Matematika 1
13. oktober 2009

Kako zapišemo realno število?

Realna števila običajno zapišemo v decimalni obliki.

Baza decimalnega sistema je število 10.

V tem primeru $r \in \mathbb{R}$ zapišemo v obliki

$$r = a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + \ldots.$$

Lahko pa je baza tudi kakšno drugo število, največkrat se uporablja za bazo število 2, redkeje tudi 8 ali 16.

Primer

Zapišimo v binomskem zapisu realno število 21.7.
Najprej pretvorimo celi del števila:

- največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 21, je $2^4 = 16$, torej $21 = 1 \cdot 2^4 + 5$.
- največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 5, je $2^2 = 4$, torej $21 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1$.
- največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 1, je $2^0 = 1$, torej $21 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

Izračunali smo, da je

$$21_{(10)} = 10101_{(2)}.$$

Pretvorimo še neceli del števila:

- največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 0.7, je $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$, torej $0.7 = 1 \cdot 2^{-1} + 0.2$.
- največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 0.2, je $2^{-3} = 0.125$, torej $0.7 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0.075$.
- največja potenca števila 2, ki je manjša ali enaka 0.075, je $2^{-4} = 0.0625$, torej $0.7 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0.0125$.

Opazimo, da število 0.7 nima končnega binarnega zapisa, torej je

$$0.7_{(10)} = 0.1011\ldots_{(2)}\,.$$

Torej

$$21.7_{(10)} = 10101.10111\ldots_{(2)}\,.$$

Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ definiramo absolutno vrednost realnega števila $r \in \mathbb{R}$ s predpisom:

$$|r| = r, \quad \text{če je} \quad r \geq 0$$

in

$$|r| = -r, \quad \text{če je} \quad r \leq 0.$$

Naj bo $c \geq 0$. Potem je

$$|a| \leq c$$

natanko tedaj, ko je

$$-c \leq a \leq c.$$

Dokaz. Če je $a \geq 0$, je $a = |a| \leq c$, če pa je $a \leq 0$, je $-a = |a| \leq c$, torej $-c \leq a$.

Za absolutno vrednost veljajo naslednje lastnosti:

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|-a| = |a|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$, trikotniška neenakost
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Dokaz. Neenakost

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

bomo pokazali tako, da bomo preverili, da je

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Zapišemo

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|,$$

torej je

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Podobno zapišemo

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|,$$

torej je

$$-|b - a| = -|a - b| \leq |a| - |b|.$$

Primer

Poišči vse vrednosti x, za katere velja

$$|x-5|<2.$$

Velja $|x-5|<2$, torej je

$$-2<x-5<2$$

in zato

$$3<x<7.$$

1.5. Kompleksna števila

Hitro se prepričamo, da nobeno realno število ni rešitev enačbe

$$x^2 = -1.$$

To je eden izmed motivov, da razširimo množico realnih števil do množice kompleksnih števil.

Spomnimo se, da smo ulomek definirali kot urejeni par celih števil $\frac{a}{b}$, prvo celo število a je števec, drugo celo število b pa imenovalec ulomka.
Podobno definiramo kompleksno število kot par realnih števil (a, b), prvo realno število a imenujemo realni del, drugo realno število b pa imaginarni del kompleksnega števila.
Kompleksni števili (a, b) in (c, d) sta enaki natanko tedaj, ko imata enaka realna dela in enaka imaginarna dela, torej $a = c$ in $b = d$.
Množico kompleksnih števil označimo s $\mathbb{C}$.

Na množici kompleksnih števil definiramo:

- operacijo seštevanja s predpisom

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

- operacijo množenja s predpisom

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Hitro lahko preverimo, da sta tako definirani operaciji asociativni, komutativni in distributivni.

Preverimo na primer asociativnost množenja:

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) = (ac-bd, ad+bc)\cdot(e,f)$$

$$= ((ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e)$$

$$= (ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce)$$

$$(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f)) = (a,b)\cdot(ce-df, cf+de)$$

$$= (a(ce-df)-b(cf+de), a(cf+de)+b(ce-df))$$

$$= (ace-adf-bcf-bde, acf+ade+bce-bdf)$$

Vsako realno število $a \in \mathbb{R}$ lahko predstavimo kot kompleksno število $(a, 0)$, torej je $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
Operaciji seštevanja in množenja na realnih in kompleksni številih se ujemata, zato pravimo, da je množica kompleksnih števil razširitev množice realnih števil.

Na primer, naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) = a + b$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0) = ab$$

Rešimo enačbo $x^2 = -1$ v okviru množice kompleksnih števil.

$$(a, b) \cdot (a, b) = (-1, 0).$$

$$(a^2 - b^2, ab + ba) = (-1, 0)$$

Iz enakosti imaginarnih delov sledi $ab = 0$, torej je $a = 0$ ali $b = 0$.
Če je $b = 0$, potem dobimo $a^2 = -1$, kar pa ni mogoče, saj je a realno število.
Če pa je $a = 0$, dobimo $b^2 = 1$, torej je $b = 1$ ali $b = -1$.

Enačba $x^2 = -1$ ima torej v okviru kompleksnih števil dve rešitvi $(0, 1)$ in $(0, -1)$.

Kompleksno število $(0,1)$ označimo z i in ga imenujemo imaginarna enota.
Ker je

$$(b,0)\cdot(0,1)=(b\cdot 0-0\cdot 1,b)=(0,b),$$

je

$$(a,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)$$

in zato lahko vsako kompleksno število predstavimo v obliki

$$(a,b)=a+b\cdot\mathrm{i}.$$

Če kompleksna števila zapišemo v obliki $a + b\mathrm{i}$, potem velja:

- $\mathrm{i}^2 = -1$
- $a + b\mathrm{i} + c + d\mathrm{i} = a + c + (b + d)\mathrm{i}$
- $(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = ac - bd + (ad + bc)\mathrm{i}$
- Realni del kompleksnega števila $\mathrm{Re}(a + b\mathrm{i}) = a$
- Imaginarni del kompleksnega števila $\mathrm{Im}(a + b\mathrm{i}) = b$

  Pozor!