KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Visokošolski študij

9. januar 2006

1. [20T] Izračunaj vrednost izraza:

$$z = i^{15} + \frac{2}{i-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{21}.$$

Rešitev:
Velja: $i^{15} = -i$ in $\frac{2}{i-1} = \frac{2(-1-i)}{2} = -1 - i$.
Da izračunamo izraz $\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{21}$ je potrebno število $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ zapisati v polarni obliki in nato uporabiti DeMoivreovo formulo:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Ker je $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ in $\varphi = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ (ker je število v prvem kvadrantu), velja

$$\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Uporabimo DeMoivreovo formulo, in dobimo:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{21} = \cos\frac{21\pi}{3} + i\sin\frac{21\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Torej je:

$$z = i^{15} + \frac{2}{i-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{21} = -i - 1 - i - 1 = -2 - 2i.$$

2. [20T] Izračunaj ničle, pole, asimptoto in ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 2}$$

ter nato še nariši graf funkcije.
Rešitev:
Ker je $x^2 + x = x(x + 1)$, dobimo dve ničli: $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$. Pol je v točki $x = -2$. Ker je stopnja polinoma v števcu za 1 večja kot stopnja polinoma v imenovalcu, dobimo poševno asimptoto, in sicer $y = x - 3$ (delimo polinome, ostanek pri deljenju je 6). Sedaj izračunajmo še ekstreme. Za to potrebujemo prvi odvod funkcije $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)(x + 2) - (x^2 - x) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x - 2}{(x + 2)^2}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer je prvi odvod enak nič, torej v točkah:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

Vrednost funkcije v točki x_1 je $f(-2 + \sqrt{6}) = 2\sqrt{6} - 5$, v tocki x_2 pa je $f(-2 - \sqrt{6}) = -2\sqrt{6} - 5$. V točki x_1 imamo lokalni minimum, v točki x_2 pa lokalni maksimum.

3. [20T] Izračunaj limito

$$\lim_{x \to \pi} \frac{1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{(x - \pi)^2}.$$

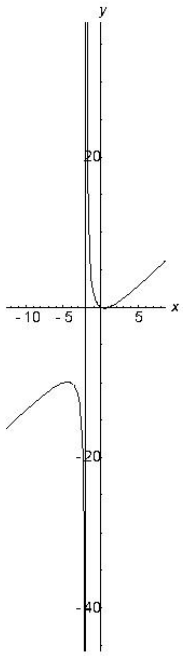
Namig: pomagaj si z L'Hospitalovim pravilom.
Rešitev:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pi} \frac{1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{(x - \pi)^2} &= \lim_{x \to \pi} \frac{-2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2\,(x - \pi)} \\ &= \lim_{x \to \pi} \frac{-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

L'Hospitalovo pravilo smo uporabili dvakrat.

4. [20T] Izračunaj integral

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx.$$



Slika 1: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$.

Rešitev:
Integral rešimo s pomočjo uvedbe nove spremenljivke: $t = e^x$, $dt = e^x dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx &= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \arcsin t = \arcsin e^x + C \end{aligned}$$

5. [20T] Izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo, če graf funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{4x+3}{x(x+3)}}$ zarotiramo na intervalu $1 < x < 5$ okrog osi x.
Rešitev:
Volumen rotacijskega telesa izračunamo s pomočjo formule:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

V našem primeru ($a = 1$, $b = 5$) dobimo:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^5 \left(\sqrt{\frac{4x+3}{x(x+3)}} \right)^2 dx \\
&= \pi \int_1^5 \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x+3} \right) dx \\
&= \pi \left(\log|x| + 3\log|x+3| \right) \Big|_1^5 \\
&= \pi \left(\log 5 - \log 1 + 3\log 8 - 3\log 4 \right) \\
&= \pi \log 40
\end{aligned}$$

Ulomek $\frac{4x+3}{x(x+3)}$ razbijemo na parcialne ulomke:

$$\frac{4x+3}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x + 3A}{x(x+3)}.$$

Iz enačb $A + B = 4$ in $3A = 3$, takoj dobimo $A = 1$ in $B = 3$.
Upoštevali smo tudi, da je $\log 1 = 0$.