Matematika 1
22. december 2009

Integral funkcij oblike $\sin^m x \cos^n x$.

Če sta m in n sodi števili, potem izračunamo integral

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

tako, da ga preoblikujemo v integral sinusov in kosinusov s potencama $\frac{m}{2}$ in $\frac{n}{2}$.
Pri tem upoštevamo zvezi:
$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ in $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

Primer

$$\int \sin^4 x dx$$

Pri računanju integralov oblike

$$\int \sin(ax)\cos(bx)dx$$

upoštevamo adicijske izreke.

Opomba

Nedoločeni integral nekaterih elementarnih funkcij ni elementarna funkcija, na primer

$$\int \frac{e^x}{x} dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx.$$

Določeni integral

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu pozitivna in omejena funkcija. Radi bi izračunali ploščino med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[a, b]$. Ploščino bomo izračunali tako, da jo bomo aproksimirali s ploščino pravokotnikov.

Interval $[a, b]$ razdelimo na n podintervalov $[x_{k-1}, x_k]$, pri čemer je

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Na vsakem podintervalu izberemo poljubno točko $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

Zmnožek

$$f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

je potem enak ploščini pravokotnika z osnovnico $[x_{k-1}, x_k]$ in višino $f(\xi_k)$.
Seštejemo ploščine vse takih pravokotnikov in dobimo približek za ploščino med grafom funkcije f in abscisno osjo.

Naj bo sedaj $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija. Naj bo $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ razdelitev intervala $[a,b]$ in naj bo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Potem je Riemannova oziroma integralska vsota funkcije f za dano delitev intervala $[a,b]$ enaka

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Število I imenujemo določeni integral funkcije f na intervalu $[a,b]$, če za vsak ε obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})| < \epsilon,$$

čim je $\max\limits_{k=1,\ldots,n} \{\delta_k\} < \delta$, pri čemer je $\delta_k = x_k - x_{k-1}$.

Če tako število I obstaja, potem pravimo, da je funkcija f integrabilna na intervalu $[a, b]$ in pišemo

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

pri čemer je $\delta_k = x_k - x_{k-1}$.

Funkcija f je torej integrabila, če obstaja limita integralskih vsot, ko gre dolžina najdaljšega intervala proti nič.

Zanima nas, kdaj določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ obstaja.

Izrek

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$. Potem je f na tem intervalu integrabilna.

Skica dokaza

Oglejmo si dokaz v primeru, ko je f na intervalu $[a, b]$ nenegativna, torej $f(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$. Funkcija f je zvezna, zato na zaprtem intervalu doseže svoj minimum in svoj maksimum.
Torej za vsak podinterval $[x_k, x_{k-1}]$ obstajata taki števili $x_{m_k}, x_{M_k} \in [x_{k-1}, x_k]$, da je

$$m_k = f(x_{m_k}) \leq f(x) \leq f(x_{M_k}) = M_k$$

za vsak $x \in [x_{k-1}, x_k]$,.

Sledi, da je

$$f(x_{m_k}) \leq f(\xi_k) \leq f(x_{M_k})$$

za vsak $k = 1, \ldots, n$.
Za vsako delitev intervala $[a, b]$ *potem velja ocena*

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{m_k})\delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_{M_k})\delta_k,$$

pri čemer je $\delta_k = x_k - x_{k-1}$.
Vsoto na levi imenujemo spodnja integralska vsota, vsoto na desni pa zgornja integralska vsota.

Ker je funkcija f *zvezna na intervalu* $[a, b]$, *torej tudi enakomerno zvezna, za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja* $\delta > 0$, *da je* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, *čim je* $|x - y| < \delta$.
Naj bo $\max_{k=1,\ldots,n}\{\delta_k\} < \delta$. *Potem je* $f(x_{M_k}) - f(x_{m_k}) < \epsilon$ *za vsak* $k = 1, \ldots, n$.
Sledi

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{M_k})\delta_k - \sum_{k=1}^{n} f(x_{m_k})\delta_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (f(x_{M_k}) - f(x_{m_k}))\delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon\delta_k$$

$$= \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \delta_k = \varepsilon(b - a).$$

Vrednost spodnje vsote se pri delitvi na več intervalov poveča, vrednost zgornje vsote pa zmanjša.
Ko gre dolžina najdaljšega podintervala proti nič, dobimo, da je zaporedje spodnjih vsot naraščajoče in navzgor omejeno s katerokoli zgornjo vsoto, zaporedje zgornjih vsot pa je padajoče in navzdol omejeno s katerokoli spodnjo vsoto.
Zato imata obe zaporedji isto limito, ki je enaka limiti integralskih vsot, torej določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ obstaja.

Opomba

Pokazali smo, da je vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu integrabilna.
Integrabilnih funkcij pa je še veliko več. Na primer, vsaka odsekoma zvezna funkcija je integrabilna (funkcija je odsekoma zvezna, če ima končno ali števno neskončno točk nezveznosti).

Primer

Izračunajmo integral $\int_1^2 x dx$.

Naj bo $\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$.

Lastnosti določenega integrala

1. Integracijsko spremenljivko lahko poljubno označimo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

2. Če integralu zamenjamo meji, se spremeni predznak

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Integral z enakima mejama je enak nič

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

4. Naj bo $a < c < b$. Funkcija f je na intervalu $[a, b]$ integrabilna natanko tedaj, ko je integrabilna na vsakem izmed podintervalov $[a, c]$ in $[c, b]$. Velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Če sta funkciji f in g integrabilni na intervalu $[a, b]$ in sta α in β poljubni konstanti, potem je integrabilna tudi funkcija $\alpha f + \beta g$ in velja

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$