Matematika 1
8. december 2009

Višji odvodi nekaterih elementarnih funkcij

- $f(x) = e^x$
  $f^{(n)}(x) = e^x$
- $f(x) = x^n$
  $f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(m-k+1)x^{n-k}$
  $f^{(n)}(x) = n!$
  $f^{(m)}(x) = 0,\ m > n$
- $f(x) = \sin x$
  $f'(x) = \cos x$
  $f''(x) = -\sin x$
  $f'''(x) = -\cos x$
  $f^{(4)}(x) = \sin x$

Lastnosti odvedljivih funkcij

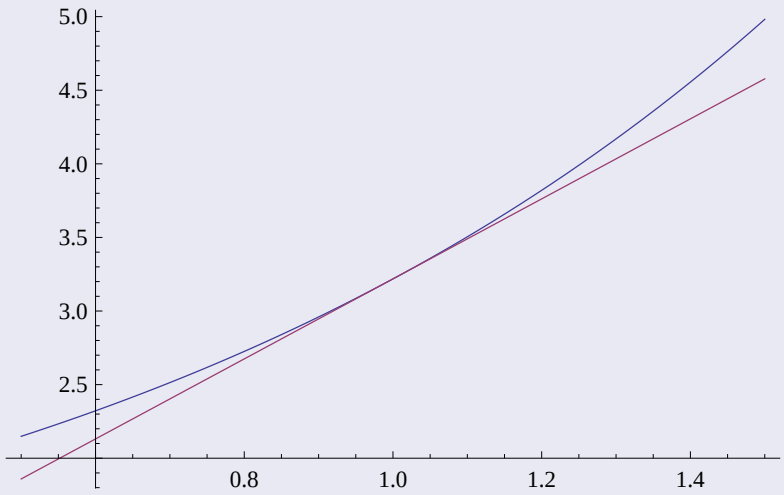
Oglejmo si nekaj osnovnih izrekov o odvedljivih funkcijah, ki jih uporabljamo pri proučevanju lastnosti funkcij.

Izrek

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *odvedljiva funkcija in naj bo* $f'(x_0) > 0$, $x_0 \in (a, b)$. *Potem je funkcija* f *v točki* x_0 *naraščajoča. Če je* $f'(x_0) < 0$, $x_0 \in (a, b)$, *potem je funkcija* f *v točki* x_0 *padajoča.*

Dokaz

Naj bo $f'(x_0) > 0$.
Potem je smerni koeficient tangente na graf funkcije f *v točki* x_0 *pozitiven, torej tangenta, ki najbolje aproksimira funkcijo v točki* x_0, *narašča.*



Natančneje. Označimo

$$\eta = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0).$$

Ker je f odvedljiva v točki x_0, velja $\eta \to 0$, ko gre $h \to 0$.
Torej je

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h(f'(x_0) + \eta).$$

Za dovolj majhen h je $|\eta| < f'(x_0)$, torej je $f'(x_0) + \eta > 0$.

Če je $|h|$ majhno število, je

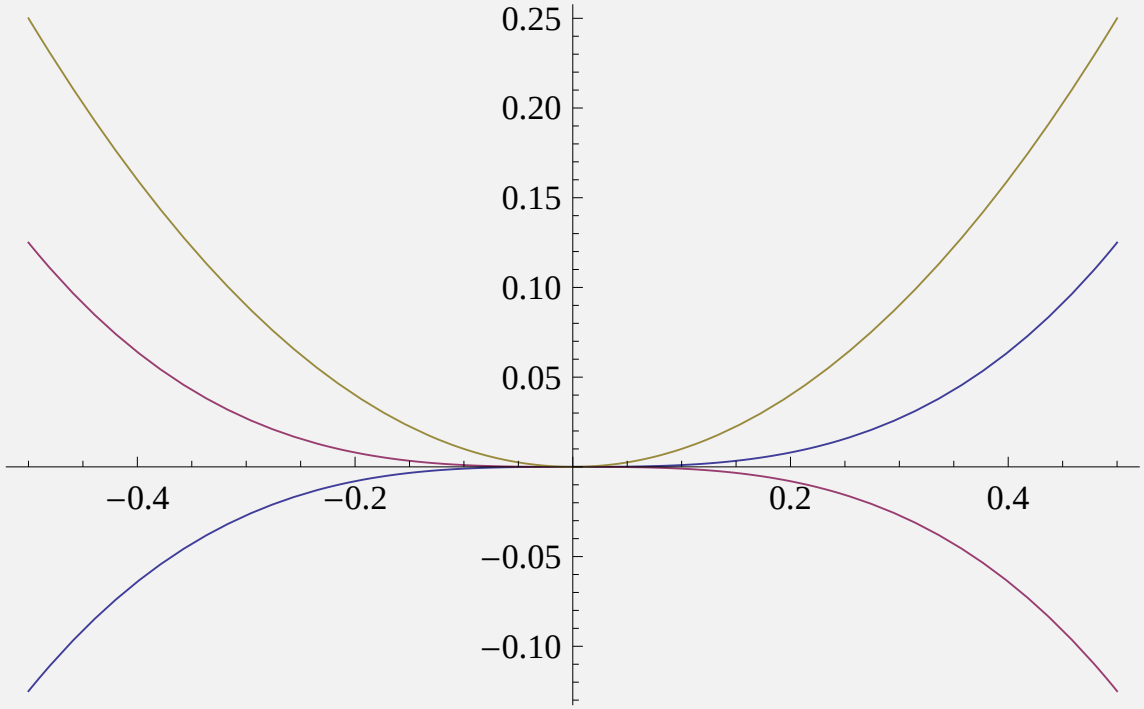
$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0, \quad \text{za } h > 0,$$

