Matematika 1
20. oktober 2009

Definicija

Zaporedje realnih števil je predpis, ki vsakemu naravnemu številu priredi realno število.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & \dots \end{array}$$

Realno število a_n imenujemo n-ti člen zaporedja, število n pa indeks člena a_n.
Členi zaporedja so torej urejeni in jih lahko zapišemo po vrsti

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kratko zapišemo

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

a_n imenujemo splošni člen zaporedja.
Zaporedje ponavadi še krajše zapišemo $\{a_n\}$.
V nekateri literaturi je zaporedje zapisano (a_n).

Zaporedje lahko definiramo na več načinov:

- splošni člen a_n je podan s predpisom odvisnim od n
  (eksplicitni zapis)
- naštejemo nekaj začetnih členov, splošni člen a_n pa je podan s predpisom odvisnim od prejšnjih členov a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$
  (rekurzivni zapis)

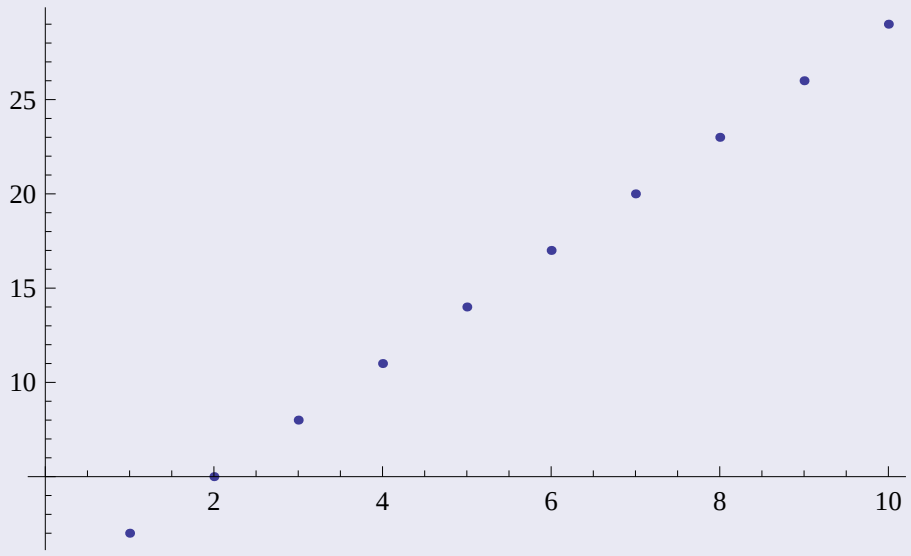
Člene zaporedje $\{a_n\}$ lahko zelo nazorno predstavimo tudi s točkami (n, a_n) v ravnini.

Primer

$2, 5, 8, 11, \ldots$

$a_n = 3n - 1$

$a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + 3$



Aritmetično zaporedje

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Razlika poljubnih dveh zaporednih členov je konstantna. To razliko d imenujemo tudi diferenca aritmetičnega zaporedja.

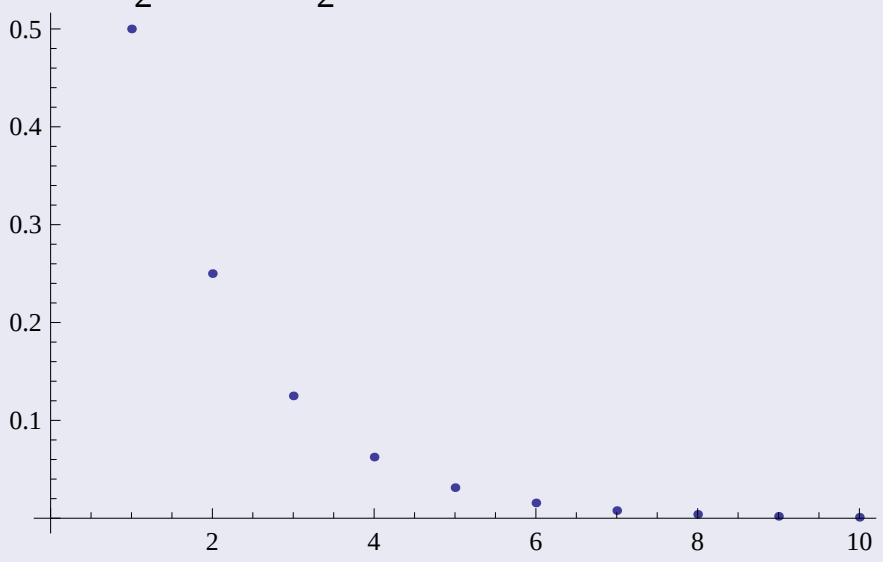
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Primer

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

$a_n = \frac{1}{2^n}$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$



Geometrično zaporedje

$$a_{n+1} = a_n q$$

Količnik poljubnih dveh zaporednih členov je konstanten. Ta količnik q imenujemo tudi kvocient geometričnega zaporedja.

