Matematika 1
11. november 2009

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$.

- Funkcija f je navzgor omejena, če obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \leq M$ za vsak $x \in D$.
- Funkcija f je navzdol omejena, če obstaja tak $m \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \geq m$ za vsak $x \in D$.
- Funkcija f je omejena, če obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je $|f(x)| \leq M$ za vsak $x \in D$.

Podobno kot pri zaporedjih lahko definiramo natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo funkcije.

Funkcija f je naraščajoča, če je $f(x) \leq f(y)$ za poljubna $x, y \in D$, za katera velja $x < y$. Če je $f(x) < f(y)$, je f strogo naraščajoča.
Funkcija f je padajoča, če je $f(x) \geq f(y)$ za poljubna $x, y \in D$, za katera velja $x < y$. Če je $f(x) > f(y)$, je f strogo padajoča.

Funkcija f je monotona, če je bodisi naraščajoča, bodisi padajoča.
Funkcija f je strogo monotona, če je bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča.
Strogo monotone funkcije so injektivne, zato lahko definiramo njihov inverz.

Primer

$f(x) = x^3 + 1.$

Ničla funkcije f je vsako tako število $x_0 \in D$, za katero velja, da je $f(x_0) = 0$.

Definicija

Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je soda, če je

$$f(-x) = f(x)$$

za vsak $x \in D$.

Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os.

Primer

$$f(x) = x^2 + 1$$

Definicija

Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je liha, če je

$$f(-x) = -f(x)$$

za vsak $x \in D$.

Graf lihe funkcije je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

Primer

$$f(x) = -x^3 + 2x$$

Opomba

Večina funkcij ni ne lihih in ne sodih.

Naj bosta $f\colon D \to \mathbb{R}$ in $g\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, funkciji, definirani na istem definicijskem območju. Potem lahko definiramo funkcije

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, kjer je $g(x) \neq 0$ za vsak $x \in D$.

Pregled elementarnih funkcij

Polinom je funkcija oblike

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0.$$

$a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$.
Polinome ponavadi označimo s črko p, torej $f = p$.
Število n imenujemo stopnja polinoma p.

Polinom stopnje n ima največ n realnih ničel.
Če ima polinom p točno n realnih ničel $x_1, \ldots, x_n$, potem lahko polinom p zapišemo v obliki

$$p(x) = a_n(x - x_n) \ldots (x - x_1).$$

Nekatere ničle polinoma so lahko večkratne.

Ničle polinoma lahko poskusimo poiskati s Hornerjevim algoritmom.

Primer

Narišimo polinom

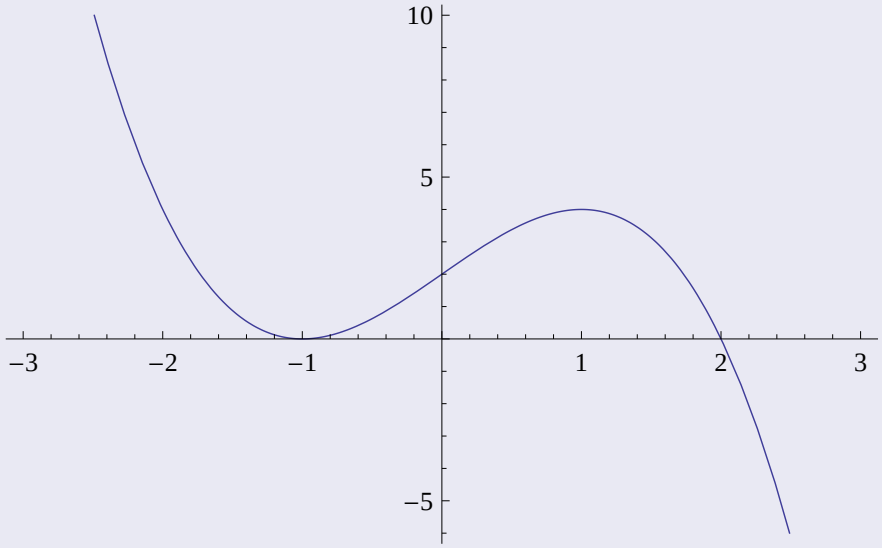
$$p(x) = -x^3 + 3x + 2.$$

Polinom najprej razstavimo. Hitro lahko s Hornerjevim algoritmom ugotovimo, da so ničle polinoma $x_1 = x_2 = -1$ in $x_3 = 2$.
Torej je

$$p(x) = -(x+1)^2(x-2).$$

Ker je $p(0) = 2$, seka graf polinoma ordinatno os v točki $(0, 2)$.

