Matematika 1
17. - 24. november 2009

Funkcija, ki ni algebraična, se imenuje transcendentna funkcija.
Podrobneje si bomo ogledali naslednje transcendentne funkcije: eksponentno, logaritemsko, kotne, ciklometrične, hiperbolične in area funkcije.

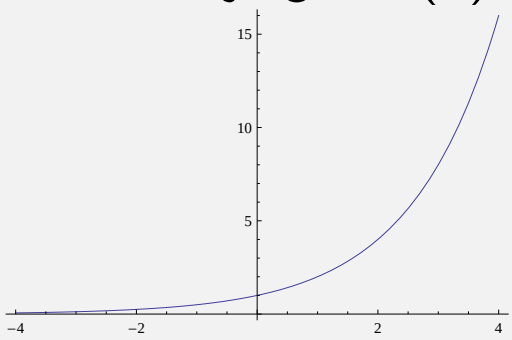
Eksponentna funkcija

Naj bo $a > 0$. Potem je

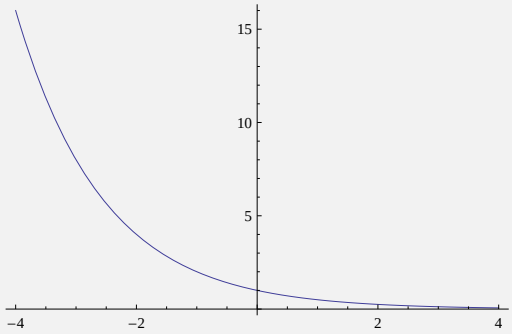
$$f(x) = a^x$$

eksponentna funkcija.
Najpogosteje uporabljamo osnovo $a = e$, torej $f(x) = e^x$.
Če je $a = 1$, potem je $f(x) = 1$ konstantna funkcija.
Eksponentna funkcija je pozitivna in za $a \neq 1$ strogo monotona in neomejena.

Za $a > 1$ je graf $f(x) = a^x$:



Za $0 < a < 1$ je graf $f(x) = a^x$:



Trditev

Za eksponentno funkcijo velja

$$f(x+y) = f(x)f(y),$$

torej

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Opomba

Eksponentna funkcija je za $a \neq 1$ strogo monotona, torej obstaja inverzna funkcija, ki jo imenujemo logaritemska funkcija.

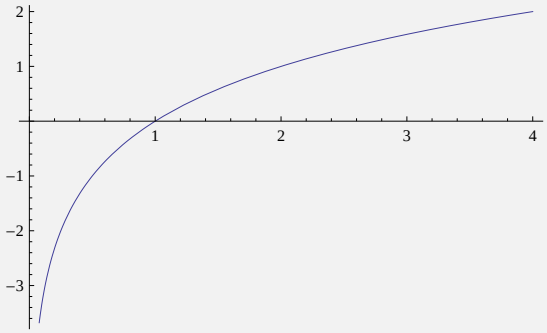
Logaritemska funkcija

Naj bo $a > 0$ in $a \neq 1$. Inverzno funkcijo eksponentne funkcije $f(x) = a^x$ imenujemo logaritemska funkcija in pišemo

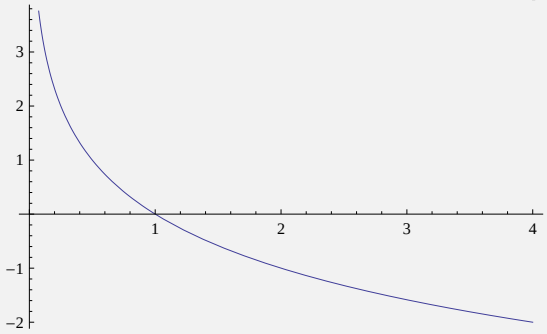
$$f(x) = \log_a(x).$$

Torej, če je $y = a^x$, potem je $x = \log_a y$.

