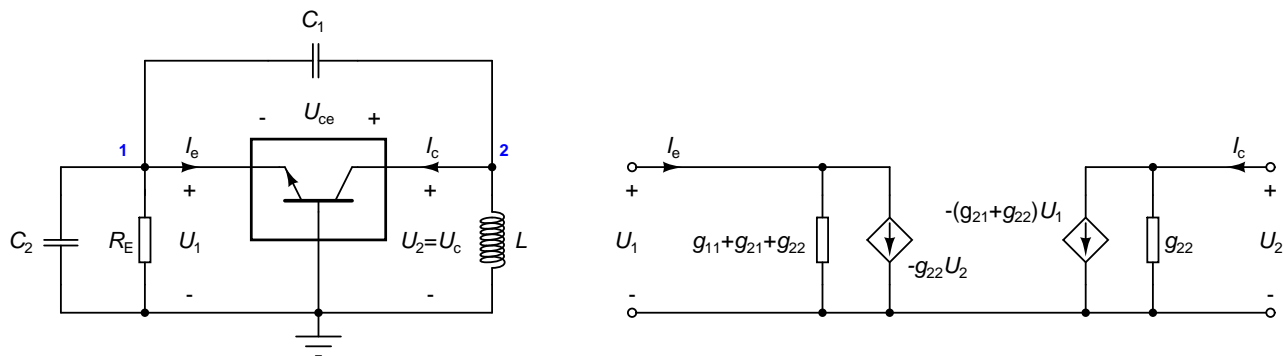
parametri tranzistorja.

$$\beta = \beta_F \left( 1 + \frac{U_{CE}}{V_{AF}} \right) = 106,4, \quad (11.144)$$

$$g_{21} = \frac{I_C}{V_T} = 31,5 \text{ mS}, \quad (11.145)$$

$$g_{11} = \frac{g_{21}}{\beta} = 0,296 \text{ mS}, \quad (11.146)$$

$$g_{22} = \frac{I_C}{U_{CE} + V_{AF}} = 15,4 \mu\text{S}. \quad (11.147)$$



Slika 11.37: Model za majhne signale za Colpittsov oscilator (levo) in model za majhne signale tranzistorja v orientaciji s skupno bazo (desno).

Ko  $U_{CC}$  in  $C_B$  nadomestimo s kratkim stikom, dobimo nadomestno vezje za majhne signale (slika 11.37, levo). Tranzistor deluje v orientaciji s skupno bazo. Matriko admitančnih parametrov za to orientacijo smo določili v poglavju 8.3. Tranzistor opisujeta enačbi, ki se v matrični obliki glasita

$$\begin{bmatrix} g_{11} + g_{21} + g_{22} & -g_{22} \\ -(g_{21} + g_{22}) & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_e \\ I_c \end{bmatrix}. \quad (11.148)$$

Predstavimo ga lahko z nadomestnim vezjem (slika 11.37, desno), iz katerega vidimo, da izhodna veličina ( $U_2$ ) preko levega krmiljenega vira vpliva tudi na vhodni tok ( $I_e$ ). Zaradi tega tranzistorja ne moremo na enostaven način predstaviti kot ojačevalnik s prevajalno funkcijo  $A(s)$ . Za zapis Barkhausenovega pogoja nam ostane le še pot preko enačb vezja. Če vpeljemo vozliščni napetosti  $U_1$  in  $U_2$ , lahko zapišemo enačbe vezja v prostoru kompleksne frekvence ( $s$ ).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + s(C_1 + C_2) & -g_{22} - sC_1 \\ -(g_{21} + g_{22}) - sC_1 & g_{22} + (sL)^{-1} + sC_1 \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.149)$$

Determinanta matrike  $[M]$  se glasi

$$\det[M] = (g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + s(C_1 + C_2))(g_{22} + (sL)^{-1} + sC_1) - (g_{22} + sC_1)(g_{21} + g_{22} + sC_1). \quad (11.150)$$

Barkhausenov pogoj dobimo, če v determinanto (11.150) vstavimo  $s = j\omega$  in jo izenačimo z 0.

$$(g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1} + j\omega(C_1 + C_2))(g_{22} + (j\omega L)^{-1} + j\omega C_1) - (g_{22} + j\omega C_1)(g_{21} + g_{22} + j\omega C_1) = 0. \quad (11.151)$$

Realni del enačbe (11.151) vodi do krožne frekvence stabilnega nihanja  $\omega = \omega_B$ .

$$(g_{11} + R_E^{-1})g_{22} - \omega_B (C_1 + C_2) \left( -\frac{1}{\omega_B L} + \omega_B C_1 \right) + \omega_B^2 C_1^2 = 0. \quad (11.152)$$

Sledi

$$\omega_B^2 = \frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2} + \frac{(g_{11} + R_E^{-1})g_{22}}{C_1 C_2}. \quad (11.153)$$

Po vstavitvi podatkov, dobimo  $\omega_B = 2 \cdot 10^5 \text{s}^{-1}$ , kar ustreza frekvenci  $f_B = \omega_B / (2\pi) = 31,83 \text{kHz}$ . Iz imaginarnega dela enačbe (11.151) pri  $\omega = \omega_B$  dobimo ojačenje  $g_{21} = g_{21,B}$ , ki je potrebno za stabilno nihanje.

$$(g_{11} + g_{21,B} + g_{22} + R_E^{-1}) \left( -\frac{1}{\omega_B L} + \omega_B C_1 \right) + \omega_B (C_1 + C_2)g_{22} - (g_{21,B} + 2g_{22})\omega_B C_1 = 0. \quad (11.154)$$

Enačbo poenostavimo v

$$\omega_B C_1 (g_{11} + R_E^{-1}) - \frac{1}{\omega_B L} (g_{11} + g_{21,B} + g_{22} + R_E^{-1}) + \omega_B C_2 g_{22} = 0, \quad (11.155)$$

Sledi

$$g_{21,B} = \omega_B^2 L (C_1 (g_{11} + R_E^{-1}) + C_2 g_{22}) - (g_{11} + g_{22} + R_E^{-1}) = 0,766 \text{mS}. \quad (11.156)$$

Za podano vezje velja  $g_{21} > g_{21,B}$ , kar pa še ne pomeni, da bo ob vklopu napajanja amplituda nihanja pričela naraščati. O obnašanju vezja odločajo njegovi poli. Dobimo jih kot rešitve enačbe  $\det[M] = 0$ .

$$s^3 + \underbrace{\left( \frac{g_{11} + R_E^{-1}}{C_2} + \frac{g_{22}}{C_1} \right)}_a s^2 + \underbrace{\left( \frac{(g_{11} + R_E^{-1})g_{22}}{C_1 C_2} + \frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2} \right)}_{b=\omega_B^2} s + \underbrace{\frac{g_{11} + g_{21} + g_{22} + R_E^{-1}}{LC_1 C_2}}_c = 0. \quad (11.157)$$

Ko vstavimo podatke, dobimo  $a = 1531 \text{s}^{-1}$ ,  $b = 4,000 \cdot 10^{10} \text{s}^{-2}$  in  $c = 1,289 \cdot 10^{15} \text{s}^{-3}$ . Poli so ničle polinoma na levi strani enačbe (11.157). Z uporabo numeričnih metod za iskanje ničel polinoma lahko izračunamo

$$p_{1,2} = (1,498 \pm j20,18) \cdot 10^4 \text{s}^{-1}, \quad (11.158)$$

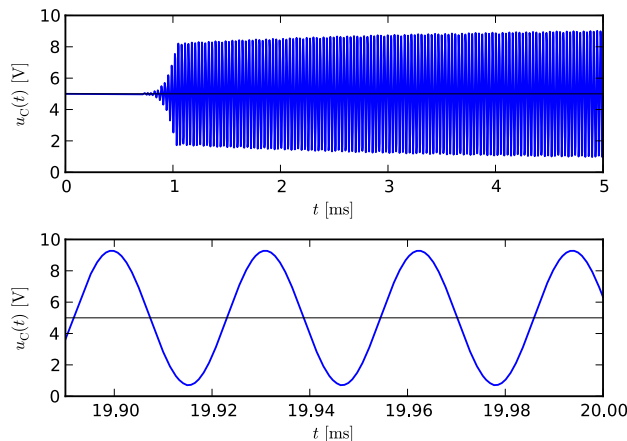
$$p_3 = -31,49 \cdot 10^4 \text{s}^{-1}. \quad (11.159)$$

Prva dva pola sta konjugirano kompleksna in ležita na desni strani imaginarne osi, kar zagotavlja eksponentno naraščanje amplitude nihanja. Naraščanje se sčasoma ustavi zaradi nelinearnosti tranzistorja. Rezultati simulacije oscilatorja so prikazani na sliki 11.38. Do trenutka  $t = 0$  je tuljava  $L$  kratko sklenjena. Ko kratek stik odstranimo, začne amplituda nihanja naraščati. Ko se naraščanje ustavi dobimo dokaj nepopačen sinusen signal s frekvenco 31,83kHz. Frekvenca stabilnega nihanja in potrebno ojačenje se močno poenostavita, če zanemarimo  $g_{22}$ .

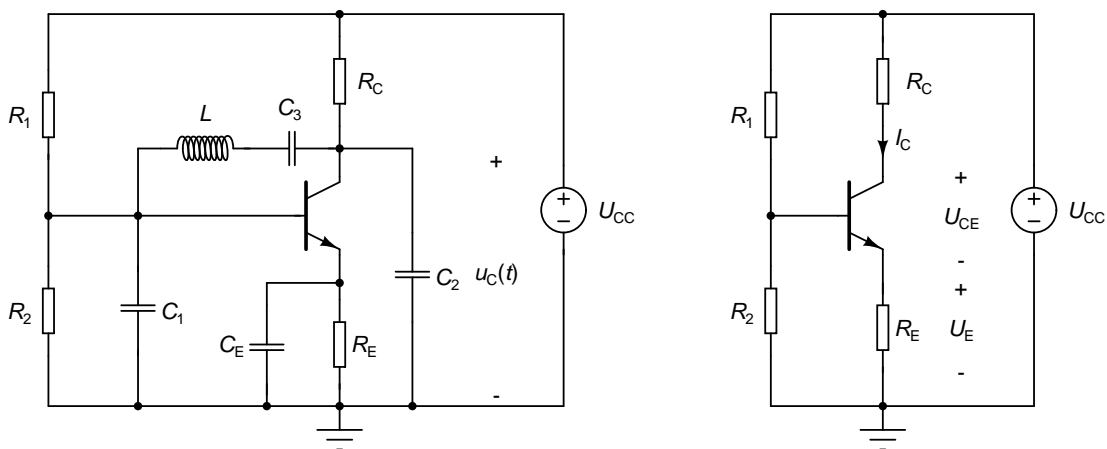
$$\lim_{g_{22} \rightarrow 0} \omega_B = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2}}, \quad (11.160)$$

$$\lim_{g_{22} \rightarrow 0} g_{21,B} = \frac{C_1}{C_2} (g_{11} + R_E^{-1}). \quad (11.161)$$

V literaturi se oscilatorji, katerih resonančno vezje tvorita dva kondenzatorja in ena tuljava, frekvenco stabilnega nihanja pa v idealiziranih okoliščinah določa (11.160), pogosto imenujejo kar Colpittsovi oscilatorji.  $\triangle$



Slika 11.38: Časovni potek potenciala kolektorja za Colpittsov oscilator ob zagonu (zgoraj) in v ustaljenem stanju (spodaj).



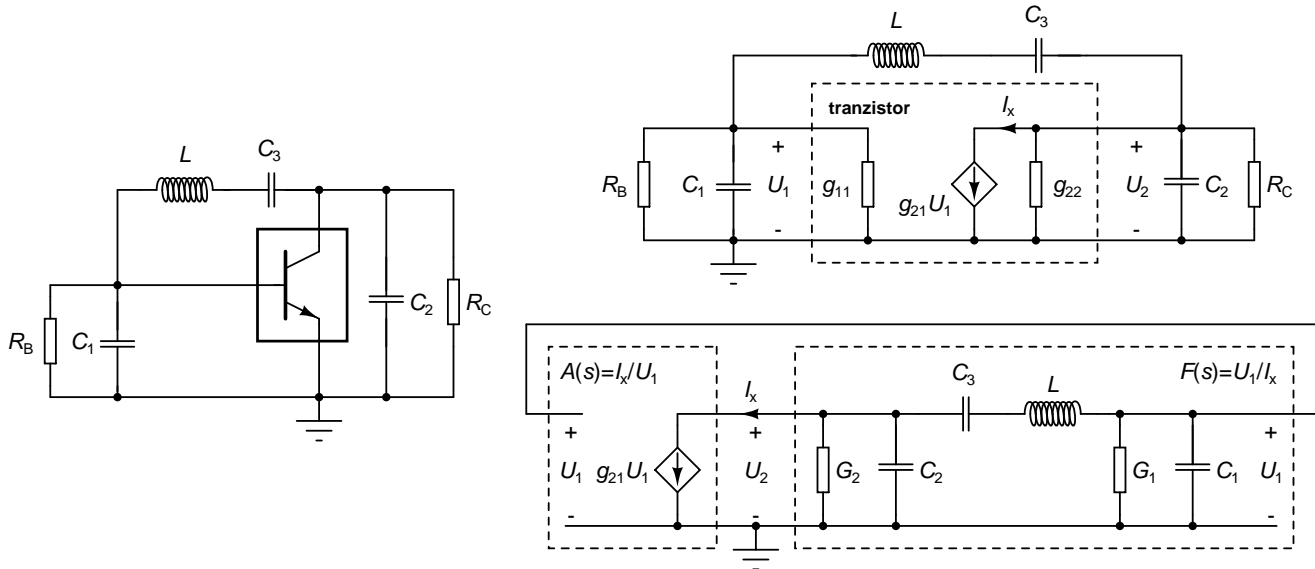
Slika 11.39: Clappov oscilator s tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem (levo) in določanje delovne točke oscilatorja (desno).