Graf polinoma p je



Racionalna funkcija f je funkcija oblike

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer sta p in q polinoma.
Racionalna funkcija je definirana za vsako realno število, razen za tista realna števila, ki so ničle polinoma q. Teh števil je največ toliko, kot je stopnja polinoma q.
Če polinom q nima realnih ničel (npr. $q(x) = x^2 + 1$), potem je racionalna funkcija definirana povsod.

Če za racionalno funkcijo $f = \frac{p}{q}$ velja, da polinoma p in q nimata skupnih ničel, potem:

- ničle polinoma p so tudi ničle racionalne funkcije f,
- ničle polinoma q so poli racionalne funkcije f, torej je f v okolici ničel polinoma q neomejena.

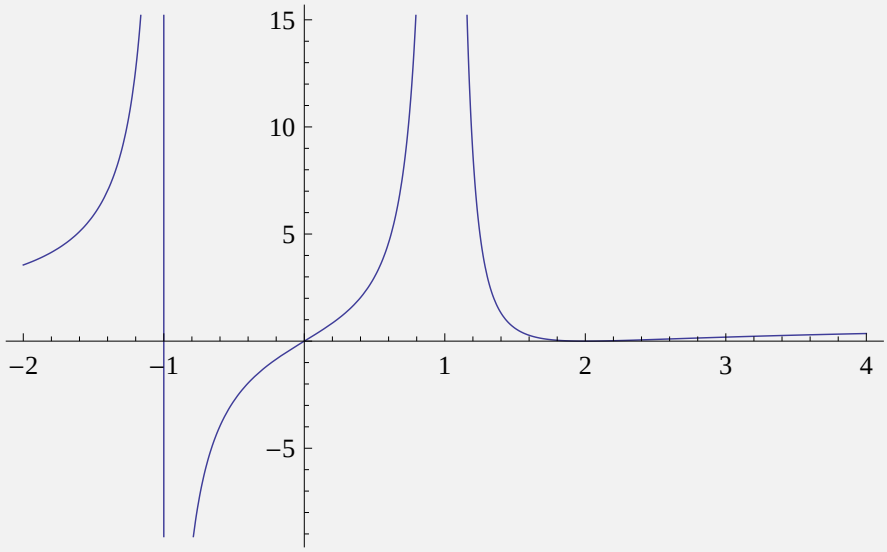
Denimo, da polinoma p in q nimata skupnih ničel in da ima polinom q ničlo x_0 reda k, torej $q(x) = (x - x_0)^k r(x)$, kjer je $r(x_0) \neq 0$.
Potem je graf racionalne funkcija $f = \frac{p}{q}$ v okolici ničle x_0 polinoma q podobne oblike kot graf funkcije

$$\frac{c}{(x - x_0)^k},$$

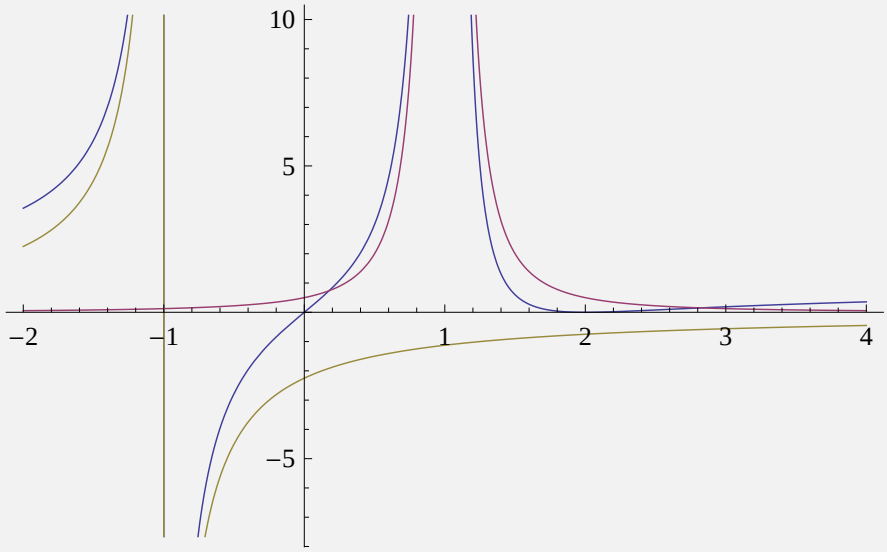
kjer je $c \neq 0$.

