Matematika 1

Vaje

B. Jurčič Zlobec[1]

[1] Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Matematika FE, Ljubljana, Slovenija 2009

Absolutna vrednost in kvadratni koren

- Absolutna vrednost.

$$|x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$

- Kvadratni koren je funkcija definirana za nenegativne vrednosti in zavzame nenegativne vrednosti.

- Kvadratni koren je strogo naraščajoča funkcija.
- Velja

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Intervali in poltraki

Vzemimo, da sta a in b dve realni števili, za kateri velja $a < b$.

- Odprti interval $(a, b) = \{x; a < x < b\}$
- Zaprti interval $[a, b] = \{x; a \leq x \leq b\}$
- Polodprt interval oziroma polzaprt interval $[a, b)$ in $(a, b]$.
- Desni odprt in zaprt poltrak $(a, \infty) = \{x; x > a\}$ in $[a, \infty) = \{x; x \geq a\}$
- Levi odprt in zaprt poltrak $(-\infty, a)$ in $(-\infty, a]$.

Splošno

- Linearno neenačbo z eno neznanko lahko vedno prevedemo na obliko $ax < b$ ali $ax \leq b$.
- Ko množimo z negativno vrednostjo se smer neenačaja obrne.
- Rešitev se izraža v oliki poltraka:

$$\begin{cases} x > \frac{b}{a}, a < 0 \\ x < \frac{b}{a}, a > 0 \end{cases} \quad \text{oziroma} \quad \begin{cases} x \geq \frac{b}{a}, a < 0 \\ x \leq \frac{b}{a}, a > 0 \end{cases}$$

Množica: $X = \{x; 6x - 1 > 2x + 3\}$

- Neenačba: $6x - 1 > 2x + 3$.
- Odštejemo $2x$ in prištejemo 1 na obeh straneh $6x - 2x < 3 + 1$.
- Dobimo $4x > 4$.
- Delimo s 4 in dobimo $x > 4$.
- Rešitev $X = (4, \infty)$.

Množica: $X = \{x; 2x + 3 \leq 3x + 4\}$

- Neenačba: $2x + 3 \leq 3x + 4$.
- Odštejemo $3x$ in 3 na obeh straneh $2x - 3x \leq 4 - 3$.
- Dobimo $-x \leq 1$.
- Delimo z -1 obrnemo smer neenačaja $x \geq -1$.
- Rešitev $X = [-1, \infty)$.

Množica: $X = \{x; 2x + 3 \leq 3x + 4 < x + 7\}$

- Sistem neenačb: $2x + 3 \leq 3x + 4 \wedge 3x + 4 < x + 7$.
- Poenostavimo $-x \leq 1 \wedge 2x < 3$.
- Dobimo $[-1, \infty) \cap (-\infty, \frac{3}{2})$.
- Rešitev $X = [-1, \frac{3}{2})$.

Splošno

- Kvadratne neenačbe z eno neznanko lahko prevedemo na obliko $ax^2 + bx + c > 0$ oziroma $ax^2 + bx + c \geq 0$
- Diskriminanta kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$ je negativna $b^2 - 4ac < 0$
  - Če je $a > 0$, potem je rešitev $(-\infty, \infty)$
  - Če je $a < 0$, potem je rešitev prazna množica Φ.
- Diskriminanta kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$ je pozitivna $b^2 - 4ac > 0$ Enačba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dve rešitvi $x_1 < x_2$. V primeru strogega enačaja:
  - Če je $a > 0$, potem je rešitev $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$
  - Če je $a < 0$, potem je rešitev prazna množica (x_1, x_2).

Reši neenačbo $x + \frac{1}{x} \leq 2$

- Če je $x < 0$, potem:

$$x^2 + 1 \geq 2x \rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, \infty)$$

- Če je $x \geq 0$, potem:

$$x^2 + 1 \leq 2x \rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0 \rightarrow x \in \{1\}$$

- Rešitev je $x \in (-\infty, 0) \cup \{1\}$.

