Matematika 1
23. december 2009

Izrek (Izrek o povprečni vrednosti)

Naj bo m natančna spodnja meja in M natančna zgornja meja funkcije f na intervalu $[a, b]$. Potem obstaja tako število P, da je $m \leq P \leq M$ in

$$P = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Če je funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$, potem obstaja vsaj ena točka $\xi \in [a, b]$, da je

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Dokaz

Velja

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Definiramo

$$P = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

in potem je $m \leq P \leq M$.

Če je f *zvezna, potem zavzame vse vrednosti med* m *in* M*, torej obstaja* $\xi \in [a, b]$*, tako da je* $f(\xi) = P$ *in zato*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Izrek

Naj bo funkcija f integrabilna na intervalu $[a, b]$. Potem je

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Torej je absolutna vrednost integrala manjša ali enaka integralu absolutne vrednosti.

Dokaz

Za vsako integralsko vsoto po trikotniški neenakosti velja

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|(x_k - x_{k-1})$$

pri čemer smo upoštevali, da je
$|x_k - x_{k-1}| = x_k - x_{k-1}$.
V limiti je desna stran neenakosti enaka $\int_a^b |f(x)|dx$.

Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna in zato integrabilna funkcija. Definiramo funkcijo $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Oglejmo si, kaj velja za funkcijo F.

Izrek

Če je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, potem je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

odvedljiva in

$$F'(x) = f(x).$$

Opomba

Funkcija F je zvezna, saj je vsaka odvedljiva funkcija tudi zvezna.

Dokaz

Zapišemo

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Po izreku o povprečni vrednosti obstaja nek $\xi \in [x, x+h]$, *tako da je* $f(\xi) = \frac{1}{x+h-x}\int_x^{x+h} f(t)dt$, *torej je* $f(\xi)h = \int_x^{x+h} f(t)dt$ *in zato*

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi).$$

Sledi

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x).$$

Pokazali smo, da je

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Izrek (Newton - Leibnitzeva formula)

Naj bo f integrabilna funkcija in F poljuben nedoločeni integral funkcije f, torej $\int f(x)dx = F(x)$. Potem je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Dokaz

Funkcija

$$F = \int f(x)dx$$

je nedoločeni integral funkcije f, v prejšnjem izreku pa smo pokazali, da je tudi funkcija

$$\int_a^x f(t)dt$$

vedno nedoločeni integral funkcije f.

Vsi nedoločeni integrali funkcije f se med sabo razlikujejo samo za konstanto, zato je

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Sledi, da je

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C = C,$$

torej

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a).$$

Potem pa je

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a)$$

in zato

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Primer

Izračunajmo

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x-1)dx$
- $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^3}dx$

Tudi v določeni integral lahko vpeljemo novo spremenljivko.

Izrek

Naj bo $g\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ *zvezna, monotona in odvedljiva funkcija na intervalu* $[\alpha,\beta]$. *Potem je*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt,$$

pri čemer je $a = g(\alpha)$ *in* $b = g(\beta)$.

Primer

$$\int_0^1 e^{x^2+1} x dx$$

Prav tako lahko uporabimo pri računanju določenih integralov tudi metodo per partes.

Izrek

Če sta f in g odvedljivi funkciji na intervalu $[a, b]$, potem velja

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

Primer

Izračunajmo

$$\int_0^1 e^{x+1} x dx.$$

Posplošeni integral

Oglejmo si, kako lahko posplošimo definicijo določenega integrala v primeru, ko je funkcija f neomejena, in v primeru, ko je interval, po katerem integriramo funkcijo f, neomejen.

Če funkcija f v enem izmed krajišč intervala $[a, b]$, na primer v b, ni omejena, obstaja pa integral na vsakem manjšem intervalu in obstaja tudi limita, potem pišemo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$

Če je funkcija f integrabilna na vsakem končnem intervalu in obstaja tudi limita, ko meje intervala poljubno povečamo, potem pišemo

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx.$$

Primer

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+2}dx$$