Matematika 1
3. november 2009

Naj bo r poljubno realno število in c poljubno pozitivno realno število.
Potem obstaja zaporedje racionalnih števil $\{q_n\}$, tako da je $\lim_{n\to\infty} q_n = r$.

Definicija

$$c^r = \lim_{n\to\infty} c^{q_n}$$

Opomba

Limita je neodvisna od izbire zaporedja $\{q_n\}$.

Število e

Definirajmo zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ s splošnima členoma

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{in} \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Pokazali bomo, da je zaporedje $\{a_n\}$ naraščajoče in navzgor omejeno, zaporedje $\{b_n\}$ padajoče in navzdol omejeno.
Torej sta obe zaporedji konvergentni in imata limito.

Najprej uporabimo varianto Bernoullijeve neenakosti in ocenimo

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Izraz na levi je razlika kvadratov na n-to potenco, torej je

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}.$$

Izraz delimo na obeh straneh z $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ in dobimo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Izraz na levi je ravno n-ti člen, izraz na desni pa $(n-1)$-vi člen zaporedja $\{a_n\}$, torej je

$$a_n > a_{n-1}$$

in zato je zaporedje $\{a_n\}$ naraščajoče.

Podobno, kot smo pokazali, da ocena $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$ velja za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, pokažemo, da velja enaka ocena tudi za negativna cela števila. Torej

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, oziroma

$$b_n > b_{n+1}.$$

Dobili smo, da je zaporedje $\{b_n\}$ padajoče.
Ker so vsi členi zaporedja $\{b_n\}$ pozitivni, je zaporedje navzdol omejeno.
Velja

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

torej je

$$b_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Sledi, da je $b_2 > b_{n+1} > a_n$, zato je zaporedje $\{a_n\}$ omejeno navzgor.

Zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ sta torej konvergentni in ker je $b_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, imata isto limito.
Limito označimo z e,

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n},$$

$$\mathrm{e} \doteq 2.7182.$$

Število e je iracionalno.

Primer

Izračunajmo limito

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{5n}\right)^{(-5n)(-\frac{1}{5}\cdot 2)}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m(-\frac{2}{5})} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}}.$$

Številske vrste

Naj bo $\{a_n\}$ zaporedje realnih števil. S pomočjo členov tega zaporedja definiramo novo zaporedje $\{s_n\}$ s členi

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$\dots$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$\dots$$

ki jih imenujemo delne vsote.

Zaporedje $\{s_n\}$ zapišemo v obliki

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

in ga imenujemo številska vrsta, število a_i pa imenujemo splošni člen vrste.

Vrsta

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

je konvergentna, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot $\{s_n\}$.
Limito zaporedja delnih vsot imenujemo vsota vrste.
Če vrsta ni konvergentna, potem pravimo, da je divergentna.

Primer

Preverimo konvergenco vrste

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i.$$

Ker je $s_n = 0$ za sode n in $s_n = -1$ za lihe n, ima zaporedje delnih vsot dve stekališči, torej ni konvergentno in zato je vrsta $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i$ divergenta.

Primer

Izračunajmo vsoto vrste $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}$. Ker je

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1},$$

je

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Limita delnih vsot

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

torej je

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = 1.$$

Zaporedja
Številske vrste

Definicija

Vrsto

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$$

imenujemo geometrijska vrsta.

Gregor Dolinar Matematika 1, 8. predavanje

Če je $q \neq 1$, potem je

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} aq^i = a(1 + q + \ldots + q^n) = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Za $|q| < 1$ je $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$, torej je v tem primeru

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a(1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{a}{1 - q}.$$

Za $|q| \geq 1$ je geometrijska vrsta divergentna.

Primer

Izračunajmo vsoto vrste

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{3 \cdot 2^i}.$$

Številska vrsta je definirana kot limita zaporedja delnih vsot, zato lahko tudi za vrsto zapišemo Cauchyev kriterij za konvergenco vrste.
Vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je konvergentna natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je

$$|s_n - s_{n+k}| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

za vsak $n > n_0$ in vsak $k \in \mathbb{N}$.