Matematika 1
9. december 2009

Definicija

Funkcija f je konveksna na intervalu $[a, b]$, če za vsak $[c, d] \subseteq [a, b]$ in vsak $x \in [c, d]$ velja

$$f(x) \leq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c).$$

Torej graf funkcije f na intervalu $[c, d]$ leži pod premico skozi točki $(c, f(c))$, $(d, f(d))$.

Definicija

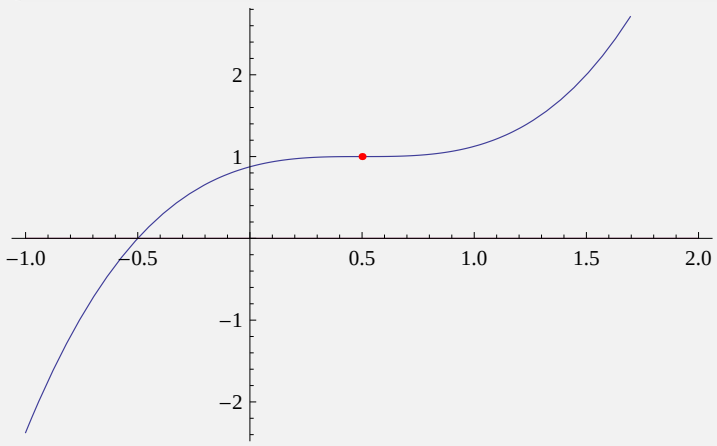
Funkcija f je konkavna na intervalu $[a, b]$, če za vsak $[c, d] \subseteq [a, b]$ in vsak $x \in [c, d]$ velja

$$f(x) \geq f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c).$$

Torej graf funkcije f na intervalu $[c, d]$ leži nad premico skozi točki $(c, f(c))$, $(d, f(d))$.

Definicija

Točka x_0 je prevoj funkcije f, če se v točki x_0 funkcija f spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno.



Izrek

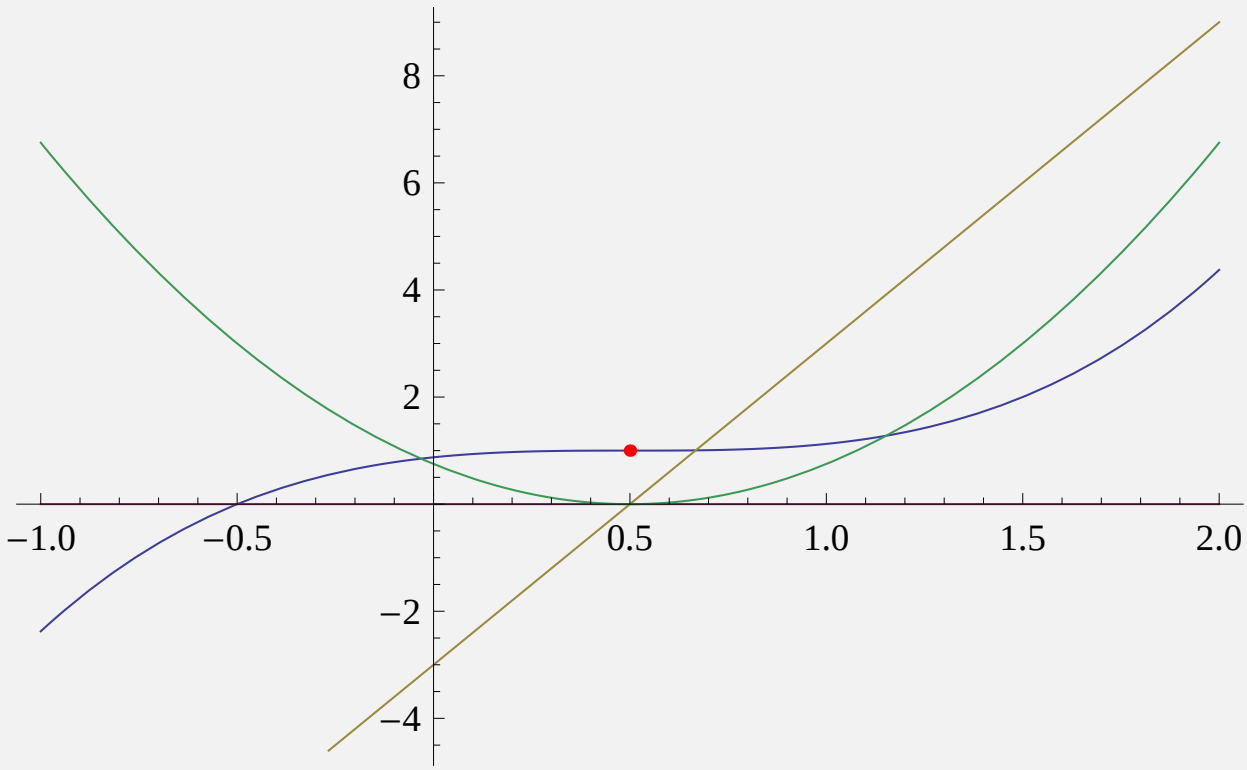
Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dvakrat odvedljiva funkcija.*
Če je $f''(x) > 0$ *za vsak* $x \in (a, b)$*, potem je* f *konveksna na intervalu* $[a, b]$*.*
Če je $f''(x) < 0$ *za vsak* $x \in (a, b)$*, potem je* f *konkavna na intervalu* $[a, b]$*.*
Če je $f''(x_0) = 0$ *in drugi odvod pri prehodi skozi točko* x_0 *spremeni predznak, je* x_0 *prevoj funkcije* f*.*