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

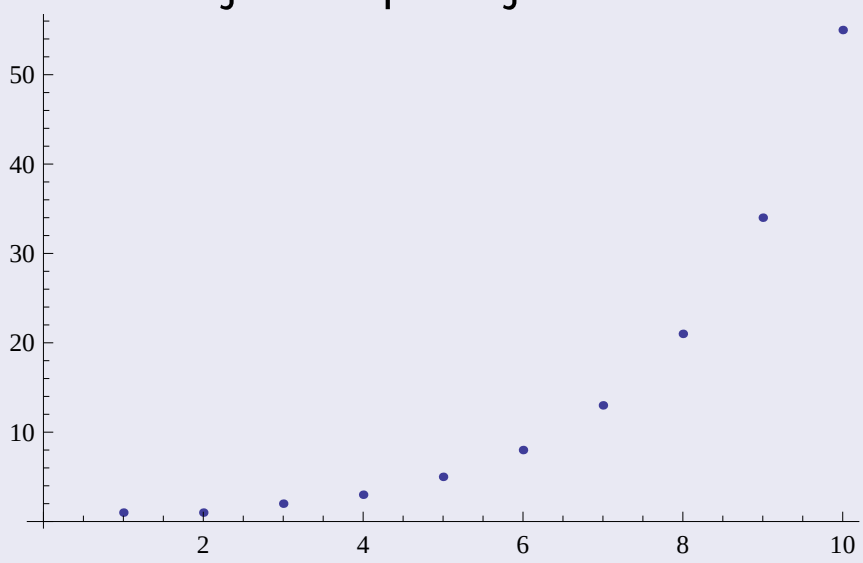
Primer

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$1, 1, 2, 3, 5, \ldots$

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Fibonaccijevo zaporedje



Oglejmo si nekaj lastnosti zaporedij.

Definicija

Zaporedje $\{a_n\}$ je naraščajoče, če je $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, in strogo naraščajoče, če je $a_{n+1} > a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje $\{a_n\}$ je padajoče, če je $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, in strogo padajoče, če je $a_{n+1} < a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje je monotono, če je naraščajoče ali padajoče.

Definicija

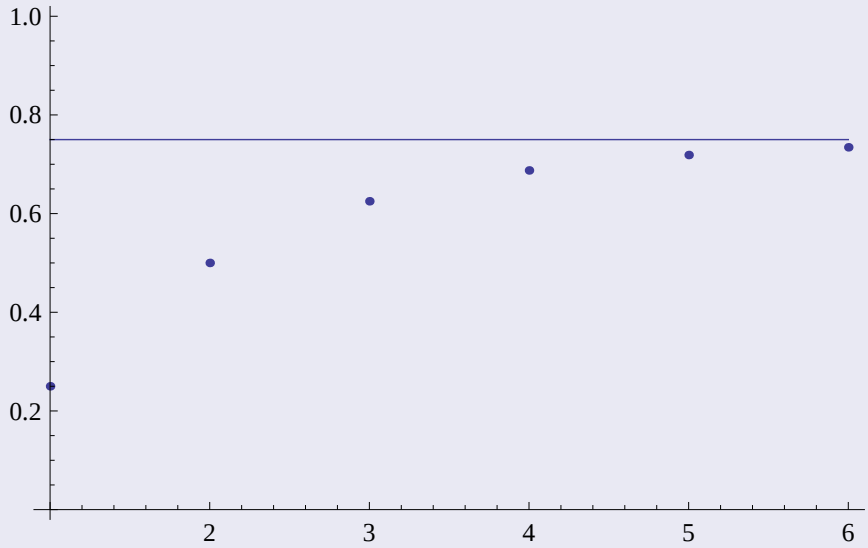
Zaporedje $\{a_n\}$ je navzgor omejeno, če obstaja tako realno število M, da je $a_n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Število M imenujemo zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$.