in

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0, \quad \text{za } h < 0.$$

Dokazali smo, da je v primeru, ko je $f'(x_0) > 0$, funkcija f v točki x_0 naraščajoča.
Podobno pokažemo, da je v primeru, ko je $f'(x_0) < 0$, funkcija f v točki x_0 padajoča.

Kaj lahko povemo o obnašanju odvedljive funkcije v okolici točke x_0, za katero velja, da je $f'(x_0) = 0$?



Definicija

Če za odvedljivo funkcijo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ velja, da je $f'(x_0) = 0$ za $x_0 \in (a, b)$, potem pravimo, da je x_0 stacionarna točka funkcije f.

Tangenta na graf funkcije v stacionarni točki je vzporedna abscisni osi.

Definicija

Funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ima v točki $x_0 \in (a,b)$ lokalni minimum, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ za vsak $|h| < \delta$.

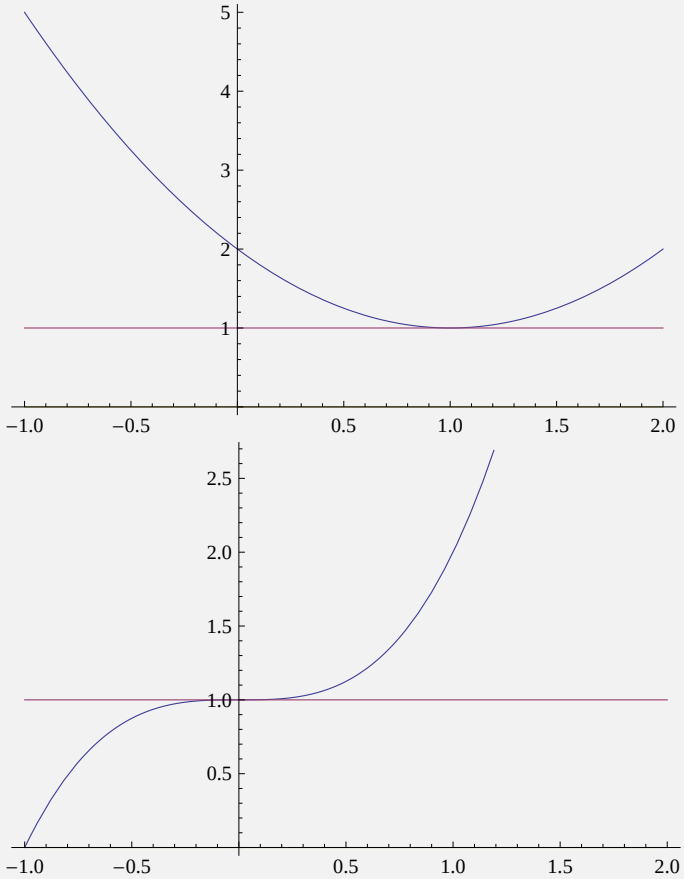
Funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ima v točki $x_0 \in (a,b)$ lokalni maksimum, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$ za vsak $|h| < \delta$.
Če ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum ali lokalni maksimum, potem pravimo, da ima v točki x_0 lokalni ekstrem.

Izrek (Fermatov izrek)

Če ima odvedljiva funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ v točki $x_0 \in (a,b)$ lokalni ekstrem, potem je $f'(x_0) = 0$, torej je v točki x_0 stacionarna točka.

Opomba

Obratno ni nujno res, na primer, $f(x) = x^3 + 1$ ima v točki $x_0 = 0$ stacionarno točko, vendar funkcija f v tej točki nima lokalnega ekstrema.



Dokaz

Denimo, da ima funkcija f v točki x_0 lokalni minimum. To pomeni, da za majhne vrednosti h velja $f(x_0+h)-f(x_0)>0$.