Reši enačbo $x + |x + 1| = 3$

- $x + 1 < 0 \to x < -1 \to (-\infty, -1)$,

$$x - (x + 1) = 3, \quad -1 = 3, \to \phi$$

- $x + 1 \geq 0 \to x \geq -1 \to [-1, \infty)$,

$$x + (x + 1) = 3, \quad 2x = 3, \to \{\frac{2}{3}\}$$

- Rešitev: $x \in \phi \cup \{\frac{2}{3}\}$

Reši enačbo $x + |1 - x| = 0$

- $1 - x < 0 \to -x < -1 \to (1, \infty)$,

$$x - (1 - x) = 0, \quad 2x = 1, \to \{\frac{1}{2}\}$$

- $1 - x \geq 0 \to x \leq 1 \to (-\infty, 1]$,

$$x + (1 - x) = 0, \quad 1 = 0, \to \phi$$

- Rešitev: ϕ

Reši enačbo $|x+1|+|x-1|=2$

- $x < -1 \to (-\infty, -1)$,

$$-(x+1)-(x-1)=2, \quad -2x=2, \to \{-1\}$$

- $-1 < x \leq 1 \to (-1, 1]$,

$$(x+1)-(x-1)=2, \quad 2=2, \to (-\infty, \infty)$$

- $1 < x \to (1, \infty)$,

$$2x=2, \quad x=2, \to \{1\}$$

- Rešitev $x \in [-1, 1]$, ker je

$$x \in (\{-1\} \cap (-\infty, -1)) \cup ((-1, 1] \cap (-\infty, \infty)) \cup ((1, \infty) \cap \{1\})$$

Reši neenačbo $|2-x| < 2|x| + 3$

- 1. $(-\infty, 0)$, $\quad 2 - x < -2x + 3$, $\quad x < 1, \to (-\infty, 0)$
- 2. $[0, 2]$, $\quad 2 - x < 2x + 3$, $\quad x > -\frac{1}{3}, \to [0, 2]$
- 3. $(2, \infty)$, $\quad -2 + x < 2x + 3$, $\quad x < 5, \to (2, 5)$
- Rešitev $x \in (-\infty, 5)$ je unija prispevkov $(-\infty, 5) = (-\infty, 0) \cup [0, 2] \cup (2, 5)$

Reši neenačbo $|x^3 - x^2| < |x^2 + x|$

- Na obeh straneh izpostavimo x, $|x|^2|x-1| < |x||x+1|$. Točka 0 ni rešitev, delimo z $|x|$, $|x||x-1| < |x+1|$.
- $x < -1$, $x^2 - x < -x - 1 \to x^2 < 1 \to x \in (-1, 1)$
- $-1 \leq x < 0$, $x^2 - 2x - 1 < 0 \to x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$
- $0 \leq x < 1$, $-x^2 + x < x + 1 \to -x^2 < 1 \to x \in (-\infty, \infty)$
- $x \leq 1$, $x^2 - 2x - 2 < 0 \to x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$
- Rešitev je
  $x \in (1-\sqrt{2}, 0) \cup [0, 1) \cup [1, 1+\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$.

Reši neenačbo $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} > 3$

- 1. Neenačba je definirana samo za $x \geq 0$. Obe strani sta pozitivni, kvadriramo:
  $2\sqrt{x(x+1)} > 8 - 2x \rightarrow \sqrt{x(x+1)} > 4 - x$
- 2. Če je desna stran negativna je neenačba izpolnjena. Torej $x > 4$ je del rešitve.
- 3. V nasprotnem primeru pa sta obe strani pozitivni, kvadriramo:
  $x^2 + x > 16 - 8x + x^2 \rightarrow x > \frac{16}{9}$
- Rešitev:
  $(\frac{16}{9}, \infty) = (0, \infty) \cap \left((4, \infty) \cup ([-\infty, 4] \cap (\frac{16}{9}, \infty))\right)$