Zaporedje $\{a_n\}$ je navzdol omejeno, če obstaja tako realno število m, da je $a_n \geq m$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Število m imenujemo spodnja meja zaporedja $\{a_n\}$.

Zaporedje je omejeno, če je navzgor in navzdol omejeno.

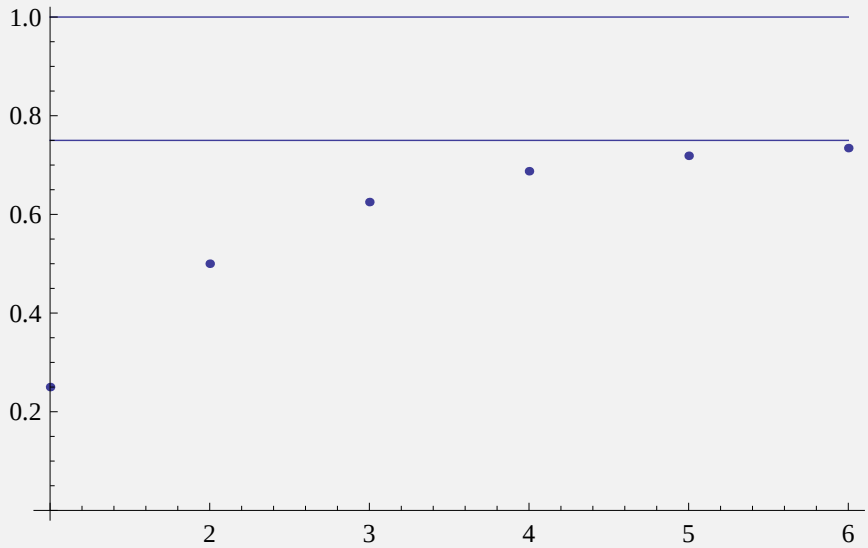
Primer

$$a_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2^n}$$



Opomba

Če je M zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$, potem je vsako realno število $N > M$ tudi zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$.



Definicija

Najmanjšo izmed vseh zgornjih mej zaporedja $\{a_n\}$ imenujemo natančna zgornja meja ali supremum zaporedja $\{a_n\}$ in pišemo

$$M_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Največjo izmed vseh spodnjih mej zaporedja $\{a_n\}$ imenujemo natančna spodnja meja ali infimum zaporedja $\{a_n\}$ in pišemo

$$m_0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Naj bo M_0 natančna zgornja meja. To pomeni, da je to najmanjša izmed vseh zgornjih mej. Če jo torej zmanjšamo za katerokoli, še tako majhno število $\varepsilon > 0$, potem $M_0 - \varepsilon$ ni več zgornja meja.
To pa pomeni, da obstaja vsaj en tak člen a_{n_0} zaporedja $\{a_n\}$, da je $a_{n_0} > M_0 - \varepsilon$.

Razmislili smo, da je M_0 supremum zaporedja $\{a_n\}$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da je $a_{n_0} > M_0 - \varepsilon$.

Podobno velja, da je m_0 infimum zaporedja $\{a_n\}$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da je $a_{n_0} < m_0 + \varepsilon$.

Opomba

Natančno zgornja meja in natančna spodnja meja nista nujno člena zaporedja.

Opomba

Če je $\{a_n\}$ naraščajoče zaporedje, potem je navzdol omejeno z a_1. Torej je $a_1 = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Podobno je padajoče zaporedje $\{a_n\}$ navzgor omejeno z a_1. Torej je $a_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Primer

$a_n = \frac{n+1}{n}$,
torej $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{4}{3}$, ...
Ker je $n+1 > n$, so vsi členi zaporedja strogo večji od 1 in zato je število 1 spodnja meja zaporedja $\{a_n\}$.
Denimo, da je natančna spodnja meja $m_0 > 1$, torej $m_0 = 1 + \delta$ za nek $\delta > 0$.
Obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $\frac{1}{n} < \delta$. Sledi, da je

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} < 1 + \delta < m_0,$$

torej m_0 ni spodnja meja, protislovje.

Torej je $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$.
Pokažimo, da je zaporedje $a_n = \frac{n+1}{n}$ padajoče.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1+1}{n+1} - \frac{n+1}{n}$$
$$= \frac{(n+2)n - (n+1)^2}{(n+1)n} = \frac{-1}{(n+1)n} < 0.$$

Natančna zgornja meja zaporedja je torej njegov prvi člen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = 2.$$