Matematika 1
16. december 2009

Integral racionalne funkcije

Izračunati želimo integral

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

kjer sta p in q polinoma.

1. Če je polinom q oblike $q(x) = (ax+b)^m$, $a \neq 0$, potem integral

$$\int \frac{p(x)}{(ax+b)^m} dx$$

izračunamo tako, da uvedemo novo spremenljivko $t = ax + b$.

Primer

$$\int \frac{x^2 - x + 3}{(x-2)^3} dx$$

2. Če je stopnja polinoma p večja ali enaka stopnji polinoma q, potem polinom p delimo s polinomom q in dobimo $p(x) = k(x)q(x) + r(x)$, torej je

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left(k(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right) dx,$$

pri čemer je stopnja polinoma r manjša od stopnje polinoma q.
Integral $\int k(x)dx$ znamo izračunati, v integralu $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$ pa je stopnja polinoma v števcu manjša od stopnje polinoma v imenovalcu.

Za polinom q poiščemo vse njegove ničle, tako realne kot tudi kompleksne, in nato polinom razstavimo do oblike

$$q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_m)^{\alpha_m}$$
$$(x^2 + a_1 x + b_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + a_n x + b_n)^{\beta_n}.$$

Pri tem so polinomi v drugi vrstici nerazcepni, saj so produkt izrazov oblike $(x - x_k)(x - \overline{x_k})$, kjer sta x_k in $\overline{x_k}$ konjugirani par kompleksnih ničel.

Kvocient $\frac{r(x)}{q(x)}$ se da vedno razcepiti na parcialne ulomke. Če ima imenovalec ničlo x_i reda α_i, potem v razcepu na parcialne ulomke nastopajo členi

$$\frac{c_1}{x - x_i} + \frac{c_2}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{c_{\alpha_i}}{(x - x_i)^{\alpha_i}},$$

če pa ima imenovalec konjugirani kompleksni ničli y_j in $\overline{y_j}$ reda β_j, torej je v produkt člen $(x^2 + a_j x + b_j)^{\beta_j}$, potem v razcepu na parcialne ulomke nastopajo členi

$$\frac{d_1 x + e_1}{x^2 + a_j x + b_j} + \dots + \frac{d_{\beta_j} x + e_{\beta_j}}{(x^2 + a_j x + b_j)^{\beta_j}}.$$

Integral racionalne funkcije razpade na vsoto integralov, vsak od dobljenih integralov pa je ene izmed oblik

- $\displaystyle\int \frac{c}{(x-x_1)^n}dx$
- $\displaystyle\int \frac{d\cdot x+e}{(x^2+ax+b)^m}dx$

Primer

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2}dx$$

Primer

$$\int \frac{2x^3}{x^2+2x+2}dx$$

Opomba

Rezultat integriranja racionalne funkcije je vsota polinoma, racionalne funkcije, logaritma linearne funkcije, logaritma kvadratne funkcije in arkus tangensa.

Integral trigonometričnih funkcij

Naj bo R racionalna funkcija sinusov in kosinusov, torej v števcu in imenovalcu nastopata polinoma sinusov in kosinusov (na primer $\frac{\sin^2 x \cos x - 4\cos x}{3\cos^4 x - \sin x \cos x + 1}$).

Potem znamo integral $\int R(\sin x, \cos x)dx$ z univerzalno substitucijo pretvoriti v integral racionalne funkcije, ki se ga da vedno rešiti.

Uvedemo univerzalno substitucijo

$$t = \tan\frac{x}{2}.$$

Funkciji sinus in kosinus moramo izraziti s t.

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Določiti moramo še zvezo med dx in dt.
Ker je $t = \tan\frac{x}{2}$ in zato $x = 2\arctan t$, je

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Dobimo

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2},$$

kar pa je integral racionalne funkcije spremenljivke t, ki se ga da izračunati.

Primer

$$\int \frac{1}{\sin x}dx$$

Opomba

Večkrat pridemo pri računanju integralov trigonometričnih funkcij s kakšno drugo substitucijo, ki ni univerzalna, hitreje do rešitve.

Integral funkcij oblike $\sin^m x \cos^n x$.

Če je m ali n liho število, potem izračunamo integral

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

v enem koraku.

- Če je m liho število, torej $m = 2k + 1$, potem za novo spremenljivko vzamemo $t = \cos x$.
  Potem je $dt = -\sin x dx$,
  $\sin^{2k} x = (\sin^2 x)^k = (1 - \cos^2 x)^k$ in dobimo integral polinoma v spremenljivki t.

Primer

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx$$

- Če je n liho število, torej $n = 2k + 1$, potem za novo spremenljivko vzamemo $t = \sin x$.
  Potem je $dt = \cos x dx$,
  $\cos^{2k} x = (\cos^2 x)^k = (1 - \sin^2 x)^k$ in dobimo integral polinoma v spremenljivki t.

Primer

$$\int \cos^5 x dx$$