**Primer 11.16:** Za **Clappov oscilator** na sliki 11.39 (levo) določimo frekvenco stabilnega nihanja in potrebno ojačenje. Tranzistor ima parametra  $\beta_F = 100$  in  $V_{AF} = 50V$ . Ostali elementi vezja so  $R_1 = 48k\Omega$ ,  $R_2 = 22k\Omega$ ,  $R_C = 4,3k\Omega$ ,  $R_E = 1,2k\Omega$ ,  $L = 5mH$ ,  $C_1 = C_2 = 100nF$ ,  $C_3 = 10nF$  in  $U_{CC} = 5V$ . Kapacitivnost  $C_E$  je dovolj velika, da kondenzator predstavlja kratek stik za izmenične signale.

Pri določanju delovne točke predstavljajo kondenzatorji odprte sponke. Izhajamo iz vezja na sliki 11.40 (desno). Predpostavimo, da bazni tok ne obremenjuje delilnika napetosti, ki ga tvorita  $R_1$  in  $R_2$ . Tedaj je napetost na uporu  $R_E$  enaka

$$U_E = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{CC} - U_K = 0,871V, \quad (11.162)$$

kjer je  $U_K$  kolenska napetost tranzistorja ( $0,7V$ ). Skozi  $R_E$  teče tok  $I_E = U_E/R_E = 0,396mA$ . Zaradi velike vrednosti  $\beta_F$  velja  $I_C \approx I_E$ . Napetost med kolektorjem in emitorjem znaša  $U_{CE} = U_{CC} - U_E - I_C R_C = 2,43V$ .



Slika 11.40: Model Clappovega oscilatorja za majhne signale (levo). Ko tranzistor nadomestimo z nadomestnim vezjem (desno zgoraj) in elemente nekoliko preuredimo, lahko razberemo prevajalni funkciji  $A(s)$  in  $F(s)$  (desno spodaj).

Iz delovne točke lahko izračunamo admitančne parametre tranzistorja.

$$\beta = \beta_F \left( 1 + \frac{U_{CE}}{V_{AF}} \right) = 104,9, \quad (11.163)$$

$$g_{21} = \frac{I_C}{V_T} = 15,2\text{mS}, \quad (11.164)$$

$$g_{11} = \frac{g_{21}}{\beta} = 0,145\text{mS}, \quad (11.165)$$

$$g_{22} = \frac{I_C}{U_{CE} + V_{AF}} = 7,56\mu\text{S}. \quad (11.166)$$

Ko  $U_{CC}$  in  $C_E$  nadomestimo s kratkim stikom ter vpeljemo  $R_B = 1/(R_1^{-1} + R_2^{-1})$ , dobimo vezje na sliki 11.40 (levo). Če namesto tranzistorja vstavimo njegovo nadomestno vezje v srednjefrekvenčnem območju in elemente nekoliko preuredimo, dobimo vezje na sliki 11.40 (desno spodaj). Pri tem smo vpeljali prevodnosti  $G_1 = R_B^{-1} + g_{11}$  in  $G_2 = R_C^{-1} + g_{22}$ . Sedaj lahko razberemo prevajalni funkciji  $A(s)$  in  $F(s)$ . Prva je enaka

$$A(s) = \frac{I_x}{U_1} = g_{21}. \quad (11.167)$$

Za izpeljavo  $F(s)$  najprej vpeljemo impedanco zaporedne vezave  $L$  in  $C_3$ , ki je pri  $s = j\omega$  enaka

$$Z(j\omega) = j\omega L + \frac{1}{j\omega C_3} = j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C_3} \right) = jX(\omega). \quad (11.168)$$

Izrazimo vhodno impedanco v vezje povratne vezave.

$$\frac{U_2}{-I_x} = \frac{((G_1 + j\omega C_1)^{-1} + Z(j\omega))(G_2 + j\omega C_2)^{-1}}{(G_1 + j\omega C_1)^{-1} + Z(j\omega) + (G_2 + j\omega C_2)^{-1}}. \quad (11.169)$$

Razmerje med  $U_1$  in  $U_2$  določa delilnik napetosti, ki ga tvorijo  $C_3$ ,  $L$ ,  $G_1$  in  $C_1$ .

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{(G_1 + j\omega C_1)^{-1}}{(G_1 + j\omega C_1)^{-1} + Z(j\omega)}. \quad (11.170)$$

Ko združimo (11.169) in (11.170), dobimo

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{U_1}{I_x} = -\frac{U_2}{-I_x} \cdot \frac{U_1}{U_2} = -\frac{(G_1 + j\omega C_1)^{-1}(G_2 + j\omega C_2)^{-1}}{(G_1 + j\omega C_1)^{-1} + Z(j\omega) + (G_2 + j\omega C_2)^{-1}} \\ &= -\frac{1}{G_1 + G_2 + j\omega(C_1 + C_2) + Z(j\omega)(G_1 + j\omega C_1)(G_2 + j\omega C_2)}. \end{aligned} \quad (11.171)$$

Barkhausenov pogoj zahteva  $A(j\omega)F(j\omega) = 1$ . Ko vstavimo (11.167) in (11.171), dobimo

$$G_1 + G_2 + g_{21} + j\omega(C_1 + C_2) + Z(j\omega)(G_1 + j\omega C_1)(G_2 + j\omega C_2) = 0. \quad (11.172)$$

Po vstavitvi  $Z(j\omega) = jX(\omega)$  in  $\omega = \omega_B$  se imaginarni del pogoja glasi

$$\omega_B(C_1 + C_2) + (G_1 G_2 - \omega_B^2 C_1 C_2)X(\omega_B) = 0. \quad (11.173)$$

Če upoštevamo še (11.168), dobimo

$$\omega_B(C_1 + C_2) + (G_1 G_2 - \omega_B^2 C_1 C_2) \left( \omega_B L - \frac{1}{\omega_B C_3} \right) = 0. \quad (11.174)$$

Predpostavimo, da sta  $C_1$  in  $C_2$  dovolj velika, da velja  $G_1 G_2 \ll \omega_B^2 C_1 C_2$ . Tedaj  $G_1$  in  $G_2$  ne vplivata na frekvenco nihanja, saj se (11.174) poenostavi v

$$\omega_B^2 - \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \frac{1}{L} = 0. \quad (11.175)$$

Sledi

$$\omega_B^2 = \frac{1}{L} \cdot \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{1}{LC_x}. \quad (11.176)$$

Za frekvenco nihanja dobimo  $f_B = \omega_B/(2\pi) = 24,66\text{kHz}$ . Če sta  $C_1$  in  $C_2$  mnogo večja od  $C_3$ , je frekvenca nihanja odvisna samo še od  $C_3$ , saj velja  $C_x \approx C_3$  in

$$\omega_B^2 \approx \frac{1}{LC_3}. \quad (11.177)$$

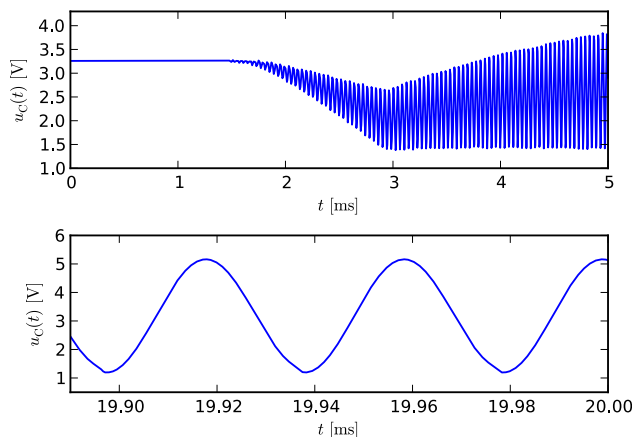
Vhodne in izhodne kapacitivnosti tranzistorja tedaj nimajo velikega vpliva na  $\omega_B$ , saj se pridružijo vzporedno k  $C_1$  in  $C_2$ . Realni del enačbe (11.172) pri  $\omega = \omega_B$  in  $g_{21} = g_{21,B}$  se glasi

$$G_1 + G_2 + g_{21,B} - \omega_B(C_1 G_2 + C_2 G_1)X(\omega_B) = 0. \quad (11.178)$$

Ko vstavimo (11.168) in (11.176), dobimo

$$G_1 + G_2 + g_{21,B} - (C_1 G_2 + C_2 G_1) \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = 0. \quad (11.179)$$





Slika 11.41: Časovni potek potenciala kolektorja za Clappov oscilator ob zagonu (zgoraj) in v ustaljenem stanju (spodaj).

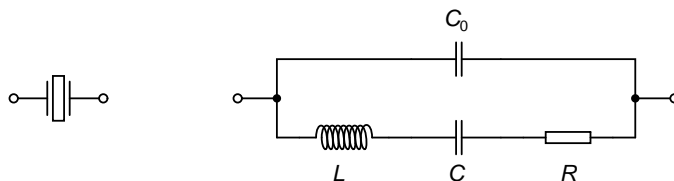
Vrednost parametra  $g_{21} = g_{21,B}$ , ki je potrebna za stabilno nihanje, je enaka

$$g_{21,B} = \frac{C_1}{C_2}G_2 + \frac{C_2}{C_1}G_1 = 0,451\text{mS}. \quad (11.180)$$

Ker je  $G_1G_2/(\omega_B^2C_1C_2) = 2,1 \cdot 10^{-4}$ , je pogoj  $G_1G_2 \ll \omega_B^2C_1C_2$  izpolnjen. Torej smo upravičeno zanemarili vpliv  $G_1$  in  $G_2$  na frekvenco nihanja. Časovni potek potenciala kolektorja ob zagonu oscilatorja (ko odstranimo kratek stik, ki premošča tuljavo  $L$  do časa  $t = 0$ ) prikazuje slika 11.41. Iz rezultatov simulacije dobimo frekvenco nihanja oscilatorja, ki znaša 24,65kHz.  $\triangle$

#### 11.4.4 Kvarčni oscilatorji

V kvarčnih oscilatorjih uporabimo kvarčni kristal kot osrednji element resonančnega vezja. Kristal ob ustreznem vzbujanju niha v osnovnem načinu in/ali katerem od višjeharmonskih načinov. Frekvenca nihanja v višjeharmonskih načinih je ponavadi lihi večkratnik frekvence nihanja v osnovnem načinu. Tukaj se bomo ukvarjali le z vezji, kjer kristal niha v osnovnem načinu. Višjeharmonske načine nihanja izkoriščajo kristali, ki so namenjeni uporabi pri visokih frekvencah (tako je naprimer 5. višjeharmonski način ponavadi uporabljen za frekvence od 60MHz do 110MHz). Glavna prednost kvarčnih kristalov je, da imajo resonanco z visokim faktorjem kakovosti, ki nastopi pri natančno določeni frekvenci.



Slika 11.42: Simbol za kvarčni kristal (levo) in nadomestno vezje za en način nihanja (desno).