Za $a > 1$ je graf $f(x) = \log_a x$:



Za $0 < a < 1$ je graf $f(x) = \log_a x$:



Za logaritemsko funkcijo velja:

- definirana je samo za $x > 0$
- je strogo monotona in neomejena
- ničla logaritemske funkcije je $x_0 = 1$, torej $\log(1) = 0$
- pol logaritemske funkcije je premica $x = 0$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Opomba

Če je $a = e$, potem pišemo

$$f(x) = \log_e x = \log x = \ln x.$$

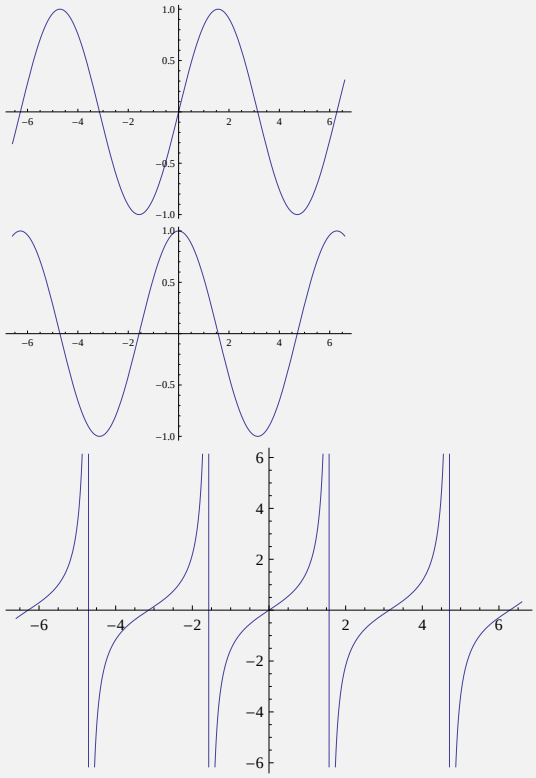
Kotne (trigonometrične) funkcije

Kotne funkcije so sinus, kosinus, tangens in kotangens.
Za kote, manjše od $\pi/2$, so definirane s pomočjo razmerij med stranicami v pravokotnem trikotniku.
Definicijsko območje kotnih funkcij sinus in kosinus razširimo na množico vseh realnih števil.
Definicijsko območje funkcije $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ je množica $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Funkciji sinus in kosinus sta periodični s periodo 2π, torej je $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ in $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.
Funkcija tangens je periodična s periodo π, torej je $\tan x = \tan(x + \pi)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.
Med kotnimi funkcijami veljajo številne zveze, na primer:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

Grafi funkcij sinus, kosinus in tangens:



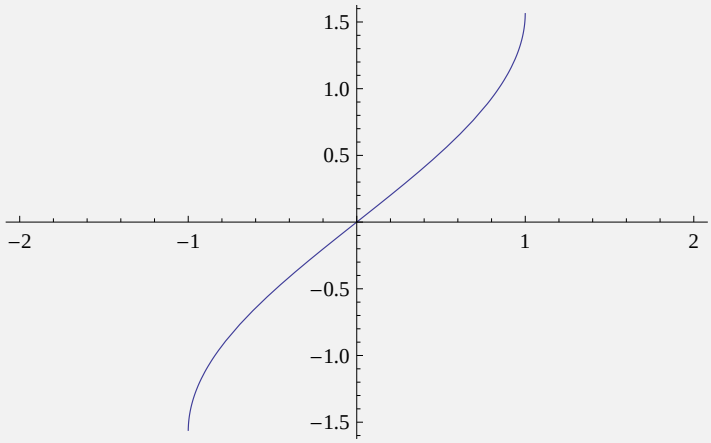
Ciklometrične funkcije

Kotne funkcije niso injektivne, zato ne obstaja inverzna funkcija kotne funkcije.
Če pa se omejimo na območje, kjer je posamezna kotna funkcija injektivna, lahko definiramo njen inverz.
Pri sinusni funkciji se omejimo na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, na katerem je sinus injektivna funkcija, zato lahko definiramo inverzno funkcijo, ki jo imenujemo arkus sinus in pišemo

$$f(x) = \arcsin x.$$

Torej je $y = \arcsin x$ natanko tedaj, ko je $\sin y = x$.