Reši neenačbo $\sqrt{19-x}-\sqrt{x+1}>2$

- 1. Neenačba je definirana samo za $x \in [-1, 19]$.
- 2. Če je leva stran negativna neenačba ni izpolnjena. Rešitev se nahaja na $\{x, \sqrt{19-x} > \sqrt{x+1}\} = (-\infty, 9)$
- 3. V tem primeru sta obe strani enačbe pozitivni in kvadriramo: $\sqrt{(19-x)(x+1)} < 8, \rightarrow x^2 - 18x + 45 > 0 \rightarrow (-\infty, 3) \cup (15, \infty)$
- Rešitev: $[-1, 3) = [-1, 19] \cap (-\infty, 9) \cap ((-\infty, 3) \cup (15, \infty))$

Reši enačbo $\sqrt{5x+1} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{7x-20}$

- 1. Neenačba je definirana samo za pozitivne vrednosti pod koreni:
  $x \in [-\frac{-1}{5}, \infty) \cap [-\frac{3}{3}, \infty) \cap [\frac{20}{7}, \infty) = [\frac{20}{7}, \infty)$.
- 2. Kvadriramo lahko le v primeru, če sta obe strani enačbe enakega znaka:
  $\sqrt{5x+1} > \sqrt{2x+3} \rightarrow 5x+1 \geq 2x+3 \rightarrow x \in [\frac{2}{3}, \infty)$.
- 3. Kvadriramo in dobimo enačbo $10x^2 + 17x - 141 = 0$. Ta ima dve rešitvi $x \in \{-4.7, 3\}$.
- Rešitev: $x \in \{3\} = \{-4.7, 3\} \cap [\frac{20}{7}, \infty)$

Vsote

- Dokaži, da formula za vsoto velja za vsa naravna števila $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = f(n)$.
- Pokažimo za $n = 1$: $a_1 = f(1)$.
- Če velja za n pokažimo, da velja za $n + 1$.
- $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = f(n+1) \rightarrow f(n) + a_{n+1} = f(n+1)$.

Primer

- Dokaži, da velja
  $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1} = \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^{n-1}(2n+1)\right)$.
- Za $n = 1$ dobimo: $1 = \frac{1}{4}(1 + 2 + 1)$.
- Pokazati moramo še enakost:
- $\frac{1}{4}\left(1 + (-1)^{n-1}(2n+1)\right) + (-1)^n(n+1) = \frac{1}{4}(1 + (-1)^n(2n+3))$.

Dokaži

- $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$
- Za $n = 1$. $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$.
- Če n potem $n+1$. $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$
- $\sqrt{n(n+1)} + 1 = n + 1 \rightarrow \sqrt{n^2+1} \geq n$.

Vsota kubov 3 zaporednih naravnih števil je deljiva z 9

- $9 | \left(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right)$
- Za $n = 1$. $9 | 1 + 8 + 27$.
- Pokazati moramo še, da je razlika $\left((n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3\right) - \left(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right)$ deljiva s 9 za poljubno naravno število n.
- Razlika je $27 + 27n + 9n^2$, ki je deljiva s 3.
- Ker je drugi člen za n deljiv z 9 po indukcijski predpostavki, in je razlika za $n+1$ in n deljiva s 9 je tudi člen za $n+1$ deljiv z 9.

Dokaži, da je $n < 2^n$

- Če $n = 1$, potem $1 < 2$; je izpolnjeno.
- Če $n < 2^2$ potem
  $n + 1 < 2^{n+1} \rightarrow n + 1 < 2\,2^n \rightarrow n + 1 < 2^n + 2^n$.
- Na levi smo dodali 1 na desni pa 2^n, ker je $1 < 2^n$ ostane neenakost izpolnjena,

Izračunaj

- $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$
- $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$
- $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20} = 1024e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Poišči $\Re(w)$ in $\Im(w)$, če je $z = x + iy$

