Matematika 1
10. november 2009

Definicija

Vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je absolutno konvergentna, če je konvergentna vrsta

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|.$$

Vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je pogojno konvergentna, če je konvergentna, ni pa absolutno konvergentna. Torej je vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergentna, vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ pa divergentna.

Izrek

Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna vrsta.

Skica dokaza

Vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *je po Cauchyevem kriteriju konvergentna, če je*

$$|a_n + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

To pa je res, saj je $|a_n + \ldots + a_{n+k}| \leq |a_n| + \ldots + |a_{n+k}| < \varepsilon$, *pri čemer smo pri drugi oceni upoštevali, da je vrsta absolutno konvergentna.*

Definicija

Vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je alternirajoča, če je $a_i a_{i+1} < 0$ za vsak $i \in \mathbb{N}$.

Izrek (Leibnitzev kriterij)

Če pri alternirajoči vrsti $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *njeni členi po absolutni vrednosti padajo proti nič in je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *potem je vrsta* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *konvergentna.*

Primer

Preverimo konvergentnost vrste

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}.$$

Opomba

Če seštejemo n-členov alternirajoče vrste, katere členi gredo po absolutni vrednosti proti nič, potem se vsota vrste od vsote n členov razlikuje za manj kot a_{n+1}.

Funkcije

Definicija

Preslikava $f\colon A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu a iz množice A priredi natanko določen element $f(a)$ iz množice B. Pravimo, da je $f(a)$ slika elementa a.
Množico A imenujemo definicijsko območje ali domena preslikave f, množico $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ pa zaloga vrednosti preslikave f.

Definicija

Graf preslikave f je množica

$$\Gamma(f) = \{(a, f(a)) : a \in A\}.$$

Primer

Naj bo $A \subset \mathbb{R}^3$ in $B = \mathbb{R}^3$ množica vseh vektorjev. Preslikava f naj bo predpis, ki v nekem trenutku vsaki točki iz območja A priredi vektor hitrosti, ki jo ima posamezna točka v tistem trenutku.

Preslikava $f\colon A \to B$ je injektivna, če različne elemente $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, preslika v različne elemente množice B, torej $f(a_1) \neq f(a_2)$.
Preslikava $f\colon A \to B$ je surjektivna, če za vsak element $b \in B$ obstaja tak element $a \in A$, da je b slika elementa a, torej $f(a) = b$.
Preslikava f je bijektivna, če je injektivna in surjektivna.

Definicija

Naj bo $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$. Preslikavo $g \circ f\colon A \to C$, definirano s predpisom

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)),$$

imenujemo kompozitum preslikav g in f.

Definicija

Preslikavo $f\colon D \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$, imenujemo realna funkcija ene spremenljivke.

Funkcijo lahko podamo na več načinov:

- opisno z besedilom
- s tabelo
- grafično
- analitično

Analitično lahko podamo funkcijo:

- eksplictno, torej $y = f(x)$
- implicitno, torej $F(x, y) = 0$
- parametrično, torej $x = x(t)$, $y = y(t)$

Primer

Zapišimo funkcijo, katere graf je zgornja polovica krožnice s polmerom a:

- $y = \sqrt{a^2 - x^2}$
- $x^2 + y^2 - a^2 = 0$
- $x = a \cos t$, $y = a \sin t$

Graf funkcije $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je torej podmnožica ravnine $\mathbb{R}^2$.
Neka podmnožica ravnine je lahko graf neke funkcije, če vsaka premica, vzporedna z ordinatno osjo, seka to podmnožico v največ eni točki.
Grafi funkcij, ki jih bomo obravnavali, bodo največkrat krivulje v ravnini.

Trditev

Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je injektivna, če vsaka premica, vzporedna z abscisno osjo, seka graf funkcije f največ enkrat.
Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je surjektivna, če vsaka premica, vzporedna z abscisno osjo, seka graf funkcije f vsaj enkrat.

Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, injektivna funkcija. Potem funkcijo f^{-1}, ki slika iz množice $f(D)$ v množico D, in za katero velja $f^{-1}(f(x)) = x$ za vsak $x \in D$, imenujemo inverzna funkcija funkcije f.

Inverzno funkcijo f^{-1} eksplicitno podane funkcije f izračunamo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk $y = f(x)$, torej $x = f(y)$, in nato izrazimo y kot funkcijo x.
Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo tako, da prezrcalimo graf funkcije f prek simetrale lihih kvadrantov.

Primer

Naj bo funkcija f podana s predpisom $f(x) = \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$. Izračunajmo inverzno funkcijo f^{-1}.

Za funkciji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lahko izračunamo kompozitum $f \circ g$ in $g \circ f$.
V splošnem ta dva kompozituma nista enaka, torej kompozitum funkcij ni komutativna relacija:

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Primer

Naj bo $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{2}{x}$.
Izračunajmo $f \circ g$ in $g \circ f$.

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$.

- Funkcija f je navzgor omejena, če obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \leq M$ za vsak $x \in D$.
- Funkcija f je navzdol omejena, če obstaja tak $m \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \geq m$ za vsak $x \in D$.
- Funkcija f je omejena, če obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je $|f(x)| \leq M$ za vsak $x \in D$.

Podobno kot pri zaporedjih lahko definiramo natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo funkcije.

Funkcija f je naraščajoča, če je $f(x) \leq f(y)$ za poljubna $x, y \in D$, za katera velja $x < y$. Če je $f(x) < f(y)$, je f strogo naraščajoča.
Funkcija f je padajoča, če je $f(x) \geq f(y)$ za poljubna $x, y \in D$, za katera velja $x < y$. Če je $f(x) > f(y)$, je f strogo naraščajoča.

Funkcija f je monotona, če je bodisi naraščajoča, bodisi padajoča.
Funkcija f je strogo monotona, če je bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča.
Strogo monotone funkcije so injektivne, zato lahko definiramo njihov inverz.

Primer

$f(x) = x^3 + 1.$

Ničla funkcije f je vsako tako število $x_0 \in D$, za katero velja, da je $f(x_0) = 0$.

Definicija

Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je soda, če je

$$f(-x) = f(x)$$

za vsak $x \in D$.

Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os.

Primer

$$f(x) = x^2 + 1$$

Definicija

Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je liha, če je

$$f(-x) = -f(x)$$

za vsak $x \in D$.

Graf lihe funkcije je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

Primer

$$f(x) = -x^3 + 2x$$

Opomba

Večina funkcij ni ne lihih in ne sodih.

Naj bosta $f\colon D \to \mathbb{R}$ in $g\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, funkciji, definirani na istem definicijskem območju. Potem lahko definiramo funkcije

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, kjer je $g(x) \neq 0$ za vsak $x \in D$.

Pregled elementarnih funkcij

Potence so funkcije oblike

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Polinom je funkcija oblike

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0.$$

$a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$.
Polinome ponavadi označimo s črko p, torej $f = p$.
Število n imenujemo stopnja polinoma p.

Polinom stopnje n ima največ n realnih ničel.
Če ima polinom p točno n realnih ničel $x_1, \ldots, x_n$, potem lahko polinom p zapišemo v obliki

$$p(x) = a_n(x - x_n) \ldots (x - x_1).$$

Nekatere ničle polinoma so lahko večkratne.

Ničle polinoma lahko poskusimo poiskati s Hornerjevim algoritmom.

Primer

Narišimo polinom

$$p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4.$$