Matematika 1
2. december 2009

Odvodi elementarnih funkcij

Odvod eksponentne funkcije $f(x) = e^x$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $t = e^h - 1$.

Potem je $h = \log(t+1)$ in ko gre h proti 0, gre tudi $t = e^h - 1$ proti 0.

Torej je

$$f'(x) = e^x \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log(t+1)} = e^x \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}\log(t+1)}$$
$$= e^x \lim_{t\to 0} \frac{1}{\log(t+1)^{\frac{1}{t}}} = e^x \frac{1}{\log(\lim_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}})}$$
$$= e^x \frac{1}{\log e} = e^x.$$

Naj bo $f(x) = a^x$.
Potem zapišemo

$$f(x) = a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a}$$

in po pravilu za posredno odvajanje dobimo

$$f'(x) = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

Odvod logaritemske funkcije $f(x) = \log x$.
Inverzna funkcija logaritemske funkcije je eksponentna funkcija $f^{-1}(x) = e^x$, zato je

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

Če je $f(x) = \log_a x$, potem je

$$f'(x) = (\log_a(x))' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{x \log a}.$$

Odvod potenčne funkcije $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$.
Zapišemo

$$f(x) = x^r = e^{\log x^r} = e^{r \log x}$$

in odvajamo po pravilu za posredno odvajanje

$$f'(X) = (e^{r \log x})' = e^{r \log x} r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = r x^{r-1}.$$

Odvod kotne funkcije $f(x) = \sin x$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(\frac{2x+h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \cos(x + \frac{h}{2})\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = \cos x.$$

Podobno dobimo, da je odvod kotne funkcije $f(x) = \cos x$ enak $f'(x) = -\sin x$.

Odvod kotne funkcije $f(x) = \tan x$.
Funkcijo $\tan x$ zapišemo kot kvocient

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

in jo odvajamo po pravilu za odvod kvocienta

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$
$$= \frac{1}{(\cos x)^2}.$$

Odvod ciklometrične funkcije $f(x) = \arcsin x$.
Ker je $f^{-1}(x) = \sin x$
in
$(f^{-1})'(x) = \cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$,
po pravilu za odvod inverzne funkcije dobimo

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \arcsin x)^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Odvod ciklometrične funkcije $f(x) = \arccos x$ dobimo najhitreje, če na obeh straneh odvajamo enakost

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Sledi

$$f'(x) = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Odvod ciklometrične funkcije $f(x) = \arctan x$.
Ker je $f^{-1}(x) = \tan x$
in
$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{(\cos x)^2} = \dfrac{(\sin x)^2 + (\cos x)^2}{(\cos x)^2}$
$= 1 + (\tan x)^2$, je
$f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \dfrac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2}$
$= \dfrac{1}{1+x^2}.$

Odvod hiperbolične funkcije $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ izračunamo s pomočjo pravil za odvajanje vsote. Tako je

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Podobno dobimo, da je $(\cosh x)' = \sinh x$ in $\tanh x = \dfrac{1}{(\cosh x)^2}$.

Tabela odvodov nekaterih elementarnih funkcij

$c' = 0$

$(x^r)' = rx^{r-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \log a$

$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Primer

Odvajajmo funkcijo $f(x) = x^x$.

Diferencial funkcije

Spomnimo se, da je funkcija f odvedljiva v točki x, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon$$

za vsak $h \neq 0$, za katerega velja $|h| < \delta$.
Označimo

$$\eta = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x).$$

Potem velja $\eta \to 0$, ko gre $h \to 0$.

Obe strani enakosti pomnožimo s h in dobimo

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \eta h.$$

Označimo spremembo funkcije f z $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ in spremembo spremenljivke x z $\Delta x = h$.
Torej je

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + \eta \Delta x.$$

Izraz $f'(x)\Delta x$ imenujemo diferencial funkcije f in ga označimo z $df = f'(x)\Delta x$.
Če je $f(x) = x$, dobimo, da je $df = dx = 1\Delta x$ in zato

$$df = f'(x)dx$$

oziroma

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Ker gre $\eta \to 0$, ko gre $h \to 0$, je izraz ηh majhen v primerjavi z $f'(x)h$ za majhne vrednosti h.
Torej je

$$f(x+h) - f(x) \doteq f'(x)h,$$

oziroma

$$f(x+h) \doteq f(x) + f'(x)h.$$

Primer

S pomočjo diferenciala približno določite vrednost $\cos 151^\circ$.
Uporabili bomo formulo $f(x+h) \doteq f(x) + f'(x)h$.
Za kot $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$ poznamo vrednosti kotnih funkcij.
Zato vzamemo za $x = \frac{5\pi}{6}$ in za $h = \Delta x = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$.
Torej je

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \doteq \cos\frac{5\pi}{6} + \left(-\sin\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{180}.$$

Sledi

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \doteq -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = -0.87475.$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) = -0.87462.$$

Geometrijski pomen odvoda

Vrednost odvoda funkcije v točki x_0 je natanko smerni koeficient tangente na graf krivulje f.
Z diferencialom funkcije v točki x aproksimiramo vrednost funkcije v okolici točke x z vrednostmi tangente na funkcijo v okolici točke x.
Kot med krivuljama je enak kotu med tangentama na ti dve krivulji v njunem presečišču.
Če se grafa funkcij f in g sekata pri x_0 pod pravim kotom, potem je $f'(x_0) = -\frac{1}{g'(x_0)}$.

Višji odvodi

Če v točki x odvedljivo funkcijo f odvajamo, dobimo funkcijo $g = f'$.
Če je dobljena funkcija g ponovno odvedljiva v točki x, potem pravimo, da je f dvakrat odvedljiva funkcija v točki x in pišemo $g' = f''$.
Funkcijo f'' imenujemo drugi odvod funkcije f.
Če je funkcija f'' odvedljiva v x, jo lahko ponovno odvajamo in dobimo tretji odvod funkcije f v točki x...

Če lahko funkcijo f n-krat odvajamo v točki x, potem pravimo, da je f n-krat odvedljiva v točki x in pišemo

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{(dx)^n}.$$

Funkcije, ki jih lahko poljubnokrat odvajamo, imenujemo neskončnokrat odvedljive funkcije (npr. $f(x) = e^x$).