- $w = \dfrac{|z|}{z}$
- $w = \dfrac{|z|\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{\bar{z}}{|z|} = \dfrac{x - iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- $\Re(w) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ in $\Im(w) = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Poišči $\Re(w)$ in $\Im(w)$, če je $z = x + iy$

- $w = \dfrac{z}{1+z}$
- $w = \dfrac{z\overline{z+1}}{|z+1|^2} = \dfrac{x^2 + x - y^2 + 2ixy + iy}{(x+1)^2 + y^2}$
- $\Re(w) = \dfrac{x^2 + x - y^2}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}$ in $\Im(w) = \dfrac{2xy + y}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}$

Poišči $\Re(w)$ in $\Im(w)$, če je $z = x + iy$

- $w = z^3$
- $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$
- $\Re(w) = x^3 - 3xy^2$ in $\Im(w) = 3x^2y - y^3$

Reši enačbo $\overline{z} + i\,z^2 = 0$

- Zapišimo enačbo po komponentah
  $x - i\,y + i\,x^2 - 2xy - i\,y^2 = 0.$
- Izenačimo realno in imaginarno komponento na obeh straneh
  $x - 2xy = 0, \quad y + x^2 - y^2 = 0$
- Iz prve enačbe sledi: $(x = 0 \vee y = \frac{1}{2})$
- Če je $x = 0$ potem iz druge enačbe dobimo
  $y - y^2 = 0 \rightarrow y = 0 \vee y = 1$
- Če je $y = \frac{1}{2}$, potem iz druge enačbe dobimo $x^2 + \frac{1}{4} = 0$, nima realnih rešitev.
- Rešitvi: $z \in \{0, i\}$.

Reši enačbo $z^2 - \frac{1}{\overline{z}} = 0$

- Rešitev ne more biti enaka 0. Pomnožimo enačbo z $\overline{z}$ in dobimo $z|z|^2 - 1 = 0$
- Delimo spet z z in dobimo $|z|^2 = \frac{1}{z}$.
- Rešitev mora biti pozitivno realno število. Potem je $x^2 = \frac{1}{x} \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1$
- Rešitev je $z = 1$.

Reši enačbo $i + \frac{1}{z} = 2$

- $\frac{1}{z} = 2 - i$
- $z = \frac{1}{2-i}$
- $z = \frac{2+i}{5}$

Reši enačbo $|z| + z = 2 + i$

- $\sqrt{x^2 + y^2} + x + i\,y = 2 + i \to y = 1$
- $\sqrt{x^2 + 1} + x = 2$
- $\sqrt{x^2 + 1} = 2 - x \to x < 2.$
- $x^2 + 1 = 4 - 4x + x^2 \to x = \frac{3}{4} < 2$
- Rešitev $z = \frac{3}{4} + i.$

Reši sistem enačb

- $(1+i)z_1 + (2-i)z_2 = i$, $z_1 + (1-i)z_2 = 3$
- Pomnožimo prvo enačbo z $1-i$ in drugo z 2.
- $2z_1 + (-1+3i)z_2 = 1+i$, $2z_1 + 2(1-i)z_2 = 6$
- Obe enačbi odštejemo in dobimo in izrazimo z_2, $z_2 = \frac{-3-3i}{-3+5i}$;
- Rešitev: $z_1 = 4+5i$, $z_2 = 2-3i$.

Dano je zaporedje: $a_n = \frac{1}{n+1}$

- Predpostavimo, da je $a_n \leq a_{n+1}$:
  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+2}, \rightarrow n+2 \leq n+1, \rightarrow 2 \leq 1 \rightarrow \phi$
- Od tod sledi: $a_n > a_{n+1}$.
- Prvi člen je največji $\max\{a_n\} = \frac{1}{2}$.
- Nič je spodnja meja $\inf\{a_n\} = 0$, členi monotono padajo proti nič. Res?
- Pokažimo, da $0 + \epsilon$ ni več spodnja meja za poljuben $\epsilon > 0$.
  $a_n < 0 + \epsilon, \rightarrow \frac{1}{n+1} < \epsilon, \rightarrow n > \frac{1}{\epsilon} - 1$
- Za vsak ϵ lahko najdem $n \in \mathbb{N}$, da je gornja neenačba izpolnjena.