Simbol za kvarčni kristal je na sliki 11.42 (levo), električno nadomestno vezje, ki opisuje en način nihanja, pa na sliki 11.42 (desno). Za enosmerne signale kristal predstavlja odprte sponke. Za obravnavo kvarčnih oscilatorjev

moramo poznati odvisnost impedance kristala od frekvence. Iz nadomestnega vezja dobimo

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{(sC_0)^{-1}(R + sL + (sC)^{-1})}{R + sL + (sC)^{-1} + (sC_0)^{-1}} = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{LCC_0s^3 + RCC_0s^2 + (C + C_0)s} \\ &= \frac{1}{sC_0} \cdot \frac{s^2 + (R/L)s + (LC)^{-1}}{s^2 + (R/L)s + (LCC_0/(C + C_0))^{-1}}. \end{aligned} \quad (11.181)$$

Iz (11.181) vidimo, da ima impedanca dve konjugirano kompleksni ničli

$$z_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (11.182)$$

in dva konjugirano kompleksna pola

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC_x} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}, \quad (11.183)$$

pri čemer velja

$$C_x = \frac{CC_0}{C + C_0}. \quad (11.184)$$

Ker ponavadi velja  $C \ll C_0$ , je  $C_x \approx C$  in hkrati  $C_x < C$ . Ničli povzročita, da ima impedanca ekstrem (absolutna vrednost ima minimum), ki leži blizu krožne frekvence

$$\omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (11.185)$$

Minimumu impedance pravimo tudi **serijska resonanca kristala**. Zaradi polov ima absolutna vrednost impedance maksimum blizu krožne frekvence

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC_x}}, \quad (11.186)$$

ki ga imenujemo tudi **paralelna resonanca**. Za resonanci velja  $\omega_s < \omega_p$ . Ker je  $C_x \approx C$ , je razmik med njima majhen in znaša

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{1}{LC_x}} - \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \left( \sqrt{1 + \frac{C}{C_0}} - 1 \right) \approx \omega_s \cdot \frac{C}{2C_0}. \quad (11.187)$$

Faktor kakovosti obeh resonanc znaša

$$Q_s = \frac{\omega_s L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (11.188)$$

$$Q_p = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_x}}. \quad (11.189)$$

Zaradi  $C \approx C_x$  sta oba faktorja kakovosti približno enaka ( $Q_s \approx Q_p$ ). Praviloma za kristale velja  $C_0/C \approx C_0/C_x \ll Q_s, Q_p$ . Ker je faktor kakovosti resonance tudi merilo za njeno širino, je razmik med obema resonanca ma ponavadi precej večji od širine obeh resonanc. Če v (11.181) nadomestimo  $s$  z  $j\omega$ , dobimo

$$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C_0} \cdot \frac{-\omega^2 + (R/L)j\omega + \omega_s^2}{-\omega^2 + (R/L)j\omega + \omega_p^2}. \quad (11.190)$$

V serijski resonanci ( $\omega = \omega_s$ ) je impedanca enaka

$$\begin{aligned} Z(j\omega_s) &= \frac{1}{j\omega_s C_0} \cdot \frac{(R/L)j\omega_s}{\omega_p^2 - \omega_s^2 + (R/L)j\omega_s} = \frac{1}{j\omega_s C_0} \cdot \frac{(R/L)j\omega_s}{(LC_0)^{-1} + (R/L)j\omega_s} = \frac{1}{j\omega_s C_0} \cdot \frac{RC_0 j\omega_s}{1 + RC_0 j\omega_s} \\ &= \frac{R}{1 + RC_0 j\omega_s} = \frac{R}{1 + j\frac{C_0}{C} R\sqrt{\frac{C}{L}}} = \frac{R}{1 + j\frac{C_0}{C Q_s}} \approx R. \end{aligned} \quad (11.191)$$

V paralelni resonanci ( $\omega = \omega_p$ ) impedanca kristala močno naraste.

$$\begin{aligned} Z(j\omega_p) &= \frac{1}{j\omega_p C_0} \cdot \frac{\omega_s^2 - \omega_p^2 + (R/L)j\omega_p}{(R/L)j\omega_p} = \frac{1}{j\omega_p C_0} \cdot \frac{-(LC_0)^{-1} + (R/L)j\omega_p}{(R/L)j\omega_p} = \frac{1}{j\omega_p C_0} \cdot \frac{-1 + RC_0 j\omega_p}{RC_0 j\omega_p} \\ &= \frac{1 - RC_0 j\omega_p}{\omega_p^2 RC_0^2} = \frac{1 - j\frac{C_0}{C_x} R\sqrt{\frac{C_x}{L}}}{\omega_p^2 RC_0^2} = \frac{1 - j\frac{C_0}{C_x Q_p}}{\omega_p^2 RC_0^2}. \end{aligned} \quad (11.192)$$

Zaradi  $C_0/C_x \ll Q_p$  velja

$$Z(j\omega_p) \approx \frac{1}{\omega_p^2 RC_0^2} = \frac{LC_x}{RC_0^2} = R \cdot \frac{C_x^2}{C_0^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{L}{C_x} = R \left( \frac{C_x Q_p}{C_0} \right)^2 \gg R. \quad (11.193)$$

Če frekvenca  $\omega$  ni v neposredni bližini  $\omega_s$  ali  $\omega_p$ , lahko  $R$  zanemarimo in za impedanco dobimo izraz

$$Z(j\omega) = j\frac{1}{\omega C_0} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega^2 - \omega^2} = jX(\omega). \quad (11.194)$$

Vidimo, da se kristal za frekvence, ki so precej manjše od  $\omega_s$  obnaša kot kondenzator

$$C_{\omega \rightarrow 0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{\omega X(\omega)} \right) = C_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} = \frac{C_0 C}{C_x} = C_0 + C. \quad (11.195)$$

Za frekvence, ki so precej večje od  $\omega_p$  se kristal prav tako obnaša kot kondenzator.

$$C_{\omega \rightarrow \infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\omega X(\omega)} \right) = C_0. \quad (11.196)$$

Med obema resonancama se kristal obnaša kot frekvenčno odvisna induktivnost

$$L'(\omega) = \frac{X(\omega)}{\omega} = \frac{1}{\omega^2 C_0} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega^2 - \omega^2}. \quad (11.197)$$

**Primer 11.17:** Za kristal s podatki  $L = 6,3410\text{H}$ ,  $C = 3,9961\text{fF}$ ,  $R = 990\Omega$  in  $C_0 = 1\text{pF}$  določimo resonančni frekvenci, pripadajoča faktorja kakovosti in impedanco kristala v obeh resonancah.

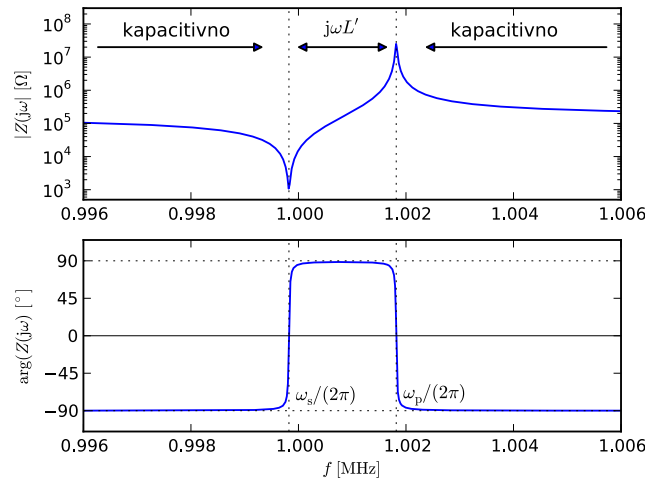
S pomočjo enačbe (11.184) dobimo

$$C_x = \frac{CC_0}{C + C_0} = 3,9802\text{fF}. \quad (11.198)$$

Resonančni frekvenci sta enaki

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 0,999823\text{MHz}, \quad (11.199)$$

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_x}} = 1,001819\text{MHz}. \quad (11.200)$$



Slika 11.43: Potek absolutne vrednosti in argumenta impedanca kristala.

Faktorja kakovosti dobimo s pomočjo (11.188) in (11.189).

$$Q_s = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 40237, \quad (11.201)$$

$$Q_p = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_x}} = 40317. \quad (11.202)$$

Resonančni frekvenci sta razmaknjeni za 1,996kHz. S poenostavljeno formulo (11.187) dobimo

$$\Delta f = \frac{f_s C}{2C_0} = 1,998\text{kHz}. \quad (11.203)$$

Impedanco v serijski in paralelni resonanci določimo s pomočjo (11.191) in (11.193).

$$Z_s \approx R = 990\Omega, \quad (11.204)$$

$$Z_p \approx R \left( \frac{C_x Q_p}{C_0} \right)^2 = 25,5\text{M}\Omega. \quad (11.205)$$

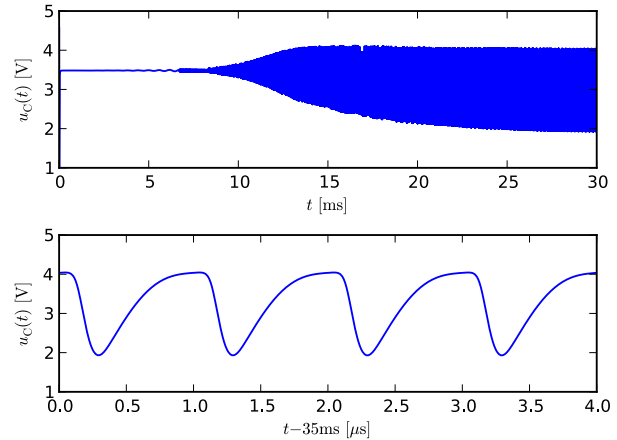
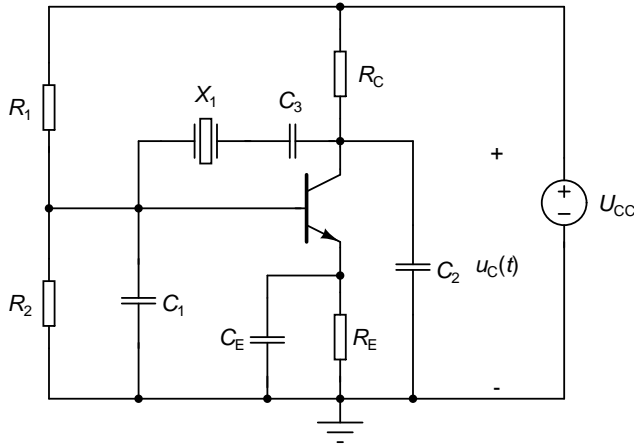
Potek impedanca kristala v okolici obeh resonanc je podan na sliki 11.43. △

Obstaja veliko različnih oscilatorjev, ki uporabljajo kvarčni kristal za izvedbo resonančnega vezja. Poglejmo si enega od njih (slika 11.44, levo). Že na prvi pogled vezje močno spominja na Clappov oscilator (primer 11.16), le da smo tokrat uporabili kristal namesto tuljave. Izpeljava poteka na enak način, kot v primeru 11.16, le da je tokrat impedanca  $Z$  enaka impedanci zaporedno vezanega kristala in kondenzatorja  $C_3$ . Če predpostavimo, da frekvenca nihanja ne bo v neposredni bližini ene od resonanc, lahko uporabimo poenostavljen izraz za impedanco kristala (11.194).

$$Z(j\omega) = j \frac{1}{\omega C_0} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega_p^2 - \omega^2} + \frac{1}{j\omega C_3} = jX(\omega). \quad (11.206)$$

Sledi

$$X(\omega) = \frac{1}{\omega C_0} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega_p^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega C_3}, \quad (11.207)$$



Slika 11.44: Oscilator s kvarčnim kristalom in tranzistorjem v orientaciji s skupnim emitorjem (levo) in njegov odziv za vrednosti elementov iz primera 11.18 (desno).

kar vstavimo v Barkhausenov pogoj za Clappov oscilator (enačbi (11.173) in (11.178)). Prva enačba se glasi

$$\omega_B(C_1 + C_2) + (G_1 G_2 - \omega_B^2 C_1 C_2) \left( \frac{1}{\omega_B C_0} \cdot \frac{\omega_B^2 - \omega_s^2}{\omega_p^2 - \omega_B^2} - \frac{1}{\omega_B C_3} \right) = 0. \quad (11.208)$$

Če spet predpostavimo, da velja  $G_1 G_2 \ll \omega_B^2 C_1 C_2$ , dobimo

$$\omega_B(C_1 + C_2) - \omega_B^2 C_1 C_2 \left( \frac{1}{\omega_B C_0} \cdot \frac{\omega_B^2 - \omega_s^2}{\omega_p^2 - \omega_B^2} - \frac{1}{\omega_B C_3} \right) = 0. \quad (11.209)$$

Delimo z  $\omega_B C_1 C_2$  in preuredimo

$$\underbrace{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}_{1/C_L} = \frac{1}{C_0} \cdot \frac{\omega_B^2 - \omega_s^2}{\omega_p^2 - \omega_B^2}. \quad (11.210)$$

Izraz na levi strani enačbe predstavlja obratno vrednost kapacitivnosti zaporedne vezave  $C_1$ ,  $C_2$  in  $C_3$ . To je tudi kapacitivnost, ki jo kristal čuti kot svoje breme ( $C_L$ ). Če vpeljemo  $\alpha = C_0/C_L$ , lahko pišemo

$$\frac{\omega_B^2 - \omega_s^2}{\omega_p^2 - \omega_B^2} = \alpha. \quad (11.211)$$

Odtod izrazimo frekvenco nihanja

$$\omega_B^2 = \frac{1}{\alpha + 1} \omega_s^2 + \left( 1 - \frac{1}{\alpha + 1} \right) \omega_p^2. \quad (11.212)$$

Ko  $C_L$  preleti vrednosti od 0 do  $\infty$ , gre  $\alpha$  od  $\infty$  do 0, izraz (11.212) pa od  $\omega_p^2$  do  $\omega_s^2$ . Vidimo, da frekvenca nihanja leži med serijsko in paralelno resonanco. V tem območju se kristal obnaša kot induktivnost. Realni del Barkhausenovega pogoja za Clappov oscilator podaja enačba (11.178). Če vanjo vstavimo

$$X(\omega_B) = \frac{1}{\omega_B} \left( \frac{1}{C_L} - \frac{1}{\omega C_3} \right) = \frac{1}{\omega_B} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right), \quad (11.213)$$

dobimo

$$G_1 + G_2 + g_{21,B} - (C_1 G_2 + C_2 G_1) \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = 0. \quad (11.214)$$

Sledi ojačenje tranzistorja (parameter  $g_{21}$ ), pri katerem dobimo nihanje z nespremenljivo amplitudo.

$$g_{21,B} = \frac{C_2}{C_1} G_1 + \frac{C_1}{C_2} G_2. \quad (11.215)$$

**Primer 11.18:** Za vezje na sliki 11.44 (levo) določimo frekvenco nihanja in potrebno ojačenje tranzistorja ( $g_{21,B}$ ). Elementi vezje so  $U_{CC} = 5\text{V}$ ,  $R_C = 4,7\text{k}\Omega$ ,  $R_E = 3,3\text{k}\Omega$ ,  $R_1 = 100\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 56\text{k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 120\text{pF}$  in  $C_3 = 10\text{pF}$ . Kristal je enak, kot smo ga imeli v primeru 11.17. Tranzistor je podan z  $\beta_F = 100$  in  $V_{AF} = 50\text{V}$ .

