Matematika 1
14. oktober 2009

Na množici kompleksnih števil $\mathbb{C}$ je definirano konjugiranje.
Naj bo $a + b\mathrm{i}$ kompleksno število. Potem je njegova konjugirana vrednost

$$\overline{a + b\mathrm{i}} = a - b\mathrm{i}.$$

Naj bosta z in w kompleksni števili. Hitro se lahko prepričamo, da velja:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Na primer, prepričajmo se, da je $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
Naj bo $z = a + b\mathrm{i}$ in $w = c + d\mathrm{i}$. Potem je:

$$\overline{(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i})} = \overline{ac - bd + (ad + bc)\mathrm{i}}$$

$$= ac - bd - (ad + bc)\mathrm{i}$$

$$= (a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})$$

$$= \overline{(a + b\mathrm{i})} \cdot \overline{(c + d\mathrm{i})}$$

Naj bo $z = a + b\mathrm{i}$ kompleksno število. Potem velja:

- $z + \overline{z} = a + b\mathrm{i} + a - b\mathrm{i} = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$,
- $z - \overline{z} = a + b\mathrm{i} - (a - b\mathrm{i}) = 2b\mathrm{i} = 2\mathrm{Im}(z)\mathrm{i}$,
- $z \cdot \overline{z} = (a + b\mathrm{i}) \cdot (a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2$,
  torej je
  $$z \cdot \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = 1.$$

Sledi, da je za kompleksno število $z = a + b\mathrm{i}$ njegov inverzni element za množenje enak

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + b\mathrm{i}} = \frac{a - b\mathrm{i}}{(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})} = \frac{a - b\mathrm{i}}{a^2 + b^2}.$$

Torej dve kompleksni števili $w = c + d\mathrm{i}$ in $z = a + b\mathrm{i}$ delimo po pravilu

$$w : z = \frac{w}{z} = \frac{c + d\mathrm{i}}{a + b\mathrm{i}} = \frac{(c + d\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})}{(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})}$$

$$= \frac{(c + d\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})}{a^2 + b^2}.$$

Primer

Izračunajmo

$$\frac{2-3\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\overline{(-1+\mathrm{i})}} : (3-4\mathrm{i}).$$

Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = a + b\mathrm{i}$ je definirana z enakostjo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Vemo, da je $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$, torej je

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Za absolutno vrednost veljajo naslednje lastnosti:

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$, trikotniška neenakost

Kompleksna števila lahko predstavimo kot točke v ravnini.
Na abscisno os nanašamo realni del kompleksnega števila, na ordinatno os pa imaginarni del kompleksnega števila.
Absicno os imenujemo realna os, ordinatno os imenujemo imaginarna os, ravnino pa kompleksna ravnina.

Kompleksno število $a + b\mathrm{i}$ predstavimo v kompleksni ravnini s kartezičnima koordinatama (a, b).

Lahko pa kompleksno število $a + b\mathrm{i}$ predstavimo tudi s polarnimi koordinatami:

- dolžina krajevnega vektorja do točke (a, b), torej oddaljenost točke (a, b) od koordinatnega izhodišča

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + b\mathrm{i}|$$

- polarni kot φ, torej kot med abscisno osjo in krajevnim vektorjem do točke (a, b), za katerega velja

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

Torej je

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}.$$

Pozor!

Z enakostjo $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ polarni kot ni enolično določen.

Primer

Za $z = 1 + \mathrm{i}$ je polarni kot $\varphi = \frac{\pi}{4}$, za $w = -1 - \mathrm{i}$ je polarni kot $\psi = \frac{5\pi}{4}$, v obeh primerih pa je $\tan\varphi = \tan\psi = 1$.

Polarni zapis kompleksnega števila je

$$a + b\mathrm{i} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Opomba

Dve kompleksni števili $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ in $w = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ sta enaki, če je

- $r = \rho$
- $\phi = \psi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Primer

Zapišimo v polarni obliki kompleksno število $z = -1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$.

Oglejmo si, kako množimo dve kompleksni števili, dani v polarni obliki.

Naj bo $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ in $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$.

Potem je

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ &\qquad + \mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \end{aligned}$$

Torej kompleksni števili zmnožimo tako, da zmnožimo njuni absolutni vrednosti, polarna kota pa seštejemo.
Podobno z uporabo adicijskih izrekov pokažemo, da je

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

V posebnem primeru, ko je
$z_1 = z_2 = z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, dobimo

$$z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + \mathrm{i}\sin(2\varphi)),$$

oziroma Moivrovo formulo

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)),$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$.

Primer

Naj bo $z = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$. Izračunajmo z^8.

Naj bo z dano kompleksno število. Poiščimo vse rešitve enačbe

$$w^n = z.$$

Opomba. Videli bomo, da ima ta enačba n rešitev. Izrazu, da je w n-ti koren števila z se bomo izogibali.

Zapišimo kompleksni števili z in w v polarni obliki:
$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$.
Potem je po Moivrovi formuli
$\rho^n(\cos(n\psi) + \mathrm{i}\sin(n\psi)) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$.

Sledi, da je

- $\rho = r^{\frac{1}{n}}$
- $\psi = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

Kljub temu, da je k lahko poljubno celo število, dobimo zaradi periodičnosti funkcij sinus in kosinus samo n različnih vrednosti izraza
$\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}$.

Enačba $w^n = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ ima n rešitev in sicer

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

kjer je $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Primer

Poiščimo vse rešitve enačbe $w^4 = -1 + \mathrm{i}$.

Primer