Definicijsko območje funkcije arkus sinus je $[-1, 1]$, njena zaloga vrednosti pa $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

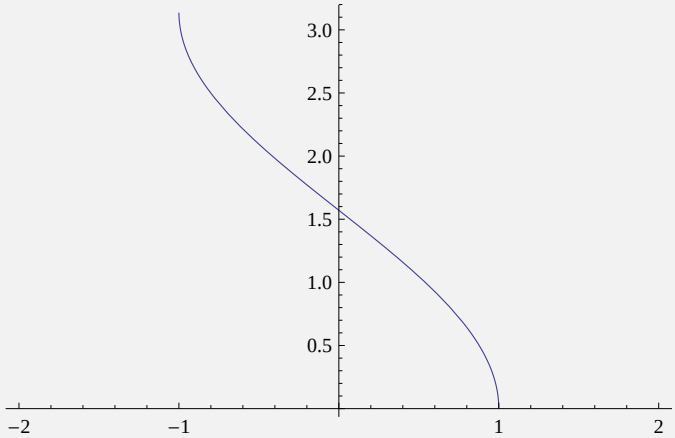


Podobno za kosinus. Omejimo se na interval $[0, \pi]$, na katerem je kosinus injektivna funkcija, in definiramo inverzno funkcijo, ki jo imenujemo arkus kosinus in pišemo

$$f(x) = \arccos x.$$

Torej je $y = \arccos x$ natanko tedaj, ko je $\cos y = x$.

Definicijsko območje funkcije arkus kosinus je $[-1, 1]$, njena zaloga vrednosti pa $[0, \pi]$.

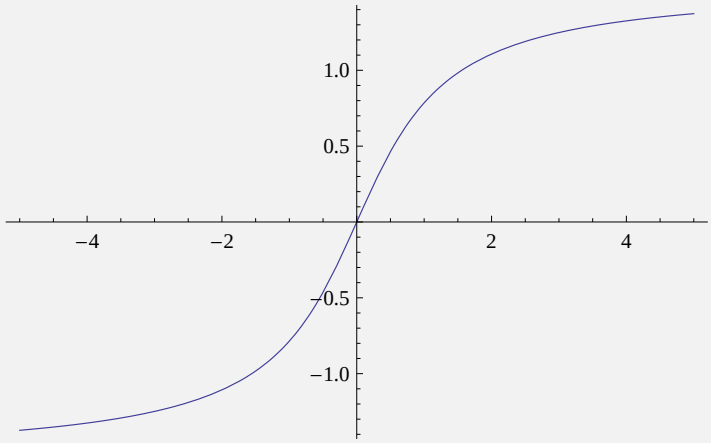


Za funkcijo tangens se omejimo na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, na katerem je tangens injektivna funkcija, in definiramo inverzno funkcijo, ki jo imenujemo arkus tangens in pišemo

$$f(x) = \arctan x.$$

Torej je $y = \arctan x$ natanko tedaj, ko je $\tan y = x$.

Definicijsko območje funkcije arkus tangens so vsa realna števila $\mathbb{R}$, njena zaloga vrednosti pa $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Izpeljimo zvezo med ciklometričnimi funkcijami. Ker je

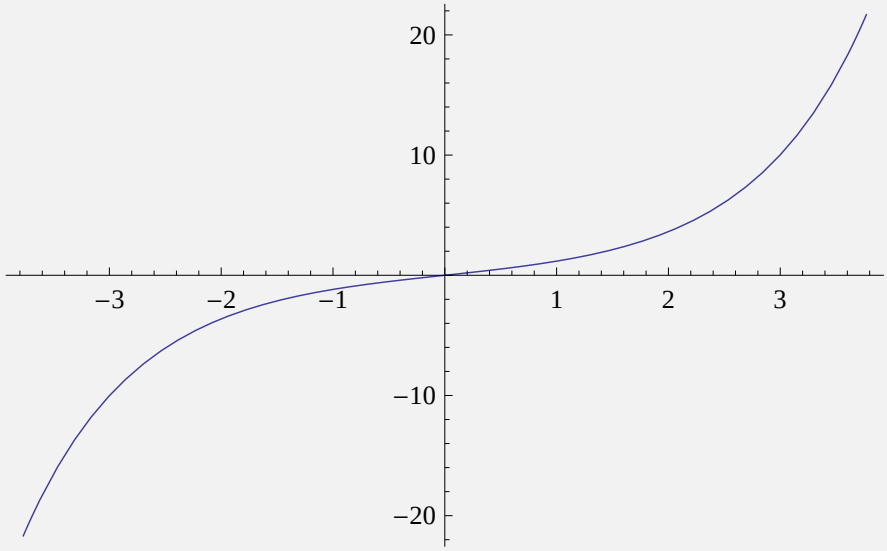
$$\cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y) = x,$$

je $y = \arccos x$ in $\frac{\pi}{2} - y = \arcsin x$. Seštejemo obe enačbi in dobimo