Izrek

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dvakrat odvedljiva funkcija in naj bo* $x_0 \in (a, b)$ *stacionarna točka funkcije* f*.*
Če je $f''(x_0) > 0$*, potem je v stacionarni točki* x_0 *lokalni minimum.*
Če je $f''(x_0) < 0$*, potem je v stacionarni točki lokalni maksimum.*

Dokaz

Denimo, da je $f''(x_0) > 0$. *Potem je* $f'(x)$ *naraščajoča funkcija in ker je* $f'(x_0) = 0$, *levo od* x_0 *velja* $f'(x) < 0$, *desno od* x_0 *pa velja* $f'(x_0) > 0$. *Torej prvi odvod v stacionarni točki spremeni predznak iz negativnega v pozitivnega, zato je v* x_0 *lokalni minimum.*
Podobno za lokalni maksimum.



Ekstrem zvezne funkcije na zaprtem intervalu

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$. Potem smo pokazali, da funkcija f na tem intervalu zavzame največjo in najmanjšo vrednost. Če je funkcija odvedljiva, je točka, v kateri je ekstrem, stacionarna točka.
Lahko pa je ekstrem tudi v krajiščih intervala ali tam, kjer funkcija sploh ni odvedljiva.

Primer

Določimo vse ekstreme funkcije

$$f(x) = (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 2).$$

Stacionarne točke so: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -1$.

Primer

Metoda najmanjših kvadratov:

$$f(x) = (x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$$

$$x = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

L'Hospitalovo pravilo

Lahko se zgodi, da funkcija f v neki točki x_0 ni definirana, kljub temu pa obstaja limita funkcije f v točki x_0.
Če definiramo vrednost funkcije f v točki x_0 s predpisom $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$, potem pravimo, da smo odpravili nedoločenost funkcije f v točki x_0.

Pri odpravljanju nedoločenosti v točki x_0 funkcije f, ki jo lahko zapišemo v obliki

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)},$$

pri čemer je $u(x_0) = v(x_0) = 0$, si pomagamo z L'Hospitalovim pravilom.

Izrek (L'Hospitalov izrek)

Naj bosta funkciji u in v odvedljivi v okolici točke a in naj bo $u(a) = v(a) = 0$. V tej okolici naj za $x \neq a$ velja $v(x) \neq 0$ in $v'(x) \neq 0$.
Če obstaja $\lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$, potem obstaja tudi $\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)}$ in velja

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Dokaz

Naj bo $x > a$ element dovolj majhne okolice števila a. Označimo $k = \frac{u(x)}{v(x)}$ in definiramo funkcijo

$$g(t) = u(t) - kv(t)$$

za vsak $t \in [a, x]$.
Potem je $g(a) = u(a) - kv(a) = 0$ in $g(x) = u(x) - kv(x) = 0$.
Funkcija g zadošča na intervalu $[a, x]$ pogojem Rollovega izreka, zato obstaja taka točka $x_0 \in (a, x)$, da je $g'(x_0) = 0$.

Ker je $g'(t) = u'(t) - kv'(t)$ in $g'(x_0) = 0$, sledi, da je $u'(x_0) - kv'(x_0) = 0$, in zato

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}.$$

Ko gre $x \to a$, gre tudi $x_0 \to a$ in v limiti dobimo željeno enakost.

Primer

Izračunajmo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} \quad \text{in} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Izrek

Naj bosta funkciji u in v odvedljivi v okolici točke a in naj bo $\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} v(x) = \infty$.
Če obstaja končna ali neskončna limita: $\lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$, potem obstaja tudi končna ali neskončna limita: $\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)}$ in velja

$$\lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Dokaz opustimo.

Primer

Izračunajmo

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x}.$$

Doslej smo si ogledali, kako odpravimo nedoločenost oblike $\frac{0}{0}$ in $\frac{\infty}{\infty}$.
Nedoločenost oblike $0 \cdot \infty$ ali $\infty - \infty$ odpravimo tako, da izraz preoblikujemo v enega izmed prej naštetih dveh.

Primer

Izračunajmo

$$\lim_{x \to 0} x^2 \log x, \quad \lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} \quad \text{in} \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$