Dano je zaporedje: $a_n = -n^2 + 9n + 100$

- Predpostavimo, da je $a_n \leq a_{n+1}$:
$-n^2 + 9n + 100 \leq -(n+1)^2 + 9(n+1) + 100, \rightarrow 0 \leq -2n + 9, \rightarrow n \leq \frac{9}{2}$
- Za $n = 1, 2, 3$ in 4 velja $a_n < a_{n+1}$, za vse ostale pa je $a_n > a_{n+1}$
- Zaporedje narašča do $n = 5$ ($a_4 < a_5$ in $a_5 > a_6$) tu zavzame največjo vrednost zatem pa monotono pada.
- Največji člen $\max\{a_n\} = 129$. Zaporedje ni navzdol omejeno.

Dano je zaporedje: $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

- Predpostavimo, da je $a_n \leq a_{n+1}$:
  $\frac{n^2}{2^n} \leq \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}, \rightarrow n^2 - 2n - 1 \leq 0, \rightarrow n \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$
- Zaporedje narašča do $n = 3$ zatem monotono pada in je navzdol omejeno z nič.
- $\sup\{a_n\} = \frac{9}{8}$.
- Natančna spodnja meja zaporedja je 0. Velja:
  $2^n = (1+1)^n > \binom{n}{3}, \rightarrow \frac{n^2}{2^n} < \frac{6}{n(1-1/n)(1-2/n)}$
  Za velike n desna stran pade pod vsako pozitivno mejo.

Dano je zaporedje: $a_n = \frac{2^n}{n!}$

- Predpostavimo, da je $a_n \leq a_{n+1}$
  $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \rightarrow n+1 \leq 2, \rightarrow n \in \{1\}$
- Zaporedje narašča do $n = 2$ zatem pa monotono pada in je navzdol omejeno z nič.
- $\sup\{a_n\} = 2$.
- Velja ocena, $\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n}\frac{2}{n-1}\cdots\frac{2}{2}\frac{2}{1} < \frac{4}{n}$,
  Vsi faktorji na desni razen zadnjih dveh so manj kot ena. Natančna spodnja meja enaka 0.

Dano je zaporedje: $a_n = \frac{n}{1+\left(\frac{n}{10}\right)^2}$

- Predpostavimo, da je $a_n \leq a_{n+1}$ preuredimo in dobimo neenačbo
  $n^2 + n - 100 \leq 0$
- Rešitev v naravnih številih je $1 \leq n \leq 9$
- Zaporedje do 10 člena narašča, od tam dalje pa monotono pada proti 0.
  Res? Če pišemo $a_n = \frac{1/n}{1/n^2 + 1/100}$ vidimo, da velja
  $0 < a_n < \frac{1}{n}$).
- Natančna zgornja meja je $\max\{a_n\} = 5$, natančna spodnja meja je $\inf\{a_n\} = 0$.

Nekaj osnovnih limit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \text{če je} \quad a > 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad \text{če je} \quad a > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{1+2n}$

- Delimo števec in imenovalec z n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}}$$

- Ker je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, je
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$

- Pomnožimo števec in imenovalec, ki je enak 1 z

$$\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}$$

- Vodilna potenca v imenovalcu ($\frac{3}{2}$) je večja kot v števcu (1), od tod je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+6}{2n^2+5}\right)^{4n^2+3}$

- Preuredimo izraz tako, da bomo lahko uporabili $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+5}\right)^{2(n^2+5)-7}$
- Pišemo $m = n^2+5$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+5}\right)^{-7}$$

- Prva limita je enaka e^2, druga pa je enaka 1. $\lim_{n\to\infty} a_n = e^2$

$\lim_{n\to\infty} a_n$, kjer je $a_n = \underbrace{1 + \sqrt{1 + \cdots \sqrt{1 + \sqrt{2}}}}_{n \quad \text{korenov}}$

