Matematika 1
27. oktober 2009

Opomba

Naj bo zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno in naj bo $\{b_n\}$ zaporedje, ki se od zaporedja $\{a_n\}$ razlikuje v končno mnogo členih. Potem je tudi zaporedje $\{b_n\}$ konvergentno in ima enako limito kot zaporedje $\{a_n\}$.

Računanje z zaporedji

Naj bosta $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ konvergentni zaporedji. Potem velja:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Če dodatno velja še, da je $b_n \neq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in je $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, potem velja tudi

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Izmed navedenih enakosti dokažimo le, da lahko zamenjamo limito in seštevanje. Ostale enakosti pokažemo na podoben način.

Zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ sta konvergetni. Označimo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.
Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Potem obstaja tak indeks $n_1 \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za vsak $n > n_1$, in tak indeks $n_2 \in \mathbb{N}$, da je $|b_n - b| < \varepsilon$.
Naj bo $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$. Potem je
$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq$
$|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.
Torej za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks $n_3 \in \mathbb{N}$, da je $|(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\varepsilon$ za vsak $n > n_3$.
Zaporedje $a_n + b_n$ je zato konvergentno z limito $a + b$.

Pri računanju z zaporedji moramo paziti, da sta zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ konvergentni.

Primer

Naj bo $a_n = \frac{1}{n}$ in $b_n = n$.
Potem je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, zaporedje $\{b_n\}$ je neomejeno in zato ni konvergentno, zaporedje $c_n = a_n \cdot b_n = 1$ pa je konstantno zaporedje in zato je $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$.
Torej v tem primeru ne moremo zapisati

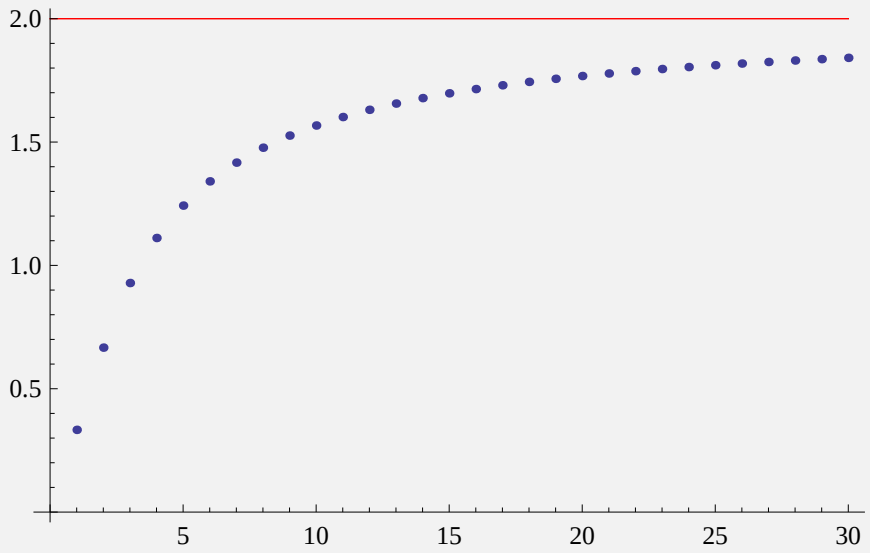
$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Definicija

Naj bo $\{a_n\}$ tako neomejeno zaporedje, da za vsak $M > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $a_n > M$ za vsak $n > n_0$. Kljub temu, da zaporedje v tem primeru ni konvergentno, pravimo, da ima a_n limito v neskončnosti in pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Podobno, naj bo $\{a_n\}$ tako neomejeno zaporedje, da za vsak $M < 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $a_n < M$ za vsak $n > n_0$. Potem pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.



V prejšnjem primeru smo izračunali limito eksplicitno podanega zaporedja. Če je konvergentno zaporedje $\{a_n\}$ podano z rekurzivnim predpisom $a_n = f(a_{n-1})$, kjer je f "lepa" funkcija, potem iščemo limito zaporedja tako, da rešimo enačbo $x = f(x)$.

V nadaljevanju bomo s pomočjo zaporedij definirali potenco realnega števila z iracionalnim eksponentom. Pri izpeljavi bomo potrebovali naslednji rezultat.

Izrek (Bernoullijeva neenakost)

Za vsako pozitivno število x in vsako naravno število $n > 1$ velja neenakost

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Dokaz

Izrek dokažemo z matematično indukcijo. Naj bo $x > 0$ poljuben.
Najprej pokažemo bazo indukcije.
Za $n = 2$ je leva stran neenakosti enaka $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$, desna stran neenakosti pa $1 + 2x$.
Ker je $x > 0$, je tudi $x^2 > 0$ in zato $(1 + x)^2 > 1 + 2x$.

