

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Visokošolski študij

11. januar 2008

1. [10T] Izračunajte

$$(2\sqrt{3} - 2i)^{17}.$$

Rešitev:

Kompleksno število $2\sqrt{3} - 2i$ najprej zapišemo v polarni obliki. Ker je $x = 2\sqrt{3}$ in $y = -2$, je:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = 4, \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} = -\arctan \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Torej je

$$2\sqrt{3} - 2i = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

Sedaj uporabimo DeMoivreovo formulo:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{3} - 2i)^{17} &= 4^{17} \left(\cos \left(\frac{17\pi}{6} \right) - i \sin \left(\frac{17\pi}{6} \right) \right) \\ &= 4^{17} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) - i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) \\ &= 4^{17} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) \end{aligned}$$

2. [10T] Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x-7} - 1)\sqrt{x}}{\sqrt{3x-8} - 2}.$$

Rešitev:

Če vstavimo $x = 4$ v gornji izraz, dobimo izraz oblike $\frac{0}{0}$. Limo lahko rešimo na dva različna načina.

a) Z L'Hospitalovim pravilom:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x-7}-1)\sqrt{x}}{\sqrt{3x-8}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{2x-7}} + \frac{(\sqrt{2x-7}-1)}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2\sqrt{3x-8}}} \\
 &= \frac{\sqrt{3x-8}(4x-7-\sqrt{2x-7})}{3\sqrt{2x-7}\sqrt{x}} \\
 &= \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

b) S formulo za razliko kvadratov:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x-7}-1)\sqrt{x}}{\sqrt{3x-8}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x-7}-1)(\sqrt{2x-7}+1)(\sqrt{3x-8}+2)\sqrt{x}}{(\sqrt{3x-8}-2)(\sqrt{3x-8}+2)(\sqrt{2x-7}+1)} \\
 &= \frac{2(x-4)(\sqrt{3x-8}+2)\sqrt{x}}{3(x-4)(\sqrt{2x-7}+1)} \\
 &= \frac{2(\sqrt{3x-8}+2)\sqrt{x}}{3(\sqrt{2x-7}+1)} \\
 &= \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

3. [10T] Izračunajte ekstreme funkcije

$$f(x) = x^2 e^{-2x}.$$

Rešitev:

Funkcijo najprej odvajamo:

$$f'(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} = 2x(1-x)e^{-2x}.$$

Stacionarne točke so tam, kjer je prvi odvod enak 0, torej pri $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$. Za klasifikacijo stacionarnih točk potrebujemo drugi odvod:

$$f''(x) = 2e^{-2x} - 8xe^{-2x} + 4x^2e^{-2x} = 2(2x^2 - 4x + 1)e^{-2x}.$$

Ker je $f''(0) = 2 > 0$, je v točki $x_1 = 0$ lokalni minimum, in ker je $f''(1) = -2e^{-2} < 0$, je v točki $x_2 = 1$ lokalni maksimum.

4. [10T] Izračunajte

$$\int 5xe^{2x} dx.$$

Rešitev:

Integral izračunamo z metodo per partes. Vzamemo $u = 5x$ in $dv = e^{2x}dx$, torej je $du = 5dx$ in $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int 5xe^{2x} dx = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{5}{2} \int e^{2x} dx = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{5}{4}e^{2x} + C$$

5. [10T] Izračunajte ploščino lika, ki je omejen s krivuljo

$$y = \frac{5x - 11}{x^2 - 5x + 4},$$

premica $x = 5$ in $x = 7$ ter abscisno osjo.

Rešitev:

Ploščino izračunamo s pomočjo določenega integrala:

$$\begin{aligned} S &= \int_5^7 \frac{5x - 11}{x^2 - 5x + 4} dx = \int_5^7 \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-4} \right) dx \\ &= (2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-4|) \Big|_5^7 = 2 \ln 6 - 2 \ln 4 + 3 \ln 3 - 3 \ln 1 \\ &= \ln \frac{243}{4} \end{aligned}$$

Ulomek pod integralom razbijemo na parcialne ulomke:

$$\frac{5x - 11}{x^2 - 5x + 4} = \frac{5x - 11}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} = \frac{(A+B)x - 4A - B}{(x-1)(x-4)}$$

Dobimo sistem enačb $A + B = 5$ in $-4A - B = -11$, ki ima rešitev $A = 2$ in $B = 3$.