Do delovne točke vezja pridemo na enak način, kot v primeru 11.16.

$$U_E = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{CC} - U_K = 1,09\text{V}, \quad (11.216)$$

Skozi  $R_E$  teče tok  $I_E = U_E/R_E = 0,332\text{mA}$ . Zaradi velike vrednosti  $\beta_F$  velja  $I_C \approx I_E$ . Napetost med kolektorjem in emitorjem znaša  $U_{CE} = U_{CC} - U_E - I_C R_C = 2,35\text{V}$ . Iz delovne točke lahko izračunamo admitančne parametre tranzistorja.

$$\beta = \beta_F \left( 1 + \frac{U_{CE}}{V_{AF}} \right) = 104,7, \quad (11.217)$$

$$g_{21} = \frac{I_C}{V_T} = 12,8\text{mS}, \quad (11.218)$$

$$g_{11} = \frac{g_{21}}{\beta} = 0,122\text{mS}, \quad (11.219)$$

$$g_{22} = \frac{I_C}{U_{CE} + V_{AF}} = 6,34\mu\text{S}. \quad (11.220)$$

Prevodnosti  $G_1$  in  $G_2$  ter bremenska kapacitivnost kristala so

$$G_1 = g_{11} + R_1^{-1} + R_2^{-1} = 0,150\text{mS}, \quad (11.221)$$

$$G_2 = g_{22} + R_C^{-1} = 0,219\text{mS}, \quad (11.222)$$

$$C_L = (C_1^{-1} + C_2^{-1} + C_3^{-1})^{-1} = 8,57\text{pF}. \quad (11.223)$$

Že v primeru 11.17 smo določili frekvenco serijske in paralelne resonance kristala ( $f_s = 0,999823\text{MHz}$  in  $f_p = 1,001819\text{MHz}$ ). Frekvenco nihanja in potrebno ojačenje določimo s pomočjo enačb (11.212) in (11.215).

$$\alpha = \frac{C_0}{C_L} = 0,117, \quad (11.224)$$

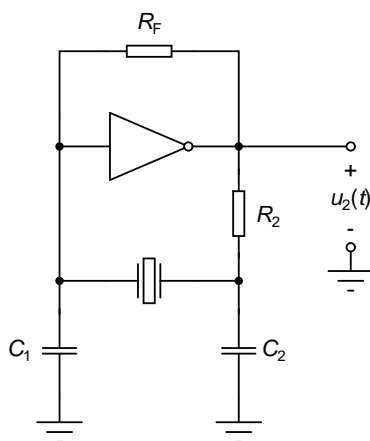
$$f_B = \sqrt{\frac{1}{\alpha + 1} f_s^2 + \left( 1 - \frac{1}{\alpha + 1} \right) f_p^2} = 1,000032\text{MHz}, \quad (11.225)$$

$$g_{21,B} = \frac{C_2}{C_1} G_1 + \frac{C_1}{C_2} G_2 = 0,369\text{mS}. \quad (11.226)$$

Vidimo, da velja  $g_{21} > g_{21,B}$ , zato pričakujemo, da bo ob vklopu napajanja amplituda nihanja pričela naraščati. Izraz  $G_1 G_2 / ((2\pi f_B)^2 C_1 C_2)$  ima vrednost  $5,8 \cdot 10^{-2}$  s čimer je upravičena zanemaritev člena  $G_1 G_2$  v primerjavi z  $\omega_B^2 C_1 C_2$ . Časovni potek potenciala kolektorja je podan na sliki 11.44 (desno). Frekvenca nihanja, ki jo razberemo

iz rezultatov simulacije, znaša 1,000138MHz. Razlika nastane, ker se ojačevalni element (tranzistor) za velike signale obnaša nelinearno. Tudi oblika signala se močno razlikuje od sinusne.

Zagon oscilatorja je dolgotrajen (več 10000 nihajev). Vzrok tiči v visokem faktorju kakovosti kristala ( $Q$ ). Zaradi njega je absolutna vrednost realnega dela polov (oziroma ničel), ki pripadata resonanci, mnogo manjša od imaginarnega dela (za velike  $Q$  je realni del približno  $2Q$ -krat manjši od imaginarnega). Posledično je tudi realni del polov zaprtzoančnega sistema mnogo manjši od imaginarnega dela. Ker prvi določa hitrost naraščanja ovojnice nihanja, drugi pa frekvenco nihanja, je število period nihanja, ki jih potrebuje oscilator za zagon, reda velikosti  $Q$ .  $\triangle$



Slika 11.45: Pierceov oscilator s CMOS inverterjem. Napajanje inverterja je izpuščeno iz sheme.

Na sliki 11.45 je shema **Pierceovega oscilatorja s CMOS inverterjem**. CMOS inverter se obnaša podobno kot tranzistor v orientaciji s skupnim emitorjem (primer 10.12). Izhodna upornost inverterja ( $g_{22}$ ) v bližini področja nasičenja (logična „0“ ali „1“) močno upade, ker eden od tranzistorjev preide v linearno področje. Zaradi tega lahko postanejo izhodni tokovi in z njimi tudi moč, ki se troši na kristalu, preveliki. Upor  $R_2$  omeji izhodni tok inverterja in tako zaščiti kristal pred poškodbami. Upor  $R_F$  služi nastavitvi delovne točke inverterja. Srečali smo ga že v primeru 10.12.

Pri analizi vezja lahko uporabimo rezultate, ki smo jih dobili za vezje na sliki 11.44 (levo). Tokrat nimamo kondenzatorja  $C_3$  ter uporov  $R_1$ ,  $R_2$  in  $R_C$ . Enačbe (11.206)-(11.226) popravimo tako, da vstavimo neskončne vrednosti za te elemente, da pripadajoči členi izpadejo iz enačb. Parameter  $g_{11}$  nadomestnega vezja inverterja je enak 0, saj je inverter zgrajen z MOS tranzistorji. Če predpostavimo, da je  $R_F$  zelo velik,  $R_2$  pa majhen v primerjavi z  $g_{22}^{-1}$ , sta prevodnosti  $G_1$  in  $G_2$  enaki 0 oziroma  $g_{22}$ . Če zanemarimo upornost priključka vrat obeh MOS tranzistorjev v inverterju ( $r_G$ ), se vhodna kapacitivnost inverterja ( $c_{in}$ ) prišteje k  $C_1$ , izhodna kapacitivnost inverterja ( $c_{out}$ ) pa k  $C_2$ . Celotna bremenska kapacitivnost, ki jo čuti kristal, je enaka

$$C_L = \frac{1}{(C_1 + c_{in})^{-1} + (C_2 + c_{out})^{-1}}. \quad (11.227)$$

Če vpeljemo  $\alpha = C_0/C_L$ , je frekvenca nihanja kristala enaka

$$f_B = \sqrt{\frac{1}{\alpha + 1} f_s^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha + 1}\right) f_p^2}. \quad (11.228)$$

Zaradi  $G_1 = 0$  je potrebno ojačenje inverterja (parameter  $g_{21}$ ) enako

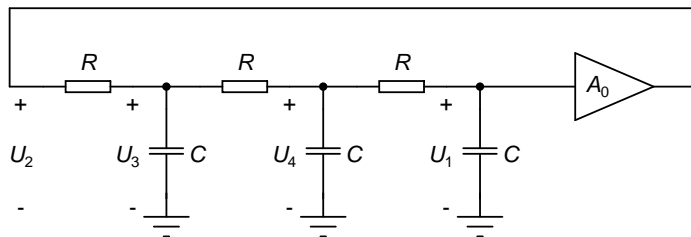
$$g_{21,B} = \frac{C_1 + c_{in}}{C_2 + c_{out}} G_2 = \frac{C_1 + c_{in}}{C_2 + c_{out}} g_{22}. \quad (11.229)$$

### 11.4.5 Oscilatorji na osnovi faznega zasuka

Pri tej družini oscilatorjev ojačenje povratne vezave ne izkazuje ekstrema pri neki frekvenci. Namesto tega izkoristimo fazni zasuk  $F(j\omega)$ , da zadostimo Barkhausenovemu pogoju

$$A(j\omega_B)F(j\omega_B) = 1. \quad (11.230)$$

Ponavadi poskrbi povratna vezava  $F(j\omega)$  pri frekvenci nihanja  $\omega_B$  za fazni zasuk  $\pm 180^\circ$ , prostalih  $180^\circ$  pa prispeva ojačevalnik  $A(j\omega)$  s svojim negativnim realnim frekvenčno neodvisnim ojačenjem  $A(s) = A_0$ . Vsak pol prinese  $90^\circ$ , ničla pa  $-90^\circ$  faznega zasuka. Da dosežemo fazni zasuk  $\pm 180^\circ$  mora imeti vezje povratne vezave vsaj tri pole ali tri ničle. Dva pola ali dve ničli ne zadostujeta, saj se  $\pm 180^\circ$  faznega zasuka zgolj približujemo, ko frekvenca raste proti neskončnosti.



Slika 11.46: Oscilator na osnovi negativnega faznega zasuka.

Za vezje na sliki 11.46 določimo frekvenco nihanja  $\omega_B$  in potrebno ojačenje  $A_0 = A_B$ . Vhodna impedanca v ojačevalnik je neskončna, izhodna impedanca pa je enaka  $0\Omega$ . Prevaljalno funkcijo povratne vezave pri  $s = j\omega$  lahko pišemo kot

$$F(j\omega) = \frac{U_1}{U_2} = \frac{U_1}{U_4} \cdot \frac{U_4}{U_3} \cdot \frac{U_3}{U_2}. \quad (11.231)$$

Če obravnavamo posamezne odseke vezja kot napetostne delilnike, dobimo

$$\frac{U_1}{U_4} = \frac{(j\omega C)^{-1}}{R + (j\omega C)^{-1}} = \frac{(j\omega C)^{-1}}{Z_1}, \quad (11.232)$$

$$\frac{U_4}{U_3} = \frac{(j\omega C + Z_1^{-1})^{-1}}{R + (j\omega C + Z_1^{-1})^{-1}} = \frac{(j\omega C + Z_1^{-1})^{-1}}{Z_2}, \quad (11.233)$$

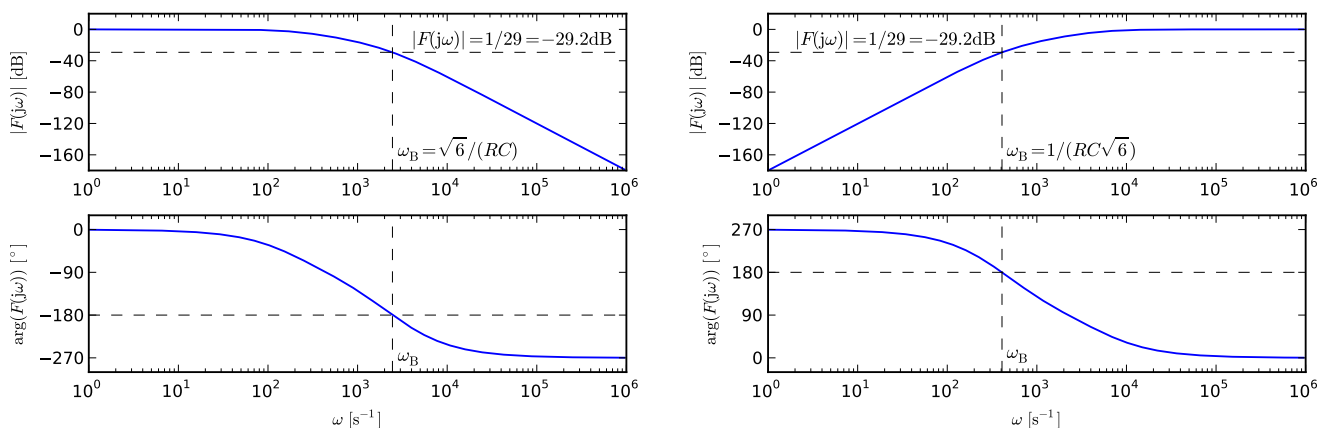
$$\begin{aligned} \frac{U_3}{U_2} &= \frac{(j\omega C + Z_2^{-1})^{-1}}{R + (j\omega C + Z_2^{-1})^{-1}} = \frac{1}{1 + R(j\omega C + Z_2^{-1})} = \frac{1}{1 + R\left(j\omega C + \frac{1}{R + (j\omega C + Z_1^{-1})^{-1}}\right)} \\ &= \frac{R + (j\omega C + Z_1^{-1})^{-1}}{R + (j\omega C + Z_1^{-1})^{-1} + R + j\omega RC\left(R + (j\omega C + Z_1^{-1})^{-1}\right)} \\ &= \frac{R + (j\omega C + Z_1^{-1})^{-1}}{R(2 + j\omega RC) + (j\omega C + Z_1^{-1})^{-1}(1 + j\omega RC)}. \end{aligned} \quad (11.234)$$



Ko vse skupaj združimo, dobimo

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= \frac{(j\omega C)^{-1}}{Z_1} \cdot \frac{(j\omega C + Z_1^{-1})^{-1}}{R(2 + j\omega RC) + (j\omega C + Z_1^{-1})^{-1} (1 + j\omega RC)} \\
 &= \frac{(j\omega C)^{-1}}{Z_1} \cdot \frac{1}{R(2 + j\omega RC) (j\omega C + Z_1^{-1}) + (1 + j\omega RC)} \\
 &= \frac{(j\omega C)^{-1}}{R(2 + j\omega RC)(1 + j\omega C Z_1) + (1 + j\omega RC) Z_1} \\
 &= \frac{(j\omega C)^{-1}}{(2 + j\omega RC)(R + j\omega RC (R + (j\omega C)^{-1})) + (1 + j\omega RC) (R + (j\omega C)^{-1})} \\
 &= \frac{1}{(2 + j\omega RC)(j\omega RC + j\omega RC(1 + j\omega RC)) + (1 + j\omega RC)^2} \\
 &= \frac{1}{(j\omega RC)^3 + 5(j\omega RC)^2 + 6j\omega RC + 1}.
 \end{aligned} \tag{11.235}$$

Prevajalna funkcija povratne vezave ima tri pole. Pripadajoč Bodejev diagram je na sliki 11.47 (levo). Pri  $\omega = 0$  je faza enaka  $0^\circ$ . Z večanjem frekvence se manjša in pri frekvenci nihanja oscilatorja doseže  $-180^\circ$ .