- Zaporedje lahko zapišemo rekurzivno $a_1 = 1 + \sqrt{2}$, $a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$
- Očitno so vsi členi zaporedja pozitivni. Predpostavimo, da je zaporedje padajoče $a_n > a_{n+1} \to a_n > 1 + \sqrt{a_n} \to a_n^2 - a_n + 1 > 0$
- Od tod dobimo pogoj $a_n > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ki ga dokažemo s pomočjo matematične indukcije.
- Zaporedje je monotono padajoče in navzdol omejeno.
- Limita je ena od rešitev enačbe $a = 1 + \sqrt{a}$. Prava je $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ki je ravno razmerje *zlatega reza*.

Koliko je vsota vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

- Razcepimo splošni člen na parcialne ulomke:
  $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$
- Zapišimo n-to delno vsoto z tako razcepljenimi členi:
  $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$
  $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$
- Členi se paroma uničijo razen prvega in zadnjega.
  $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$
- Vsota neskončne vrste je enaka limiti delnih vsot.
  $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$

Koliko je vsota vrste $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)$

- Zapišimo n-to delno vsoto:
  $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)$
  $S_n = \sqrt{3}-2\sqrt{2}+1+\sqrt{4}-\cdots+\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$
- Notranji členi se uničijo ostanejo le
  $S_n = 1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$
- Vsota neskončne vrste je enaka limiti delnih vsot.
  $S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1-\sqrt{2}+\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$
- Izraz katerega limito računamo, množimo in delimo s konjugirano iracionaliteto $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}$ in dobimo
  $S = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = 0.$
- Vsota vrste je potemtakem $S = 1-\sqrt{2}$.

Koliko je vsota vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^{k-1}}$

- Ker je geometrijska vrsta, lahko izračunamo n-to delno vsoto:
  $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$
  $S_n = 3\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}$
- Izračunamo limito delnih vsot pri tem pa upoštevamo, da je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = 0$.
- Vsota vrste je potemtakem $S = 4$.

S pomočjo kvocientnega kriterija ugotovi konvergentnost vrste

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$
- $D_n = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$
- Ker je limita D_n manj kot ena vrsta konvergira.

S pomočjo kvocientnega kriterija ugotovi konvergentnost vrste

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$
- $D_n = \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}2^n}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e}$
- Ker je $\frac{2}{e} < 1$ vrsta konvergira.

S pomočjo kvocientnega kriterija ugotovi konvergentnost vrste

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$
- $D_n = \frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}3^n}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e}$
- Ker je $\frac{3}{e} > 1$ vrsta divergira.

S pomočjo korenskega kriterija ugotovi konvergentnost vrste

- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}$
- $C_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
- $\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{1}{e}$
- Ker je limita C_n manj kot ena vrsta konvergira.

S pomočjo korenskega kriterija ugotovi konvergentnost vrste

- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$
- $C_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
- $\lim_{n\to\infty} C_n = e$
- Ker je limita C_n več kot ena vrsta divergira.

S pomočjo korenskega kriterija ugotovi konvergentnost vrste

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{2k+1}}{k5^k}$
- $C_n = \frac{3^2 \sqrt[n]{3}}{5 \sqrt[n]{n}}$
- Ker je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ in $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, je
- limita C_n je potemtakem enaka $\frac{9}{5}$, vrsta divergira.

S pomočjo korenskega kriterija ugotovi konvergentnost vrste

- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}$
- $C_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{2\frac{n+1}{2}2-2}$
- $\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{1}{e^2}$.
- Limita C_n je manj kot 1, vrsta konvergira.

S pomočjo majorante ugotovi konvergenco vrste

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$
- Velja $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$.
- Pokazati moramo, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergentna.
- Gornjo vrsto lahko seštejemo. Razbijemo člene na parcialne ulomke in izračunamo delne vsote.
  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
  $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{1+n}$
- Limita delnih vsot je enaka 1 od tod sledi da vrsta konvergira, torej je tudi prvotna vrsta konvergentna.