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

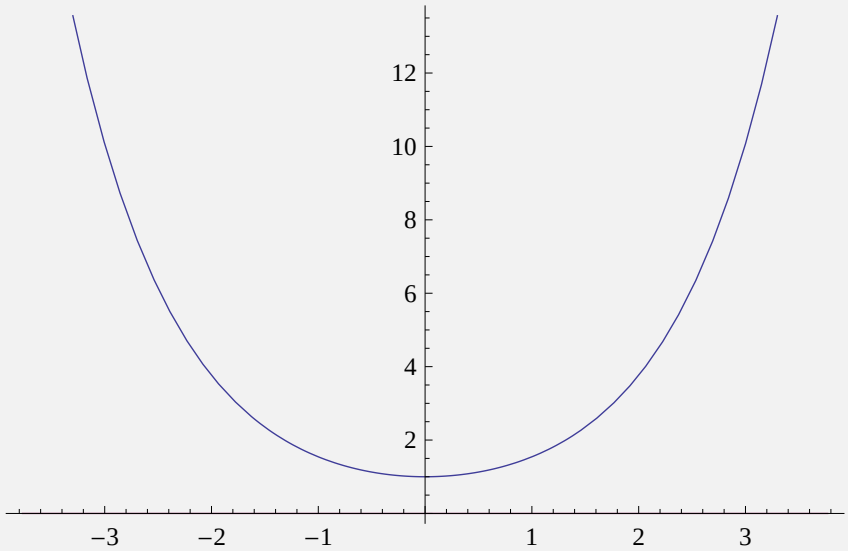
Hiperbolični sinus

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



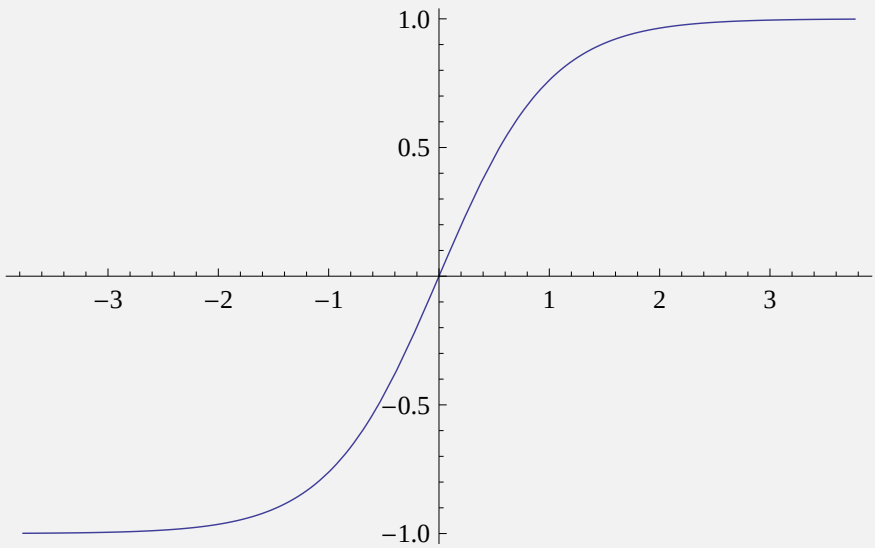
hiperbolični kosinus

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



in hiperbolični tangens

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



Za hiperbolične funkcije veljajo podobne zveze, kot za kotne funkcije, na primer

- $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- $\cos^2 x - \sinh^2 x = 1$

Parametrično podana krivulja $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ je v implicitni obliki podana z enačbo $x^2 - y^2 = 1$, kar je enačba hiperbole (od tod takšno ime funkcij).

Area funkcije

Tudi za hiperbolične funkcije bi radi izračunali njihov inverz.
Hiperbolični sinus in hiperbolični tangens sta strogo naraščajoči funkciji, torej injektivni, zato njuna inverza obstajata povsod.
Pri hiperboličnem kosinusu pa se omejimo na interval $[0, \infty)$, kjer je hiperbolični kosinus strogo naraščajoča funkcija.