Slika 11.47: Bodejev diagram za ojačenje povratne vezave, ki ga podajata izraza (11.235) (levo) in (11.241) (desno).  $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $C = 1\mu\text{F}$ .

Barkhausenov pogoj se glasi

$$\frac{A_B}{(j\omega_B RC)^3 + 5(j\omega_B RC)^2 + 6j\omega_B RC + 1} = 1 \tag{11.236}$$

Iz imaginarnega dela pogoja

$$-(\omega_B RC)^3 + 6\omega_B RC = 0, \tag{11.237}$$

dobimo krožno frekvenco nihanja

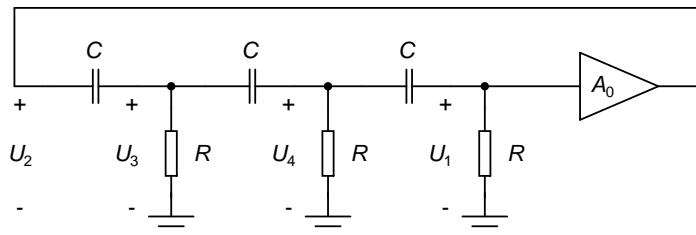
$$\omega_B = \frac{\sqrt{6}}{RC}. \tag{11.238}$$

Realni del Barkhausenovega pogoja se glasi

$$-5(\omega_B RC)^2 + 1 = A_B. \tag{11.239}$$

Če upoštevamo  $(\omega_B RC)^2 = 6$ , dobimo

$$A_B = -29. \quad (11.240)$$



Slika 11.48: Oscilator na osnovi pozitivnega faznega zasuka.

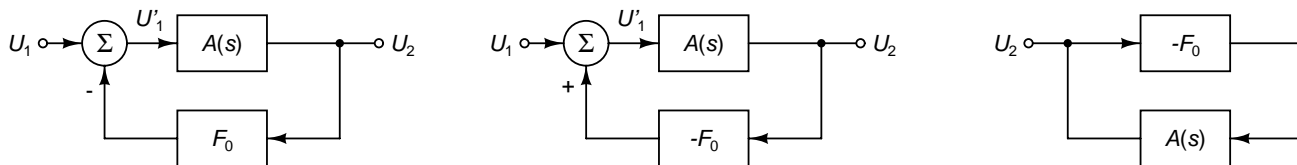
Če upor in kondenzator zamenjata vlogi, nastane vezje na sliki 11.48. Prevajalno funkcijo povratne vezave dobimo, če zamenjamo  $R, j\omega C$  in  $(j\omega RC)$  z  $(j\omega C)^{-1}, R^{-1}$  in  $(j\omega RC)^{-1}$ .

$$F(j\omega) = \frac{U_1}{U_2} = \frac{(j\omega RC)^3}{(j\omega RC)^3 + 6(j\omega RC)^2 + 5j\omega RC + 1}. \quad (11.241)$$

Bodejev diagram  $F(j\omega)$  je na sliki 11.47. Povratna vezava pri  $\omega = 0$  suka fazo za  $270^\circ$ . Z večanjem frekvence se fazni zasuk manjša in pri frekvenci nihanja doseže  $180^\circ$ . Iz Barkhausenovega pogoja  $A_B F(j\omega_B) = 1$  sledi

$$\omega_B = \frac{1}{RC\sqrt{6}}, \quad (11.242)$$

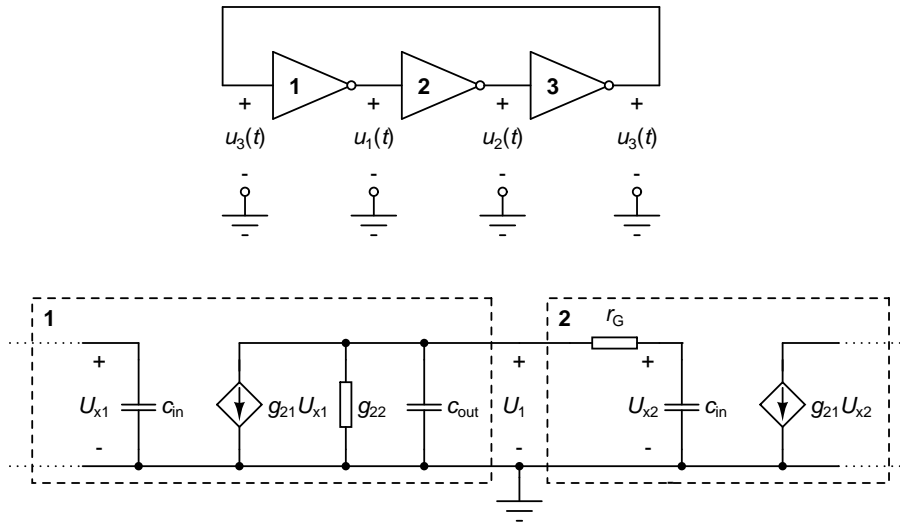
$$A_B = -29. \quad (11.243)$$



Slika 11.49: Ojačevalnik s frekvenčno neodvisno povratno vezavo  $F_0 > 0$  (levo). Če odštevanje nadomestimo s seštevanjem, se spremeni predznak pri  $F_0$  (na sredini). Ob odsotnosti vhodnega signala ( $U_1 = 0$ ) dobimo enako vezje, kot smo ga obravnavali pri vpeljavi Barkhausenovega pogoja v poglavju 11.4.1 (desno).

Prevajalna funkcija  $F(j\omega)$  na sliki 11.47 (levo) je enake oblike, kot prevajalna funkcija ojačevalnika z večimi negativnimi realnimi poli. Edina razlika je v absolutni vrednosti  $A(j\omega)$  pri dovolj nizkih frekvencah ( $\omega \approx 0$ ), ki je na sliki 11.47 (levo) enaka 0dB, medtem ko za ojačevalnik velja  $|A(j0)| \gg 1$ . Če takemu ojačevalniku dodamo frekvenčno neodvisno povratno vezavo z ojačenjem  $F_0$ , ki signal povratne vezave odšteva od vhodnega signala, dobimo sistem na sliki 11.49 (levo). S spremembo odštevanja v prištevanje in preureditvijo vezja dobimo ob odsotnosti vhodnega signala ( $U_1 = 0$ ) enako vezje, kot smo ga obravnavali pri vpeljavi Barkhausenovega pogoja (slika 11.49, desno).

Zaradi oblike prevajalne funkcije  $A(j\omega)$  je ojačevalnik s povratno vezavo pravzaprav oscilator na osnovi faznega zasuka, ki postane nestabilen (zaniha) pri dovolj veliki vrednosti  $F_0$ . Za ojačevalnike, katerih faza monotono upada, fazni razloček pa je večji od  $0^\circ$ , mora biti  $F_0 > 1$ , da postane zaprtizančen sistem nestabilen. Če je fazni razloček negativen, za nihanje zadostuje že dovolj velik  $F_0 \leq 1$ .



Slika 11.50: Sklenjena zanka s tremi inverterji (zgoraj) je pravzaprav oscilator na osnovi faznega zasuka. Iz nadomestnega vezja za majhne signale (spodaj) vidimo, da frekvenco nihanja določajo parazitni elementi inverterja.

Če vezemo tri CMOS inverterje v zanko, dobimo vezje na sliki 11.50 (zgoraj), ki ga v angleški literaturi srečamo pod imenom „**ring oscillator**“. Delovna točka takega vezja se nahaja pri  $U_{1Q} = U_{2Q} = U_{3Q}$ . Vsak od treh inverterjev prinese fazni zasuk za  $180^\circ$ , skupaj torej  $540^\circ$ , kar zaradi periodičnosti faze ustreza  $180^\circ$ . Že ta fazni zasuk nam da slutiti, da signali v vezju ne morejo mirovati, saj če je izhod tretjega inverterja na nizkem nivoju, je njegov vhod prav tako na nizkem nivoju, kar sili izhod nazaj v visok nivo.

Do frekvence nihanja se lahko dokopljemo, če upoštevamo parazitne elemente inverterja, ki smo jih spoznali v primeru 10.12. Če zanemarimo relativno majhno upornost priključka vrat ( $r_B$ ), vidimo, da izhod enega inverterja skupaj z vhodom naslednjega prispeva en negativen realen pol

$$p = -\frac{g_{22}}{c_{in} + c_{out}}. \quad (11.244)$$

Prevajalna funkcija od vhoda do izhoda enega inverterja je zaradi zanemaritve  $r_B$  (in posledično  $U_3 \approx U_{x1}$ ) enaka

$$H(s) = \frac{U_1}{U_3} = -\frac{g_{21}}{g_{22} + s(c_{in} + c_{out})}. \quad (11.245)$$

Ker so vsi trije inverterji enaki, je ojačenje odprte zanke enako zmnožku treh členov oblike (11.245).

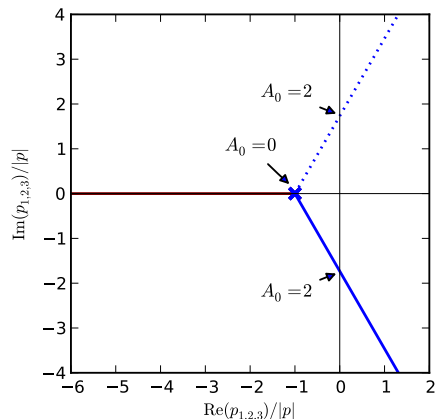
$$W(s) = -\frac{g_{21}^3}{(g_{22} + s(c_{in} + c_{out}))^3} = -\frac{A_0^3}{(1 - s/p)^3}. \quad (11.246)$$

Z  $A_0 = g_{21}/g_{22}$  smo označili absolutno vrednost napetostnega ojačenje neobremenjenega inverterja pri nizkih frekvencah v delovni točki vezja. Pole zaprtozančnega sistema določa enačba  $W(s) = 1$ .

$$(1 - s/p)^3 + A_0^3 = 0. \quad (11.247)$$

Če izraz na levi strani razstavimo, dobimo

$$\begin{aligned} (1 - s/p + A_0)((1 - s/p)^2 - A_0(1 - s/p) + A_0^2) &= 0, \\ (1 + A_0 - s/p)((s/p)^2 + (A_0 - 2)(s/p) + A_0^2 - A_0 + 1) &= 0. \end{aligned} \quad (11.248)$$



Slika 11.51: Diagram lege korenov za oscilator s tremi inverterji (levo).

En pol zaprtozančnega sistema leži na negativni realni osi.

$$p_1 = p(1 + A_0) = -\frac{(1 + A_0)g_{22}}{c_{in} + c_{out}} = -\frac{g_{21} + g_{22}}{c_{in} + c_{out}}. \quad (11.249)$$

Druga dva pola sta konjugirano kompleksna.

$$p_{2,3} = \frac{p}{2} \left( 2 - A_0 \pm j\sqrt{4(A_0^2 - A_0 + 1) - (A_0 - 2)^2} \right) = -\frac{p}{2} \left( A_0 - 2 \pm jA_0\sqrt{3} \right). \quad (11.250)$$

Barkhausenov pogoj je izpolnjen, ko pola padeta na imaginarno os. To se zgodi pri  $A_0 = A_B = 2$ . Tedaj je imaginarni del polov, ki predstavlja krožno frekvenco stabilnega nihanja, enak

$$\omega_B = |\text{Im}(p_{2,3})|_{A_0=2} = -p\sqrt{3} = \frac{g_{22}\sqrt{3}}{c_{in} + c_{out}}. \quad (11.251)$$

Pola  $p_{2,3}$  sta konjugirano kompleksna in ležita desno od imaginarne osi za vse vrednosti  $A_0 \geq 2$ . Za  $A_0 > 2$  prične amplituda nihanja naraščati ob vklopu napajanja. Iz (11.249) in (11.250) lahko narišemo diagram lege korenov z ojačenjem  $A_0$  kot parametrom (slika 11.51).