Oglejmo si graf racionalne funkcije

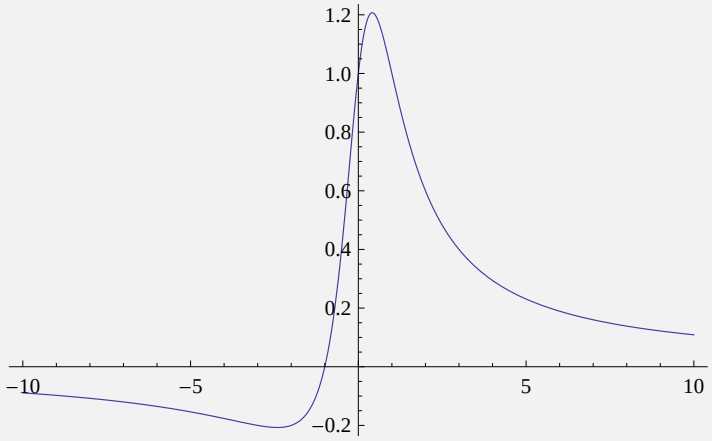
$$f(x) = \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2(x+1)}.$$



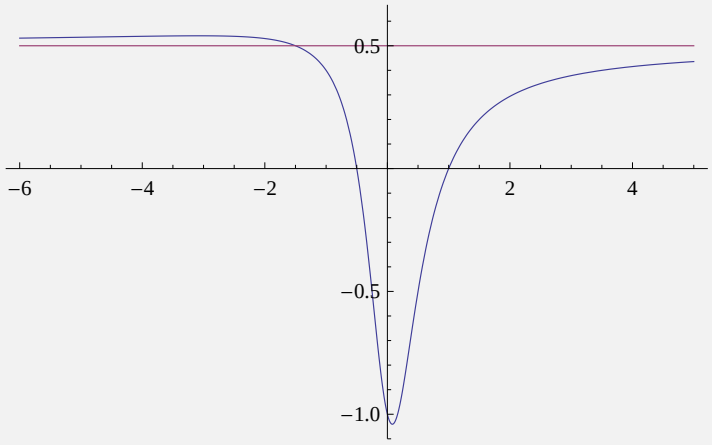
$$f(x) = \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2(x+1)},\ f_1(x) = \frac{1}{2(x-1)^2},\ f_2(x) = \frac{-9}{4(x+1)}$$



Če je stopnja polinoma p manjša od stopnje polinoma q, potem se vrednosti racionalne funkcije $f = \frac{p}{q}$ bližajo 0, ko gre x proti $\pm\infty$.
Racionalna funkcija ima vodoravno asimptoto $y = 0$.
Na primer, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.



Če sta stopnji polinoma p in q enaki, potem ima racionalna funkcija vodoravno asimptoto.
Na primer, $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{4x^2+1}$.



Če je stopnja polinoma p za ena večja od stopnje polinoma q, potem ima racionalna funkcija za asimptoto premico.
V splošnem, če je stopnja polinoma p za m večja od stopnje polinoma q, potem delimo polinoma p s polinomom q in dobimo