S pomočjo majorante ugotovi konvergentnost vrste

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.
- Ker velja, da je $n^2 < n^3$ za vse $n > 1$, je $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{n^2}$.
- Ker je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentna, glej prejšnjo nalogo, sledi, da je prvotna vrsta konvergentna.

S pomočjo minorante ugotovi konvergentnost vrste

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$
- Pokažimo najprej divergentnost harmonične vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$
- Harmonično vrsto lahko zapišemo kot vsoto $1 + \sum_{k=1}^{\infty} s_k$, kjer je $s_n = \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.
- Vsote s_n imajo za vsak n 2^{n-1} členov. Členi v s_k in s_j se ne prekrivajo, če je $k \neq j$.
- Če nadomestimo člene vsote s_n z najmanjšim, zadnjim $\frac{1}{2^n}$, dobimo $\frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$. Velja $s_n > \frac{1}{2}$ za vsak n. Od tod sledi, da je harmonična vrsta divergentna.
- Ker velja $\sqrt{n} < n$ za vsak $n > 1$ sledi, da tudi prvotna vrsta divergira.

S pomočjo minorante oziroma majorante ugotovi konvergentnost vrste

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}$.
- Velja ocena: $\frac{\arctan n}{1+n^2} < \frac{\frac{\pi}{2}}{1+n^2} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2}$
- Ker konvergira vrsta s členi $\frac{1}{n^2}$, konvergira tudi prvotna vrsta.

S pomočjo primerjalnega kriterija ugotovi konvergentnost vrste

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2+3k^2}}{1+2k+k^3}$.
- Vodilna potenca v ševcu je $p = 1$ v imenovalcu pa $q = 3$.
- Izberemo primerjalno vrsto s členi $n^{p-q} = \frac{1}{n^2}$.
- Limita kvocienta členov obeh vrst $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(2+3k^2)}n^2}{1+2k+k^3}$
- Delimo števec in imenovalec z vodilno potenco 3:
  $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(\frac{2}{n^2}+3)}}{\frac{1}{n^3}+2\frac{1}{n^2}+1} = \sqrt{3}$
- Limita zaporedja je različna od nič in končna, torej obe vrsti hkrati konvergirata in divergirata. Ker primerjalna vrsta konvergira, konvergira tudi prvotna vrsta.

Definicijsko območje

- $f(x) = \frac{x-2}{2x-1}$
- Funkcija je definirana povsod razen v točkah kjer se imenovalec enak 0.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

Definicijsko območje

- $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$
- Funkcija je definirana povsod tam ko ko je izraz pod korenom nenegativen.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, 2x - 1 \geq 0\} = (-\infty, \frac{1}{2}]$

Definicijsko območje funkcije

- $f(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{1}{x}$
- Funkcija je definirana povsod tam, ko je izraz pod korenom nenegativen in je imenovalec različen od nič.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, 4 - x^2 \geq 0 \wedge x \neq 0\} = (-2, 0) \cup (0, 2)$

Definicijsko območje funkcije

- $f(x) = \sqrt{\sqrt{2x-1} - x}$
- Funkcija je definirana povsod tam, ko je izraz pod korenom nenegativen.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, \cap 2x - 1 \geq 0 \wedge 2x - 1 \geq x^2\}$
- $\mathcal{D}_f = [\frac{1}{2}, \infty) \cap \{x \in \mathbb{R}, 0 \geq x^2 - 2x + 1\} = \{1\}$.

Definicijsko območje funkcije

- $f(x) = \sqrt{\sqrt{2x-1}+x}$
- Funkcija je definirana povsod tam, ko je izraz pod korenom nenegativen.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x \geq \frac{1}{2} \wedge \sqrt{2x-1} + x \geq 0\}$
- Tam ker je izpolnjen prvi pogoj, je izpolnjen tudi drugi. $\mathcal{D}_f = [\frac{1}{2}, \infty)$.