**Primer 11.19:** Za oscilator na sliki 11.50 (zgoraj) ocenimo frekvenco nihanja. Napajalna napetost znaša  $U_{dd} = 1,8\text{V}$ . Oba tranzistorja v inverterju imata enake parametre v delovni točki  $U_{1Q} = U_{2Q} = U_{3Q} = 0,9\text{V}$ . Podrobnosti so opisane v primeru 10.12. Parametri modela tranzistorja za majhne signale so v delovni točki enaki  $g_{21p} = g_{21n} = 72,3\mu\text{S}$ ,  $g_{22p} = g_{22n} = 4,81\mu\text{S}$ ,  $c_{gsp} = c_{gsn} = 4,47\text{fF}$ ,  $c_{gdp} = c_{gdn} = 0,875\text{fF}$ ,  $c_{dsp} = c_{dsn} = 2,45\text{fF}$  in  $r_{Gp} = r_{Gn} = 0\Omega$ .

Admitančna parametra inverterja sta enaka

$$g_{21} = 2g_{21p} = 145\mu\text{S}, \quad (11.252)$$

$$g_{22} = 2g_{22p} = 9,63\mu\text{S}. \quad (11.253)$$

Ojačenje v delovni točki je pri nizkih frekvencah

$$-A_0 = \frac{g_{21}}{g_{22}} = \frac{2g_{21p}}{2g_{22p}} = 15,0. \quad (11.254)$$

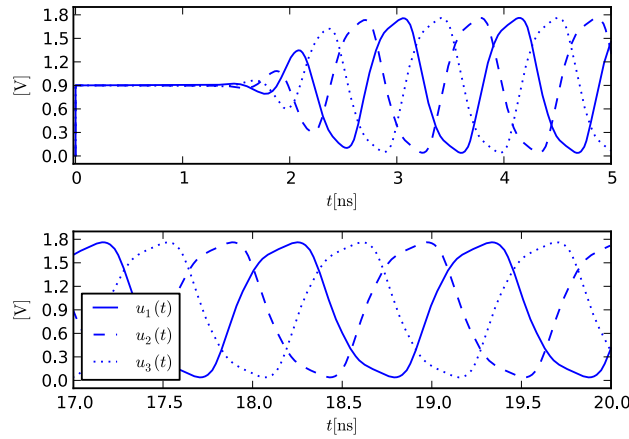
Ker pričakujemo, da bodo izhodi vseh treh inverterjev nihali z enako amplitudo in faznim zamikom  $-2\pi/3$  med zaporednima inverterjema, lahko predpostavimo, da je napetostno ojačenje obremenjenega inverterja (razmerje  $U_2/U_1$  v enačbah Millerjeve preslikave), enako  $e^{-j2\pi/3}$ . Pri kompleksnem razmerju  $U_2/U_1$  se kapacitivnost preslika v vzporedno vezavo kapacitivnosti in frekvenčno odvisne prevodnosti. Admitanca  $j\omega c_{gd}$  se tako preslika na vhodno stran v  $Y_1$  in na izhodno stran v  $Y_2$ . S pomočjo enačb (10.155) in (10.156) dobimo za PMOS tranzistor v inverterju

$$Y_1 = \left(1 - \frac{U_2}{U_1}\right) j\omega c_{gd} = \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) j\omega c_{gd} = \frac{3}{2} j\omega c_{gd} + \frac{\sqrt{3}}{2} \omega c_{gd}, \quad (11.255)$$

$$Y_2 = \left(1 - \frac{U_1}{U_2}\right) j\omega c_{gd} = \left(1 - e^{j\frac{2\pi}{3}}\right) j\omega c_{gd} = \frac{3}{2} j\omega c_{gd} - \frac{\sqrt{3}}{2} \omega c_{gd}. \quad (11.256)$$

Ker so vsi inverterji enaki, vhod inverterja pa je zmeraj vezan na izhod naslednjega inverterja, se admitanci  $Y_1$  in  $Y_2$  vežeta vzporedno v admitanco

$$Y = Y_1 + Y_2 = 3j\omega c_{gd}. \quad (11.257)$$



Slika 11.52: Odziv oscilatorja s tremi inverterji ob vklopu napajanja (zgoraj) in v ustaljenem stanju (spodaj).

Admitanca  $Y$  ustreza kapacitivnosti  $3c_{gd}$ . Sedaj lahko izrazimo vsoto kapacitivnosti med stičiščem dveh inverterjev in maso.

$$c_{in} + c_{out} = 2(c_{dsp} + 3c_{gd} + c_{gsp}) = 19.1\text{fF}. \quad (11.258)$$

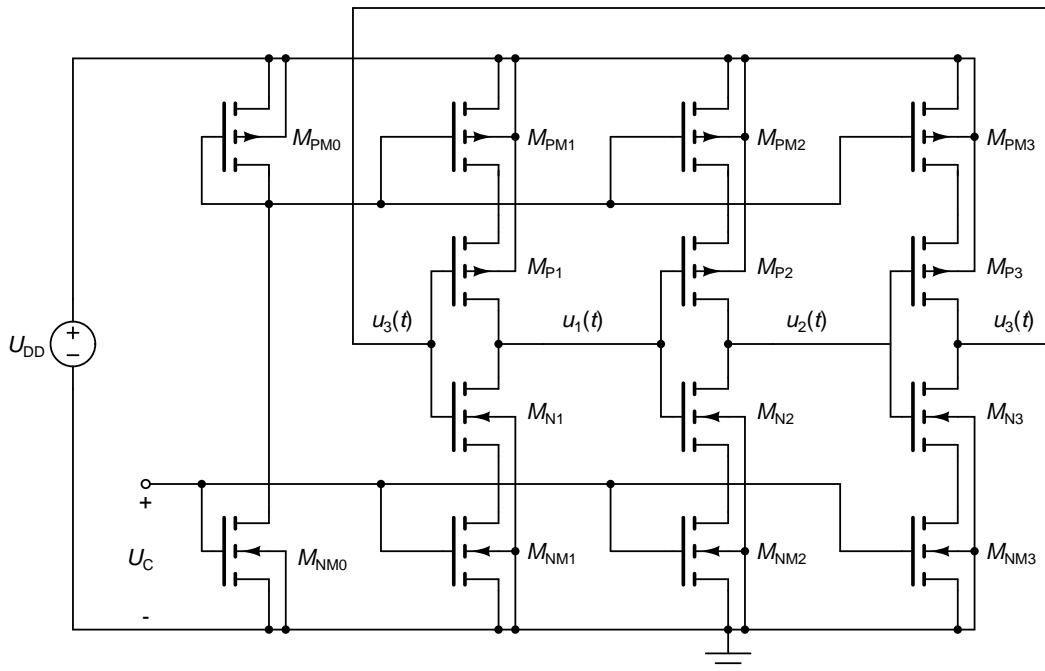
Faktor 2 dobimo, ker kapacitivnosti pripevata tako PMOS, kot tudi NMOS tranzistor v inverterju. Ker je ojačenje  $A_0$  mnogo večje od 2, zaideta pola  $p_{2,3}$  daleč na desno stran imaginarne osi. Nihanje je eksponentno naraščujoče, dokler ga ne ustavijo nelinearnosti inverterja (inverter zaide v nasičenje). Krožno frekvenco nihanja določa imaginarni del polov.

$$|\text{Im}(p_{2,3})| = \frac{A_0\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{g_{22}}{2(c_{dsp} + 3c_{gd} + c_{gsp})} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{g_{21}}{2(c_{dsp} + 3c_{gd} + c_{gsp})} \quad (11.259)$$

Pri tem smo  $c_{in} + c_{out}$  v izrazu (11.244) nadomestili z (11.258). Ker nihanje ni sinusno, diferencialne prevodnosti in kapacitivnosti pa se spreminjajo v odvisnosti od delovne točke, lahko frekvenco nihanja določimo le približno.

$$f \approx \frac{|\text{Im}(p_{2,3})|}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \cdot \frac{g_{21}}{c_{dsp} + 3c_{gd} + c_{gsp}} = 1,04\text{GHz}. \quad (11.260)$$

Dejanska frekvenca nihanja, ki jo dobimo iz rezultatov simulacije (slika 11.52), znaša 0,922GHz. Simulacija tudi potrди predpostavko, da izhodi vseh treh inverterjev nihajo z enako amplitudo in medsebojnim faznim zamikom  $-2\pi/3$ .  $\triangle$



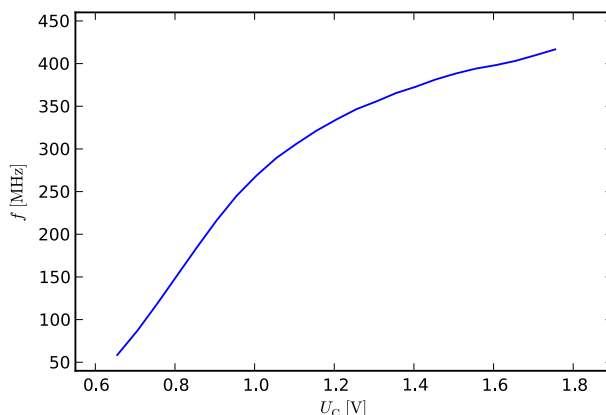
Slika 11.53: Napetostno krmiljen oscilator (VCO) v CMOS tehnologiji.

Iz diagrama lege korenov na sliki 11.51 in izraza (11.250) vidimo, da je krožna frekvenca nihanja (imaginarni del polov zaprtzoančnega sistema) premo sorazmerna z ojačenjem  $A_0$ . Frekvenca nihanja takega oscilatorja je torej močno odvisna od ojačenja inverterjev. Ker poleg tega frekvenco nihanja določajo tudi parazitne kapacitvnosti tranzistorjev, tak oscilator ni najbolj uporaben za generiranje signala izbrane frekvence. Lahko pa ga z manjšo spremembo predelamo tako, da postane frekvenca nihanja odvisna od neke krmilne napetosti. S tem dobimo **napetostno krmiljen oscilator** (ang. **voltage controlled oscillator, VCO**), ki ga prikazuje slika 11.53. Take oscilatorje uporabljamo kot gradnike fazno sklenjenih zank (ang. **phase locked loop, PLL**), ki so namenjene generiranju racionalnih večkratnikov referenčne frekvence (večkratniki oblike  $m/n$ , kjer sta  $m$  in  $n$  pozitivni celi števili).

V tranzistorjih  $M_{N1}-M_{N3}$  in  $M_{P1}-M_{P3}$  prepoznamo oscilator. Tokove NMOS tranzistorjev v inverterjih omejujejo tranzistorji  $M_{NM1}-M_{NM3}$ , ki so vezani kot tokovna zrcala. Njihove tokove določamo z napetostjo  $U_C$ . Tranzistor  $M_{NM0}$  požene nastavljen tok skozi  $M_{PM0}$ , ki služi vzpostavitvi krmilne napetosti za tokovna zrcala ( $M_{PM1}-M_{PM3}$ ) na strani PMOS tranzistorjev v inverterjih.

Substrati vseh NMOS tranzistorjev so vezani na najnižji potencial v vezju in ne na izvor. To je v integriranih vezjih običajno, saj so vsi tranzistorji izvedeni v skupnem substratu. S tako priključitvijo substrata so vsi p-n spoji med izvorom, ponorom in substratom zaporno polarizirani, tranzistorji pa izolirani drug od drugega. Podobno naredimo tudi s substrati PMOS tranzistorjev, le da morajo biti ti priključeni na najvišji potencial v vezju.

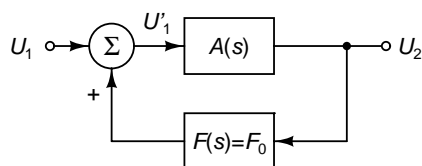
Zaradi opisane vezave substratov je natančna analiza vezja bolj zapletena, saj napetosti  $U_{BS}$  niso enake nič in zato vplivajo na pragovno napetost tranzistorjev. Simulacija vezja razkrije, da se frekvenca nihanja spreminja v širokem območju, ko spreminjamo krmilno napetost  $U_C$  (slika 11.54).



Slika 11.54: Odvisnost frekvence nihanja od krmilne napetosti za oscilator na sliki 11.53. Vsi tranzistorji v vezju imajo enake parametre, ki so podani v primeru 10.12.

## 11.5 Ojačevalniki s pozitivno povratno vezavo

Ojačevalniku, ki ima v srednjefrekvenčnem območju pozitivno ojačenje, dodamo frekvenčno neodvisno pozitivno povratno vezavo tako, da signal povratne vezave z ojačenjem  $F_0 > 0$  prištevamo k vhodnemu signalu. Zaprtizančen sistem prikazuje slika 11.55.



Slika 11.55: Ojačevalnik s frekvenčno neodvisno pozitivno povratno vezavo  $F_0$ .