Izračunajmo inverzno funkcijo hiperboličnega sinusa, torej funkcije $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Zamenjamo vlogo x in y, preoblikujemo izraz, tako da dobimo kvadratno enačbo glede na spremenljivko e^y, rešimo kvadratno enačbo in dobimo, da je le ena rešitev pravilna

$$y = \log(x + \sqrt{1 + x^2}) = \operatorname{Ar}\sinh x.$$

Podobno lahko izpeljemo area funkciji tudi za hiperbolični kosinus in hiperbolični tangens:

$$\operatorname{Ar}\cosh x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$\operatorname{Ar}\tanh x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Limita funkcij

Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Število A je limita funkcije f v točki $x_0 \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x \neq x_0$, za katerega je $|x - x_0| < \delta$.
To pišemo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Opomba

Limita funkcije f v točki x_0 ni odvisna od vrednosti funkcije f v točki x_0.

Lahko je

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ obstaja, funkcija f pa v točki x_0 ni definirana.

Trditev

Če je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A$$

in je

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

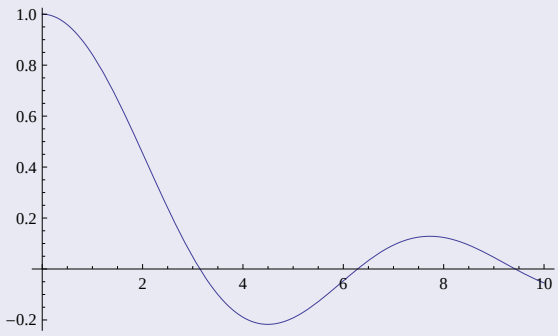
za vsak $x \neq x_0$ *iz neke okolice* x_0*, potem obstaja tudi*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = A.$$

Primer

Pokažimo, da je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Upoštevamo, da je $\sin x < x < \tan x$.

Primer

Izračunajmo

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(5x)}{2x}.$$

Pri računanju limite upoštevamo zvezo
$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Število A je leva limita funkcije f v točki $x_0 \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x < x_0$, za katerega je $x_0 - x < \delta$.
To pišemo

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Število A je desna limita funkcije f v točki $x_0 \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x > x_0$, za katerega je $x - x_0 < \delta$.
To pišemo

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

Trditev

Limita funkcije v točki x_0 obstaja natanko tedaj, ko v tej točki obstajata leva in desna limita in sta enaki.

Primer

Izračunajmo

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{\arctan(\frac{\pi}{x})}.$$

Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Število A je limita funkcije f, ko gre x proti ∞, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število $M \in \mathbb{R}$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x > M$.
To pišemo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Podobno definiramo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Pravimo, da je ∞ limita funkcije f, ko gre x proti x_0, če za vsak $M \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$f(x) > M$$

za vsak $x \neq x_0$ in $|x - x_0| < \delta$.
To pišemo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Primer

$$\lim_{x \to \infty} \log x = \infty.$$

Podobno kot pri limitah zaporedij tudi pri limitah funkcij pokažemo lastnosti, ki veljajo za računanje limit.

- $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$, kjer je $g(x) \neq 0$ za vsak x iz neke okolice x_0.

Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f je zvezna v točki x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

za vsak x, za katerega velja $|x - x_0| < \delta$.
Pravimo, da je funkcija f zvezna na D, če je zvezna v vsaki točki iz D.

Izrek

Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je zvezna v točki x_0 natanko tedaj, ko je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Opomba

Podobno, kot smo definirali levo in desno limito, definiramo tudi, kdaj je funkcija zvezna z leve in kdaj je zvezna z desne.

Videli smo, da sta pojma zveznosti in limite tesno povezana. To dokazuje tudi naslednji izrek.

Izrek

Naj bo g zvezna funkcija v točki $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Potem je

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)),$$

torej lahko zamenjamo vrstni red računanja limite in računanja vrednosti zvezne funkcije.

Z upoštevanjem lastnosti za računanje limit hitro izpeljemo, da velja:

- Vsota zveznih funkcij je zvezna funkcija.
- Produkt zveznih funkcij je zvezna funkcija.
- Kvocient zveznih funkcij je zvezna funkcija.
- Kompozitum zveznih funkcij je zvezna funkcija.