

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Visokošolski študij

15. november 2005

1. [15T] Reši neenačbo in rešitev zapiši kot interval oziroma unijo intervalov:

$$|2x - 1| - x < 0.$$

Rešitev:

Oglejmo si najprej, kdaj je pod absolutno vrednostjo nenegativni in kdaj negativno število.

Prvi primer je, ko je argument absolutne vrednosti nenegativno število.
Torej, ko je

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\geq 0 \\ x &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Rešitev se sedaj glasi:

$$\begin{aligned} 2x - 1 - x &< 0 \\ x - 1 &< 0 \\ x &< 1 \end{aligned}$$

Za rešitev dobimo interval $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

Drugi primer je, ko je argument absolutne vrednosti negativno število.
Torej, ko je

$$\begin{aligned} 2x - 1 &< 0 \\ x &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Rešitev se sedaj glasi:

$$\begin{aligned} -2x + 1 - x &< 0 \\ -3x + 1 &< 0 \\ x &> \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Za rešitev dobimo interval $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Skupna rešitev prvotne neenačbe je unija rešitev obeh primerov, torej interval

$$\left(\frac{1}{3}, 1\right).$$

2. [15T] Poišči vse rešitve enačbe:

$$z^3 = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

Rešitev:

Enačbo

$$z^3 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

zapišemo v polarni obliki. Kompleksno število v polarni obliki zapišemo kot

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Leva stran se tako glasi:

$$z^3 = |z|^3(\cos 3\phi + i \sin 3\phi).$$

Sedaj je potrebno v polarni obliki zapisati še število $-2 + 2i\sqrt{3}$.

Izračunamo oba argumenta, to je oddaljenost od izhodišča in kot.

$$\begin{aligned} r &= 4 \\ \alpha &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Sledi:

$$-2 + 2i\sqrt{3} = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Dobimo enačbo:

$$|z|^3(\cos 3\phi + i \sin 3\phi) = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enaka polmera in enaka kosinusa kotov. Dobimo dve enačbi, in sicer:

$$|z|^3 = 4 \quad \text{in} \quad \cos(3\phi) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Rešitev prve enačbe je

$$|z| = \sqrt[3]{4},$$

za rešitev druge pa se spomnimo, kdaj sta dva kosinusa enaka. To je tedaj, ko se argumenta razlikujeta za večkratnik periode, to je za $k \cdot 2\pi$. Dobimo:

$$\begin{aligned} 3\phi &= \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z}, \\ \phi_k &= \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zanimajo nas trije koti, in sicer:

$$\phi_0 = \frac{2\pi}{9}, \quad \phi_1 = \frac{8\pi}{9}, \quad \phi_2 = \frac{14\pi}{9}.$$

Rešitev zapišemo v obliki:

$$z_k = |z|(\cos \phi_k + i \sin \phi_k).$$

Enačba ima tedaj tri rešitve:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9} \right), \\ z_1 &= \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9} \right), \\ z_2 &= \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{14\pi}{9} + i \sin \frac{14\pi}{9} \right). \end{aligned}$$

3. [10T] Izračunaj limito zaporedja, podanega s splošnim členom

$$a_n = \frac{7n^3 + 2n^2 + n - 1}{2n^3 - n}.$$

Rešitev:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 2n^2 + n - 1}{2n^3 - n} = \frac{7}{2}$$

Ulomek smo zgoraj in spodaj delili z največjo potenco, to je z n^3 . Vsi ostali členi gredo proti 0.

4. [10T] Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$$

konvergentna? Odgovor utemelji. **Rešitev:**

Za dokaz konvergencije vrste bomo uporabili kvocientni kriterij. V ta namen izračunajmo q .

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n!}{(n+1)! \cdot n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ker je $q < 1$, je vrsta konvergentna.