Če je ojačenje ojačevalnika v srednjefrekvenčnem območju enako  $A_0$ , je povratna vezava pozitivna, če velja

$$W_0 = A_0 F_0 > 0. \quad (11.261)$$

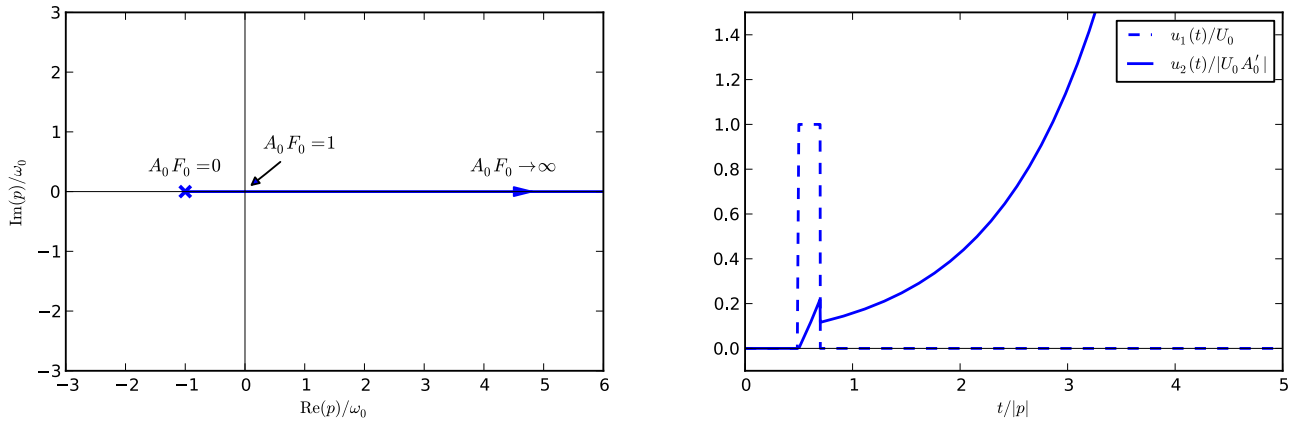
To pomeni, da morata imeti  $A_0$  in  $F_0$  enak predznak. Tak zaprtizančen sistem postane hitro nestabilen. Recimo, da imamo ojačevalnik z enim realnim negativnim polom  $p = -\omega_0$ .

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + s/\omega_0}. \quad (11.262)$$

Pole zaprtizančnega sistema določa enačba  $A(s)F(s) = 1$ . Dobimo en realen pol pri

$$p = \omega_0(A_0 F_0 - 1). \quad (11.263)$$

Diagram lege korenov prikazuje slika 11.56 (levo). Vidimo, da pol zapusti levo stran imaginarne pri  $A_0 F_0 \geq 1$ . Pri dovolj velikem ojačenju ojačevalnika in/ali povratne vezave postane zaprtizančen sistem nestabilen. Tedaj se na majhne motnje v vhodni napetosti  $u_1(t)$  odziva z eksponentnim časovnim potekom  $u_2(t)$  (slika 11.56, desno). Majhna pozitivna motnja  $u_1(t)$ , zaradi katere za kratek čas velja  $u_2 > 0$ , povzroči eksponentno naraščanje  $u_2(t)$ . Podobno majhna negativna motnja  $u_1(t)$  povzroči eksponentno upadanje  $u_2(t)$ . Ojačevalnik z dvema realnima



Slika 11.56: Diagram lege korenov (levo) in odziv na pulz  $u_1(t)$  višine  $U_0$  (desno) za ojačevalnik z enim polom in pozitivno povratno vezavo  $A_0 F_0 > 1$ . Ojačenje v srednjefrekvenčnem območju znaša  $A'_0 = A_0 / (1 - A_0 F_0)$ .

poloma s prevajalno funkcijo

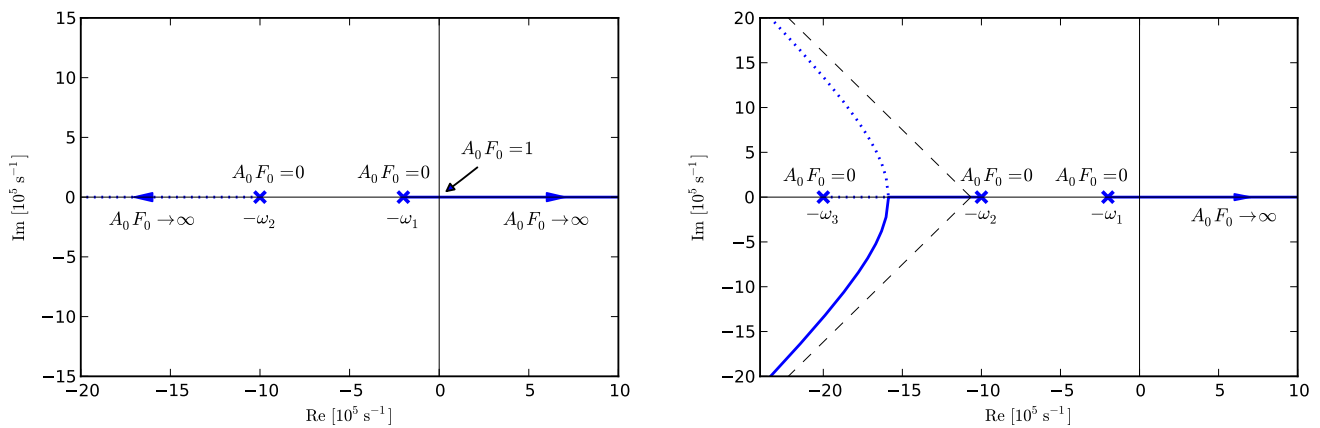
$$A(s) = \frac{A_0}{(1 + s/\omega_1)(1 + s/\omega_2)} \tag{11.264}$$

se obnaša podobno. Ko preoblikujemo enačbo  $A(s)F(s) = 1$ , dobimo

$$s^2 + (\omega_1 + \omega_2)s + (1 - A_0 F_0)\omega_1 \omega_2 = 0. \tag{11.265}$$

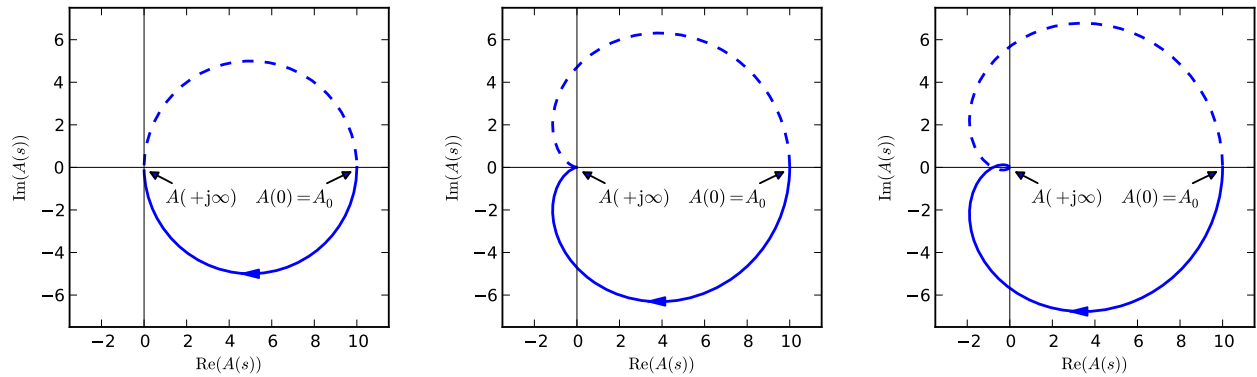
Pola zaprtzančnega sistema sta

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2 + A_0 F_0 \omega_1 \omega_2}. \tag{11.266}$$



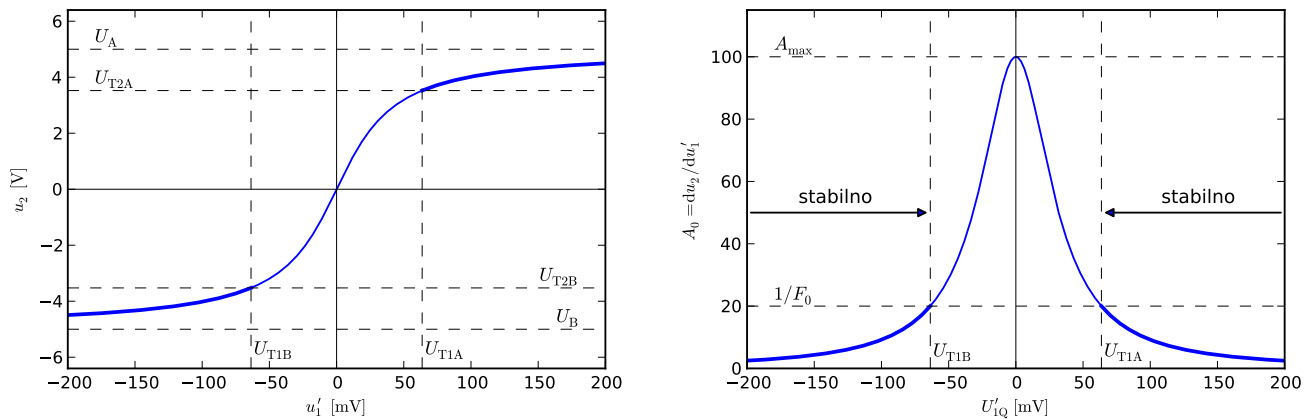
Slika 11.57: Diagram lege korenov za ojačevalnik z dvema (levo) in tremi (desno) realnimi poli. Asimptote, ki se jim približujejo poli zaprtzančnega sistema pri  $A_0 F_0 \rightarrow \infty$  so narisane s črtkano črto.





Slika 11.58: Nyquistov diagram ojačenja  $A(s)$  za ojačevalnik z enim (levo), dvema (na sredini) in tremi (desno) realnimi poli. Ojačenje pri nizkih frekvencah je  $A_0 = 10$ .

Za  $A_0F_0 \geq 1$  zaprtzančen sistem ni stabilen ( $\Re\{p_{1,2}\} \geq 0$ ). Ne glede na vrednost  $A_0F_0$  ostajata oba pola na realni osi. Diagram lege korenov za ojačevalnik z dvema poloma je prikazan na sliki 11.57 (levo). Šele pri ojačevalniku s tremi realnimi poli ( $-\omega_1, -\omega_2$  in  $-\omega_3$ ) se zgodi, da ob zadostnem  $A_0F_0$  en par polov zapusti realno os. Pri risanju diagrama lege korenov (slika 11.57, desno) lahko uporabimo rezultate, ki smo jih dobili v primeru 11.4. Le  $F_0$  moramo zamenjati z  $-F_0$  saj imamo sedaj opravka s pozitivno povratno vezavo. Pola pri  $-\omega_2$  in  $-\omega_3$  se z večanjem  $A_0F_0$  približujeta eden drugemu, dokler se ne zlijeta v en dvojni pol. Pri nadaljnjem večanju postaneta konjugirano kompleksna in se pričneta približevati asimptotama. Pri dovolj velikem  $A_0F_0$  se oddaljita od imaginarne osi do te mere, da postaneta nepomembna za odziv vezja. Dominanten pol  $-\omega_1$  se z večanjem  $A_0F_0$  pomika proti desni. Pri  $A_0F_0 \geq 1$  pol prestopi na desno stran imaginarne osi in zaprtzančen sistem postane nestabilen.



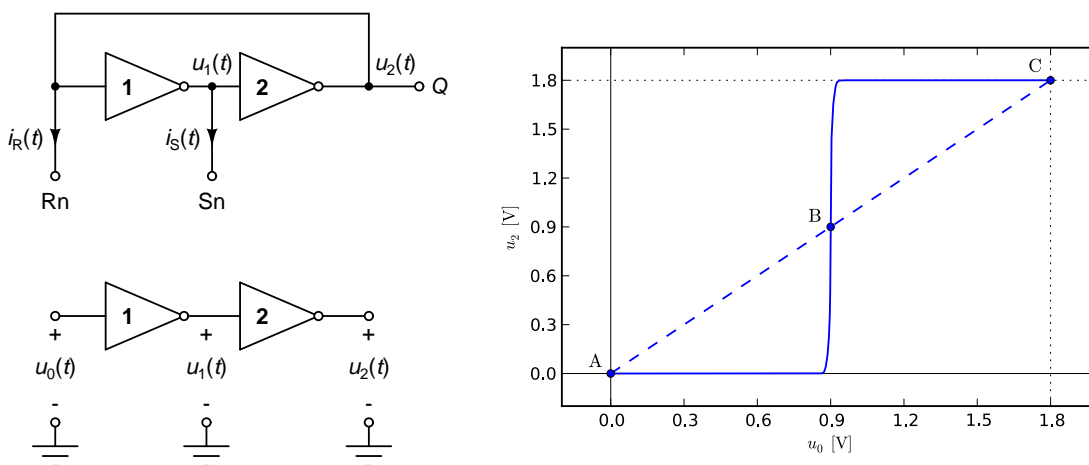
Slika 11.59: Karakteristika  $u_2(u'_1)$  nelinearnega ojačevalnika (levo) in diferencialno ojačenje  $A_0 = du_2/du'_1$  v odvisnosti od delovne točke  $u'_1 = U'_{1Q}$  (desno). V območju, ki ustreza stabilnemu zaprtzančenemu sistemu z ojačenjem povratne vezave  $F_0$ , sta krivulji narisani z odebeljeno črto.

Pogoj  $A_0F_0 \geq 1$ , ki mora biti izpolnjen, da zaprtzančen sistem ni stabilen, postane bolj razumljiv, če ojačenje  $A(s)$  narišemo v Nyquistovem diagramu (slika 11.58). Kompleksni frekvenci  $s = 0$  ustreza skrajna desna točka krivulje, ki leži na realni osi pri  $A_0$ . Ker je ojačenje povratne vezave frekvenčno neodvisno ( $F(s) = F_0$ ), dobimo odprtozančno ojačenje  $W(s) = A(s)F(s)$  z raztegom Nyquistove krivulje  $A(s)$  za faktor  $F_0$ . Signal povratne vezave prištevamo k vhodnemu signalu, kar pomeni, da je zaprtzančen sistem stabilen, če Nyquistova krivulja

ne obkroži točke 1 v smeri urinega kazalca. Če točka  $W(0)$  sovпада s točko 1 ali leži desno od nje, je pogoj  $W(0) = A_0 F_0 \geq 1$  izpolnjen, zaprtozaničen sistem pa ni stabilen.