Definicijsko območje funkcij

- $f(x) = \log x^2$, $g(x) = 2\log x$
- Definicijsko območje funkcije $f(x)$ je $\mathcal{D}_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Definicijsko območje funkcije $g(x)$ je $\mathcal{D}_g = (0, \infty)$.
- Za pozitivne x je $f(x) = g(x)$, vendar funkciji nista enaki, ker se ne ujemata v definicijskem območju.

Definicijsko območje funkcij

- $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$, $g(x) = \frac{x}{x+1}$
- Definicijsko območje funkcije $f(x)$ je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.
- Definicijsko območje funkcije $g(x)$ je $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Za $x \notin \{0, -1\}$ je $f(x) = g(x)$, vendar funkciji nista enaki, ker se ne ujemata v definicijskem območju.

Definicijsko območje funkcije

- $f(x) = \log \frac{x-1}{x+1}$
- Funkcija je definirana povsod tam ko je izraz pod logaritmom pozitiven, in imenovalec različen od nič.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, \frac{x-1}{x+1} > 0\}$
- $\mathcal{D}_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Definicijsko območje funkcije $f(x) = \sqrt{x - |1 - 2x|}$

- Funkcija je definirana povsod tam ko je izraz pod korenom nenegativen.
- $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x > |1 - 2x|\}$
- Za $1 - 2x < 0$ oziroma oziroma $x > \frac{1}{2}$ je $x \geq -1 + 2x$ oziroma $x \leq 1$.
- Za $1 - 2x \geq 0$ oziroma oziroma $x \geq \frac{1}{2}$ je $x \geq 1 - 2x$ oziroma $x \geq \frac{1}{3}$.
- $\mathcal{D}_f = (\frac{1}{2}, 1) \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] = (\frac{1}{3}, 1)$.

Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije

- $f(x) = 1 - |x|$.
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_f = (-\infty, 1]$.

Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije

- $f(x) = 1 - x^2$.
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$,
- $\mathcal{R}_f = (-\infty, 1]$.

Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije

- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
- $\mathcal{D}_f = [-1, 1]$,
- $\mathcal{R}_f = (0, 1]$.

Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije

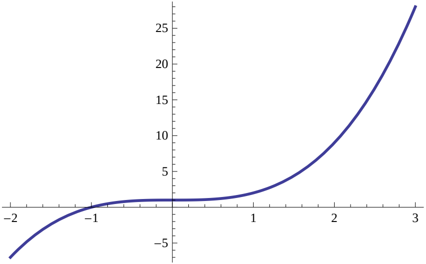
- $f(x) = 1 - |x|$.
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$,
- $\mathcal{R}_f = (-\infty, 1]$.

Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije

- $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- Zaloga vrednosti je med $[-a, a]$, kjer je a pozitivna vrednost za katero ima kvadratna enačba $\frac{2x}{1+x^2} = a$ dvojno ničlo.
- $-ax^2 + 2x - a = 0$. Diskriminanta je enaka 0. $4 - 4a^2 = 0$, od tod je iskani $a = 1$
- $\mathcal{R}_f = [-1, 1]$.

Ugotovi lastnosti funkcije, kot preslikave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

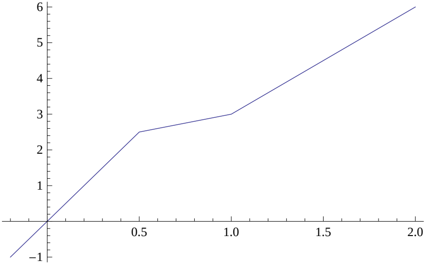
- $f(x) = 1 + x^3$
- Graf funkcije $f(x)$:



- Funkcija je bijektivna preslikava $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ugotovi lastnosti funkcije, kot preslikave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $f(x) = 4x + |1 - x| - |1 - 2x|$
- $f(x) =$
- Graf funkcije $f(x)$:



- Funkcija je bijektivna preslikava $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.