Torej je

$$\lim_{h\nearrow 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0$$

in

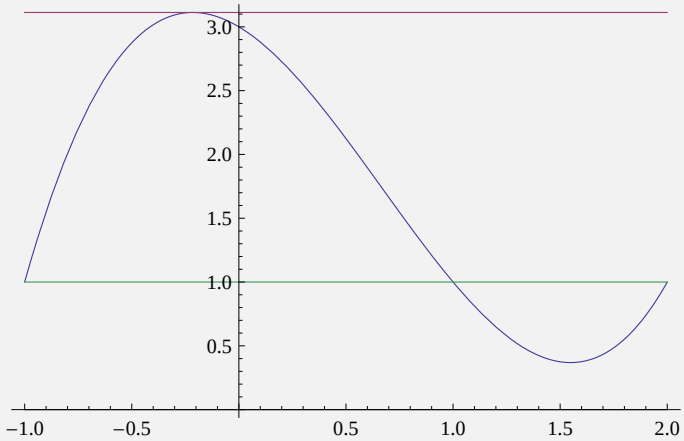
$$\lim_{h\searrow 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0.$$

Ker je f v točki x_0 odvedljiva, torej obstaja limita diferenčnega kvocienta, morata biti leva in desna limita enaki.
To pa pomeni, da sta leva in desna limita enaki 0, torej $f'(x_0) = 0$.

Na enak način dokažemo izrek, če je v x_0 lokalni maksimum.

Izrek (Rolleov izrek)

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in naj bo $f(a) = f(b)$. Potem obstaja vsaj ena točka $x_0 \in (a, b)$, tako da je $f'(x_0) = 0$.



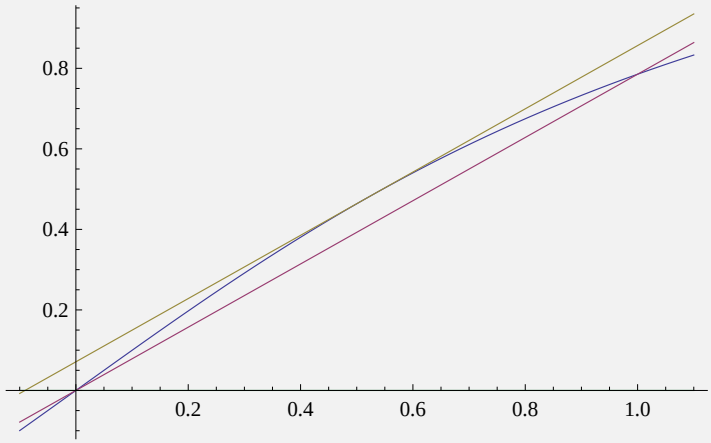
Dokaz

Vsaka odvedljiva funkcija je tudi zvezna, zvezna funkcija pa na zaprtem intervalu zavzame svoj minimum $f(x_m) = m$ *in svoj maksimum* $f(x_M) = M$. *Če je* $m = M$, *je funkcija* f *konstantna in zato* $f'(x) = 0$ *za vsak* $x \in [a, b]$.
Če pa je $m < M$, *potem je* $x_m \neq x_M$ *in zato vsaj eno izmed števil* x_m, x_M *leži na intervalu* (a, b), *saj je* $f(a) = f(b)$. *Označimo to število z* $x_0 \in (a, b)$. *Odvedljiva funkcija* f *ima potem v točki* x_0 *lokalni ekstrem in zato je po Fermatovem izreku* $f'(x_0) = 0$.

Izrek (Lagrangeov izrek)

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *odvedljiva funkcija. Potem obstaja vsaj ena točka* $x_0 \in (a, b)$, *tako da je*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Dokaz

Definiramo funkcijo

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ker je f odvedljiva funkcija, je tudi g odvedljiva funkcija. Izračunamo

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$$

in

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$
$$= f(b) - f(b) + f(a) = f(a).$$

Torej ima funkcija g v krajiščih intervala $[a, b]$ enake vrdnosti in zato po Rollovem izreku obstaja $x_0 \in (a, b)$, tako da je $g'(x_0) = 0$.
Ker je

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

in

$$g'(x_0) = 0,$$

je

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Izrek

Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *odvedljiva funkcija in naj bo* $f'(x) = 0$ *za vsak* $x \in [a,b]$. *Potem je* f *konstantna funkcija.*

Dokaz

Naj bo $x \in [a,b]$ *poljuben. Za funkcijo* f *na intervalu* $[x,b]$ *uporabimo Lagarangeov izrek, torej obstaja tak* $x_0 \in (x,b)$, *da je* $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$. *Ker je* $f'(x_0) = 0$, *je* $f(x) = f(b)$ *za vsak* $x \in [a,b]$, *torej je* f *konstantna funkcija.*

Izrek

Naj bosta funkciji $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *odvedljivi in naj bo* $f'(x) = g'(x)$ *za vsak* $x \in [a,b]$. *Potem obstaja konstanta* $c \in \mathbb{R}$, *tako da je* $f(x) = g(x) + c$.

Dokaz

Definiramo funkcijo $h(x) = f(x) - g(x)$. *Potem je* $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ *za vsak* $x \in [a,b]$. *Po prejšnjem izreku je* h *konstantna funkcija, torej je* $h(x) = c$ *oziroma* $f(x) = g(x) + c$ *za vsak* $x \in [a,b]$.