Če namesto linearnega ojačevalnika uporabimo nelinearen ojačevalnik, ki se mu ojačenje spreminja v odvisnosti od delovne točke, vezje ni zmeraj nestabilno. Slika 11.59 (levo) prikazuje odvisnost izhodne napetosti ( $u_2$ ) od vhodne napetosti ( $u_1'$ ) za nelinearen ojačevalnik pri nizkih frekvencah. Karakteristika ima nasičenje pri izhodni napetosti  $U_A > 0$  oziroma  $U_B < 0$ . Strmina karakteristike je največja pri  $u_1' = 0$  in znaša  $A_{\max}$ . Pri večjih ali manjših vrednostih vhodnega signala se strmina karakteristike manjša in gre proti 0, ko se  $u_2$  bliža napetosti nasičenja.

Strmina karakteristike je pravzaprav diferencialno ojačenje ojačevalnika ( $A_0 = du_2/du_1'$ ) za majhne odmike od delovne točke  $u_1' = U_{1Q}$ . Odvisnost strmine karakteristike od  $U_{1Q}$  je prikazana na sliki 11.59 (desno). Za vrednosti vhodnega signala, ki ležijo med  $U_{T1B} < 0$  in  $U_{T1A} > 0$  je strmina karakteristike večja od  $1/F_0$ , kar pomeni, da je  $A_0 F_0$  večji od 1, zaprtozaničen sistem pa nestabilen. Izven tega območja je  $A_0 F_0 < 1$ , zaprtozaničen sistem pa stabilen. Vidimo, da je stabilnost linearizirane vezja odvisna od izbire delovne točke ojačevalnika.



Slika 11.60: Zanka z dvema CMOS inverterjema (levo zgoraj) in razklenjena zanka (levo spodaj). Odvisnost  $u_2(u_0)$  (polna črta) za razklenjeno zanko (desno). V točkah A, B in C velja  $u_2 = u_0$  (črtkana črta).

**Primer 11.20:** Za zanko, ki jo tvorita dva CMOS inverterja (slika 11.60, levo zgoraj), določimo rešitve vezjaza enosmerne razmere.

Dva zaporedno vezana CMOS inverterja (slika 11.60, levo spodaj) imata karakteristiko  $u_2(u_0)$ , ki je podobna karakteristiki operacijskega ojačevalnika, le da je premaknjena navzgor in v desno (slika 11.60, desno, polna črta). Če inverterja vežemo v zanko, s tem vzpostavimo zahtevo  $u_0 = u_2$ , ki jo na sliki 11.60 (desno) ponazorimo s črtkano črto. Presečišča črtkane črte s karakteristiko  $u_2(u_0)$  (točke A, B in C na sliki 11.60, desno) predstavljajo takoimenovana **ravnotežna stanja**. V ravnotežnem stanju so enačbe vezja izpolnjene za enosmerne razmere. Nelinearna vezja imajo v splošnem več ravnotežnih stanj.

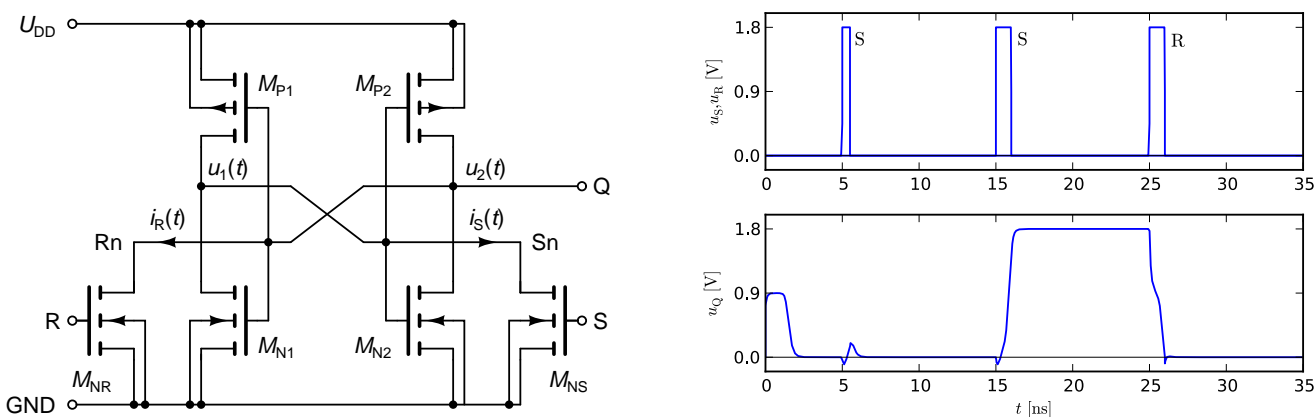
Vidimo, da se inverterja v zanki medsebojno podpirata v ravnotežnih stanjih A in C, saj nizek (visok) napetostni nivo na vhodu prvega inverterja vodi v visok (nizek) napetostni nivo na vhodu drugega inverterja, kar spet sili vhod prvega inverterja v nizek (visok) napetostni nivo. ravnotežno stanje B ustreza rešitvi, ki jo dobimo, če zahtevamo  $u_0 = u_1 = u_2$ .

Vsako ravnotežno stanje lahko obravnavamo kot delovno točko in v njegovi okolici vezje lineariziramo. Ojačenje zaporedne vezave dveh inverterjev je v točkah A in C majhno (mnogo manjše od 1). Ker je ojačenje povratne vezave  $F_0 = 1$ , velja  $A_0 F_0 < 1$ . Prehodni pojavi v okolici točk A in C so eksponentno upadajoči in sčasoma izzvenijo. Zaradi „medsebojne podpore“ inverterjev ostaja zanka v teh dveh stanjih, dokler je ne zmotimo z dovolj

veliko motnjo.

V točki B je ojačenje mnogo večje od 1. Zaradi  $A_0F_0 > 1$  so prehodni pojavi v njeni okolici eksponentno naraščajoči. Vsaka še tako majhna motnja vezje privede iz ravnotežnega stanja. Opisano vezje tako prej ali slej konča bodisi v stanju A ali pa v stanju C. Stanje vezja lahko spreminjamo s pomočjo dovolj visokih in širokih pozitivnih tokovnih pulzov  $i_R(t)$  oziroma  $i_S(t)$ . Pulz  $i_R(t) > 0$  odstrani pozitiven naboj iz vrat NMOS tranzistorja prvega inverterja in napolni vrata PMOS tranzistorja z negativnim nabojem. NMOS tranzistor se zato zapre, PMOS tranzistor pa odpre, kar pelje izhod prvega inverterja proti visokemu, izhod drugega inverterja (Q) pa proti nizkemu napetostnemu nivoju. Podobno tokovni pulz  $i_S(t) > 0$  spravi izhod Q na visok napetostni nivo.

Stanje vezja lahko spreminjamo s pomočjo dovolj visokih in širokih pozitivnih tokovnih pulzov  $i_R(t)$  oziroma  $i_S(t)$ . Pulz  $i_R(t) > 0$  odstrani pozitiven naboj iz vrat NMOS tranzistorja prvega inverterja in napolni vrata PMOS tranzistorja z negativnim nabojem. NMOS tranzistor se zato zapre, PMOS tranzistor pa odpre, kar pelje izhod prvega inverterja proti visokemu, izhod drugega inverterja (Q) pa proti nizkemu napetostnemu nivoju. Podobno tokovni pulz  $i_S(t) > 0$  spravi izhod Q na visok napetostni nivo.



Slika 11.61: Celica SRAM pomnilnika v CMOS tehnologiji (levo) in njen odziv na napetostne pulze na vhodih S in R (desno).

Opisano vezje lahko služi kot pomnilniška celica (slika 11.61, levo), ki hrani en bit informacije, dokler je prisotno napajanje (statičen RAM pomnilnik, SRAM). Tokovna pulza generiramo s tranzistorjema  $M_{NR}$  in  $M_{NS}$ , ki ju krmilita signala R in S. Dokler sta R in S na nizkem nivoju, sta oba krmilna tokova enaka 0 in celica hrani podatek. Pozitiven napetostni pulz na vhodu R odpre tranzistor  $M_{NR}$ , kar povzroči tokovni pulz  $i_R(t)$ , ki spravi izhod Q na nizek napetostni nivo. Podobno s pozitivnim napetostnim pulzom na vhodu S povzročimo tokovni pulz  $i_S(t)$ , izhod Q pa preide na visok napetostni nivo.

Slika 11.61 (desno) prikazuje odziv celice SRAM pomnilnika na napetostne pulze R in S. Ob vklopu napajalne napetosti  $U_{DD} = 1,8V$  se celica za kratek čas postavi v ravnotežno stanje B ( $u_Q = 0,9V$ ) od koder zaradi motenj (šuma) preide v stanje  $u_Q = 0V$  (na sliki) ali  $u_Q = 1,8V$ . Preozek pulz na vhodu S oziroma R ne povzroči preklopa v želeno stanje (prvi pulz na sliki). Za preklop je potreben dovolj širok pulz (druga dva pulza na sliki).

Podrobnejša obravnava vezja je izven domene linearne elektronike. Ta nam lahko v najboljšem primeru (če linearizirano vezje analiziramo v časovnem prstoru in upoštevamo tudi prehodni pojav) pove kaj o obnašanju vezja v okolici ravnotežnih stanj. Če se pri analizi omejimo zgolj na odziv na majhno sinusno vzbujanje, opisanega vezja v večini primerov ne moremo zadovoljivo analizirati, še posebej ne v okolici točke B, kjer so prehodni pojavi eksponentno naraščajoči.  $\triangle$



# Literatura

- [1] M. Vehovec: *Linearna elektronika*, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, 1989.
- [2] B. Zajc: *Linearna elektronika*, Elektrotehniški vestnik, 1996.
- [3] N. Morrison: *Introduction to Fourier analysis*, John Wiley & Sons, 1994.
- [4] A. R. Newton, D. O. Pederson, A. Sangiovanni-Vincentelli: *SPICE3 Version 3f3 User's Manual*, Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California, Berkeley, 1993.
- [5] S. J. Mason: *Power gain in feedback amplifiers*, Transactions of the IRE Professional Group on Circuit Theory, vol. 1, pp. 20-25, 1954.
- [6] F. B. Llewellyn: *Some fundamental properties of transmission systems*, Proceedings of the IRE, vol. 40, pp. 271-283, 1952.
- [7] G. Strang: *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley, 2009.
- [8] G. Massobrio, P. Antognetti: *Semiconductor Device Modeling with SPICE*, McGraw-Hill, 1998.
- [9] J. J. Ebers, J. L. Moll, *Large signal behavior of junction transistors*, Proc. IRE, vol. 42, pp. 1761-1772, 1954.
- [10] H. K. Gummel, H. C. Poon, *An integral charge control model of bipolar transistors*, Bell Syst. Tech. J., vol. 49, pp. 827-852, 1970.
- [11] H. Shichman, D. Hodges: *Modeling and simulation of insulated-gate field-effect transistor switching circuits*, IEEE J. Solid-State Circuits, vol. SC-3, pp. 285-289, 1968.
- [12] J. A. Meyer: *MOS models and circuit simulation*, RCA Review, vol. 32, pp. 42-63, 1971.
- [13] D. E. Ward, R. W. Dutton: *A charge-oriented model for MOS transistor capacitances*, IEEE Journal of Solid State Circuits, vol. SC-13, pp. 703-708, 1978.
- [14] K. A. Sakallah, Y. Yen, S. S. Greenberg: *A first-order charge conserving MOS capacitance model*, IEEE Transactions on Computer-Aided Design, vol. 9, pp. 99-108, 1990.
- [15] R. J. Baker: *CMOS Circuit Design, Layout, and Simulation*, John Wiley & Sons, 2007.
- [16] S. Darlington: *Semiconductor signal translating device*, U.S. Patent 2663806, 1952.
- [17] R. W. Hickman, F. V. Hunt: *On Electronic Voltage Stabilizers*, Review of Scientific Instruments, vol. 10, pp. 6-21 1939.
- [18] L. Gyergyek: *Teorija vezij in sistemov*, Fakulteta za elektrotehniko, 1985.
- [19] J. L. Schiff: *The Laplace transform: theory and applications*, Springer, 2000.

- 
- [20] M. S. Gupta: *Power gain in feedback amplifiers, a classic revisited*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 40, pp. 864-879, 1992.
- [21] D. M. Pozar: *Microwave Engineering*, John Wiley & Sons, 1998.
- [22] W. L. Brogan: *Modern control theory*, Prentice Hall, 1991.
- [23] T. Needham: *Visual complex analysis*, Oxford University Press, 1999.
- [24] H. Nyquist, *Regeneration theory*, Bell System Technical Journal, vol. 11, pp. 126-147, 1932.
- [25] H. Barkhausen, *Elektronen-Röhren*, Verlag von S. Hirzel, 1937.