Matematika 1
7. oktober 2009

Množica naravnih števil $\mathbb{N}$ je urejena, torej za poljubni dve naravni števili $a, b \in \mathbb{N}$ velja

$$a < b \quad \text{ali} \quad b < a.$$

Na množici naravnih števil sta definirani operaciji seštevanja in množenja.
Za ti dve operaciji veljajo naslednja pravila:

- $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$, komutativnost
- $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, asociativnost
- $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, distributivnost

Množica naravnih števil je zaprta za seštevanje in množenje:

- vsota poljubnih dveh naravnih števil je zopet naravno število
- zmnožek poljubnih dveh naravnih števil je zopet naravno število

Ni pa to res na primer za odštevanje. Razlika dveh naravnih števil ni več nujno naravno število.

1.2. Cela števila

Množico celih števil označimo z

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Lastnosti:

- Množica celih števil je zaprta za seštevanje in množenje.
- Vsako celo število ima svojega neposrednega predhodnika in neposrednega naslednika.
- Ne vsebuje pa vsaka podmnožica celih števil najmanjšega elementa.
  (Ne moremo uporabiti matematične indukcije.)

Za operacijo seštevanja je število 0 nevtralni element, kar pomeni, da je

$$a + 0 = a \quad \text{za vsak } a \in \mathbb{Z}.$$

Vsak element $a \in \mathbb{Z}$ ima nasprotni ali inverzni element $-a$ za seštevanje. To pomeni, da za vsako celo število $a \in \mathbb{Z}$ obstaja tako celo število $-a \in \mathbb{Z}$, da je njuna vsota enaka nevtralnemu elementu za seštevanje, torej

$$a + (-a) = 0.$$

Tudi za operacijo množenja obstaja nevtralni element ali enota in sicer število $1 \in \mathbb{Z}$. To pomeni, da je

$$a \cdot 1 = a \quad \text{za vsak} \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Ne obstaja pa za vsako celo število $a \in \mathbb{Z}$ obratni element oziroma inverz za množenje, torej tako število $b \in \mathbb{Z}$, da bi bilo

$$a \cdot b = 1.$$

Drugače povedano, če delimo dve celi števili, potem rezultat ni več nujno celo število.

1.3. Racionalna števila

Ulomek je urejen par celih števil a in b, $b \neq 0$, ki ga običajno zapišemo v obliki $\frac{a}{b}$.
Število a imenujemo števec, število b pa imenovalec ulomka $\frac{a}{b}$.
Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ predstavljata isto racionalno število, torej $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, če je $ad = bc$.
Množico racionalnih števil označimo s

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Na množici racionalnih števil definiramo:

- operacijo seštevanja s predpisom

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

- operacijo množenja s predpisom

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Hitro lahko preverimo, da sta tako definirani operaciji asociativni, komutativni in distributivni.

Preverimo na primer asociativnost seštevanja:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f}=\frac{(ad+bc)f+bde}{bdf}$$
$$=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$$

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}+\frac{cf+de}{df}=\frac{adf+b(cf+de)}{bdf}$$
$$=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$$

V množici racionalnih števil za vsako neničelno racionalno število $\frac{a}{b}$ obstaja njegovo obratno ali inverzno število za množenje $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$.
Množica racionalnih števil je zaprta za deljenje in sicer

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Množica racionalnih števil je urejena.
Za števili $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ velja, da je

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad \text{natanko tedaj, ko je} \quad ad \leq bc.$$

Vsako celo število $a \in \mathbb{Z}$ lahko predstavimo kot racionalno število $\frac{a}{1}$, torej je $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.
Operaciji seštevanja in množenja na celih številih in racionalnih številih se ujemata, zato pravimo, da je množica racionalnih števil razširitev množice celih števil.

Na primer, naj bosta $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a \cdot 1 + 1 \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{a+b}{1} = a + b$$

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{ab}{1} = ab$$

Nima pa racionalno število enolično določenega predhodnika ali naslednika.
Na primer, če sta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ poljubni različni racionalni števili, potem je aritmetična sredina teh dveh števil

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}=\frac{ad+bc}{2bd}$$

racionalno število, ki leži med števili $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$.

Vsako racionalno število lahko predstavimo s točko na številski premici.
Vendar pa ne moremo vsake točke na številski premici predstaviti z racionalnim število. Če na primer na številski premici označimo razdaljo, ki je enaka dolžini diagonale enotskega kvadrata potem točka, ki je po Pitagorovem izreku na dolžini $\sqrt{2}$ od 0, ni racionalno število.

Izrek

Število $\sqrt{2}$ ni racionalno število.

Dokaz.

Izrek bomo dokazali s protislovjem. To pomeni, da bomo privzeli, da je $\sqrt{2}$ racionalno število, nato pa pri tej predpostavki s pravilnim sklepanjem prišli do protislovja. Ker bodo vsi sklepi pravilni, na koncu pa bomo prišli do protislovja, pomeni, da bo naša začetna predpostavka napačna.

Privzemimo torej, da je $\sqrt{2}$ racinalno število in ga lahko zato zapišemo v obliki ulomka

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad \text{kjer sta} \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

Lahko tudi privzamemo, da je ulomek $\frac{a}{b}$ okrajšan (če ni, ga okrajšamo). Števili a in b sta potem tuji.

Enakost $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ kvadriramo in dobimo

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

oziroma

$$2b^2 = a^2.$$

Naravno število a^2 je torej sodo, kar je mogoče le, če je a tudi sodo število. Vsako sodo število pa lahko zapišemo v obliki $a = 2k$, kjer je $k \in \mathbb{N}$.

Sledi, da je

$$2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

in zato

$$b^2 = 2k^2.$$

To pa pomeni, da je b^2 sodo število in zato mora biti tudi b sodo število.
Sledi, da sta tako a kot tudi b sodi števili.
Prišli smo do protislovja, saj smo privzeli, da sta a in b tuji števili.
Torej je bila začetna predpostavka napačna in $\sqrt{2}$ ni racionalno število.

1.4. Realna števila

Videli smo, da ne moremo vsakega racionlnega števila predstaviti s točko na realni osi.
Množica racionalnih števil ni polna, zato jo dopolnimo do množice realnih števil, ki jo označimo z $\mathbb{R}$.
Formalna razširitev ni preprosta, zato je ne bomo naredili.

Izrek

Vsako realno število je predstavljeno z natanko eno točko na številski premici in vsaka točka na številski premici predstavlja natanko eno realno število.

Torej obstaja bijektivna preslikava med množico realnih števil in množico točk na številski premici.

Množica realnih števil $\mathbb{R}$ je urejena. Za realni števili a in b velja, da je $a < b$, če je število a na številski premici levo od števila b.

Kljub temu, da vseh točk na številski premici ne moremo predstaviti z racionalnimi števili, pa lahko poljubno blizu kateregakoli realnega števila na številski premici najdemo neko racionalno število. To lahko storimo na primer z metodo bisekcije. Naj bo $r \in \mathbb{R}$ poljubno realno število ter a in b taki racionalni števili, da je $a < r < b$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tako racionalno število $c \in \mathbb{Q}$, da je $-\varepsilon < r - c < \varepsilon$.

Pravimo, da je množica racionalnih števil gosta.

Če je

$$r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

potem pravimo, da je r iracionalno število.