Matematika 1
1. december 2009

Lastnosti zveznih funkcij

Trditev

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija in naj bo* $f(a)f(b) < 0$, *torej funkcija* f *v krajiščih intervala zavzame nasprotno predznačeni vrednosti. Potem obstaja vsaj ena točka* $x_0 \in [a, b]$, *tako da je* $f(x_0) = 0$.

Dokaz

Obstoj točke x_0 dokažemo s pomočjo bisekcije.

Trditev

Zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je omejena.

Dokaz

Interval $[a, b]$ razpolavljamo, tako da dobimo zaporedje intervalov $[a_n, b_n]$, na katerih je funkcija f neomejena. Krajišča intervalov konvergirajo proti neki točki x_0. Na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ bi bila funkcija neomejena in hkrati zaradi zveznosti omejena, protislovje.

Opomba

Če interval ni zaprt, to ni nujno res.
Na primer, funkcija $f : (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x}$, je na intervalu $(0, 1]$ neomejena.

Trditev

Zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ doseže svojo natančno zgornjo in svojo natančno spodnjo mejo.
Torej obstajata $x_m, x_M \in [a, b]$, tako da je

$$f(x_m) = inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

in

$$f(x_M) = sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Dokaz

Zvezna funkcija je na zaprtem intervalu omejena, zato obstajata njena natančna spodnja meja m in natančna zgornja meja M.
Denimo, da ne obstaja tako število x_m, da je $f(x_m) = m$. Potem je $f(x) \neq m$ za vsak $x \in [a, b]$.
Potem pa je funkcija $g(x) = \frac{1}{f(x)-m} > 0$ zvezna in zato omejena na $[a, b]$.
Naj bo M_g natančna zgornja meja funkcije g.
Potem je $g(x) = \frac{1}{f(x)-m} \leq M_g$ in zato $f(x) \geq m + \frac{1}{M_g}$, protislovje.
Podobno dokažemo obstoj x_M.

Trditev

Zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ zavzame vsako vrednost med svojo natančno spodnjo mejo m in svojo natančno zgornjo mejo M.
Torej za vsak $t \in [m, M]$ obstaja nek $x_t \in [a, b]$, tako da je

$$f(x_t) = t.$$

Dokaz

Naj bo $t \in (m, M)$. Definiramo funkcijo $g(x) = f(x) - t$ na intervalu s krajiščima x_m in x_M. Potem je $g(x_m)g(x_M) < 0$, zato obstaja točka x_t, tako da je $g(x_t) = 0$, torej $f(x_t) = t$.

Odvod

Pri proučevanju funkcij nas običajno zanima, kako se funkcija spreminja, ali njene vrednosti naraščajo, padajo, kako hitre so te spremembe, ...
Kako hitro se vrednosti funkcije $f(x)$ spreminjajo v odvisnosti od spremenljivke x, lahko preverimo s pomočjo odvoda.

Naj bo $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$. Ko se vrednost spremenljikve x_0 poveča za h na $x_0 + h$, se vrednost funkcije spremeni za $f(x_0 + h) - f(x_0)$.
Funkcija se tem hitreje spreminja, čim večja je sprememba vrednosti funkcije pri čim manjši spremembi neodviosne spremenljivke, torej čim več je $f(x_0 + h) - f(x_0)$ pri čim manjši spremembi spremenljivke $x_0 + h - x_0 = h$.

Hitrost spreminjanja nam pove kvocient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ki se imenuje diferenčni kvocient funkcije f v točki x_0.
Diferenčni kvocient je enak smernemu koeficientu premice skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Definicija

Naj bo $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$. Če obstaja limita diferenčnega kvocienta funkcije f v točki $x_0 \in (a,b)$, ko gre h proti nič, potem pravimo, da je funkcija f odvedljiva v točki x_0. Vrednost te limite imenujemo odvod funkcije f v točki x_0 in ga označimo $f'(x_0)$. Torej je

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Funkcija f je odvedljiva v točki x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$\left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$$

za vsak $h \neq 0$, za katerega velja $|h| < \delta$.
Če je f odvedljiva v vsaki točki območja D, potem pravimo, da je f odvedljiva na območju D.

Izrek

Če je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *odvedljiva v točki* $x_0 \in (a, b)$, *potem je v točki* x_0 *tudi zvezna.*

Dokaz

Funkcija f *je odvedljiva v točki* x_0, *če za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja tak* $\delta > 0$, *da je*

$$\left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$$

za vsak $h \neq 0$, *za katerega velja* $|h| < \delta$.
Torej je

$$|f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)| < \varepsilon|h|.$$

Oziroma

$$hf'(x_0) - \varepsilon|h| < f(x_0 + h) - f(x_0) < hf'(x_0) + \varepsilon|h|.$$

Ko gre $h \to 0$, *gre* $f(x_0 + h) \to f(x_0)$ *in* f *je zvezna v točki* x_0.

Opomba

Ni pa vsaka zvezna funkcija tudi odvedljiva.

Primer

Funkcija $f(x) = |x|$ je v točki 0 zvezna, ni pa v tej točki odvedljiva (leva limita je enaka -1, desna pa 1).

Primer

Izračunajmo po definiciji odvod funkcije $f(x) = x^2 + x$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + x + h - x^2 - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 + h}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h + 1) = 2x + 1.$$

Pravila za odvajanje

- Če je f konstantna funkcija, potem je njen odvod enak nič, torej $c' = 0$.
- Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x, potem je v tej točki odvedljiva tudi funkcija $f + g$ in velja $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x, potem je v točki x odvedljiva tudi funkcija fg in velja $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

- Če je funkcija f odvedljiva v točki x in c konstanta, potem je v točki x odvedljiva tudi funkcija cf in velja $(cf)'(x) = cf'(x)$.
- Če sta funkciji f in g odvedljivi v točki x in je $g(x) \neq 0$, potem je v točki x odvedljiva tudi funkcija $\frac{f}{g}$ in velja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

- Če je funkcija f odvedljiva v točki $g(x)$ in je funkcija g odvedljiva v točki x, potem je funkcija $f \circ g$ odvedljiva v točki x in velja

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x))' = f'(g(x))g'(x).$$

(posredno odvajanje, verižno pravilo)
- Če je f^{-1} inverzna funkcija funkcije f in je $f'(x) \neq 0$, potem je funkcija f^{-1} odvedljiva v točki $f(x)$ in velja

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$