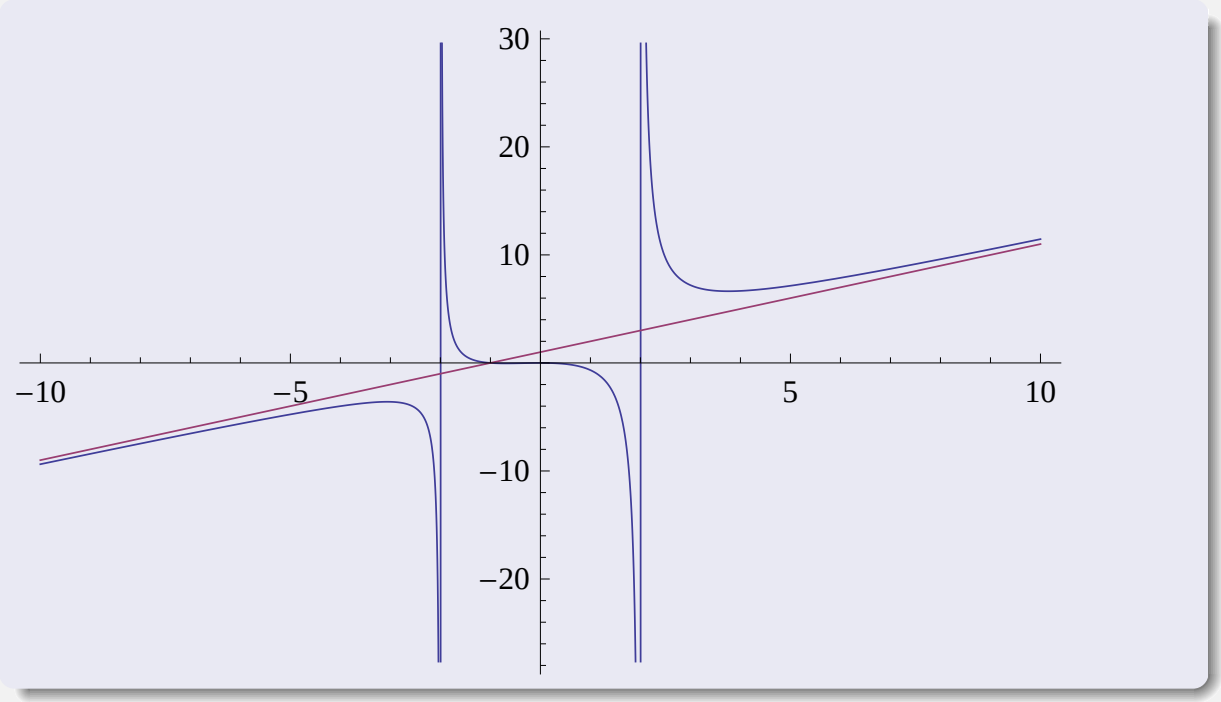
$$p(x) = k(x)q(x) + r(x),$$

kjer je stopnja polinoma k enaka m, stopnja polinoma r pa manjša od stopnje polinoma q.
Racionalna funkcija $f = \frac{p}{q} = k + \frac{r}{k}$ ima potem za asimptoto polinom k.

Primer

Narišimo graf racionalne funkcije

$$f(x) = \frac{x^2(x+1)}{x^2-4}.$$



Algebraična funkcija $y = f(x)$ je rešitev enačbe

$$A_n(x)y^n + A_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + A_1(x)y + A_0(x) = 0,$$

kjer so A_i dani polinomi.

Primer

- Če je $A_i(x) = 0$ za vsak $i > 1$ in $A_1(x) = 1$, potem je $f(x) = -A_0(x)$ polinom.
- Če je $A_i(x) = 0$ za vsak $i > 1$, potem je $f(x) = -\frac{A_0(x)}{A_1(x)}$ racionalna funkcija.
- Če je $A_i(x) = 0$ za vsak $i > 2$, $A_2(x) = 1$, $A_1(x) = 0$ in $A_0(x) = -x$, potem sta med rešitvami enačbe $y^2 - x = 0$ tudi iracionalni funkciji $f(x) = \sqrt{x}$ in $f(x) = -\sqrt{x}$.

Med algebraične funkcije spadajo tudi vse funkcije, katerih grafi tvorijo krivulje drugega reda, na primer:

- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{elipsa}$$
- $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{hiperbola}$$
- $$y^2 = 2px, \quad \text{parabola}$$

Opomba

Z nekaterimi enačbami ni definirana nobena realna funkcija.
Na primer, $y^2 + x^2 + 1 = 0$.