Pokažimo še indukcijski korak.
Denimo, da Bernoullijeva neenakost velja za nek n.
Potem velja tudi
$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx)$
$= 1 + nx + x + nx^2 > 1 + (n+1)x,$
kjer smo pri prvi neenakosti upoštevali indukcijsko predpostavko, da je $(1+x)^n > 1 + nx$, pri drugi neenakosti pa, da je $nx^2 > 0$.
Po matematični indukciji potem sledi, da velja Bernoullijeva neenakost za vsako naravno število $n > 1$.

Trditev

Naj bo c poljubno realno število. Definiramo zaporedje

$$a_n = c^n.$$

Potem je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c^n = \begin{cases} 0 & : |c| < 1 \\ 1 & : c = 1 \end{cases}$$

Za vse ostale vrednosti števila c pa je zaporedje $\{a_n\} = \{c^n\}$ divergentno.

Dokaz

Če je $c > 1$, *potem pišemo* $c = 1 + x$, *kjer je* $x > 0$. *Potem je po Bernoullijevi neenakosti* $c^n = (1 + x)^n > 1 + nx$, *to pa je neomejeno zaporedje, saj gre za vsak pozitiven* x *z naraščajočim* n *število* $1 + nx$ *čez vse meje. Torej je v tem primeru* $\lim_{n\to\infty} c^n = \infty$.
Če je $c = 1$, *je zaporedje* $c^n = 1$ *konstantno in zato konvergentno z limito 1.*
Če je $-1 < c < 1$, *potem definiramo* $b = \left|\frac{1}{c}\right|$. *Ker je* $b > 1$, *je zaporedje* b^n *po prejšnjem neomejeno. Sledi, da je* $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$.

Za $c \leq -1$ *je neskončno členov večjih ali enakih 1 in neskončno členov manjših ali enakih* -1. *Torej v tem primeru zaporedje ni konvergentno.*

Trditev

Naj bo c poljubno pozitivno število. Definiramo zaporedje

$$a_n = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}.$$

Potem je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1.$$

Dokaz

Naj bo $c > 1$. Potem pri izbranem $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, definiramo $x = \frac{c-1}{n} > 0$ in pišemo $c = 1 + nx$.
Po Bernoullijevi neenakosti velja

$$\left(1 + \frac{c-1}{n}\right)^n > 1 + n \cdot \frac{c-1}{n} = c > 1,$$

torej je

$$1 + \frac{c-1}{n} > \sqrt[n]{c} > 1.$$

Ker je limita levega in desnega zaporedja v neenakosti enaka 1, je 1 tudi limita srednjega zaporedja.

Če je $c = 1$, *je trditev očitna.*
Če pa je $0 < c < 1$, *potem definiramo* $b = \frac{1}{c} > 1$.
Potem je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$ *in zato*

$$lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

Trditev

Naj bo $c \in \mathbb{R}$ *poljubno pozitivno število in* $\varepsilon > 0$.
Potem obstaja tak $\delta > 0$, *da je za vsak* $q \in \mathbb{Q}$, *za katerega velja* $|q| < \delta$,

$$|c^q - 1| < \varepsilon.$$

Dokaz

Vemo, da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$. *Za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja tak indeks* n_0, *da je* $|\sqrt[n]{c} - 1| < \varepsilon$ *za vsak* $n > n_0$.
Če je $0 < q < \frac{1}{n_1}$, *potem je tudi*
$|c^q - 1| < |\sqrt[n]{c} - 1| < \varepsilon$.
Podobno za negativne q.

Naj bo sedaj r poljubno realno število in c poljubno pozitivno realno število.
Definirali bi radi število c^r.
V ta namen si izberemo poljubno zaporedje racionalnih števil $\{q_n\}$, ki konvergirajo k r.
Hitro se vidi, da je zaporedje $\{c^{q_n}\}$ Cauchyevo in zato konvergentno, saj je po prejšnji trditvi

$$|c^{q_n} - c^{q_{n+k}}| = |c^{q_n}| \cdot |1 - c^{q_{n+k} - q_n}| < \varepsilon.$$

Njegovo limito označimo s c^r,
torej

$$c^r = \lim_{n\to\infty} c^{q_n},$$

kjer so q_n poljubna racionalna števila, za katera velja $\lim_{n\to\infty} q_n = r$.

Število e

Definirajmo zaporedji $\{a_n\}$, $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, in $\{b_n\}$, $b_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.
Hitro se pokaže, da je zaporedje $\{a_n\}$ naraščajoče in navzgor omejeno, zaporedje $\{b_n\}$ je padajoče in navzdol omejeno, torej sta obe zaporedji konvergentni in imata limito.
Ker je

$$b_{n+1} = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

imata zaporedji isto limito, ki jo označimo z e.