1. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

Lastne vrednosti izračunamo kot rešitve enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & -5 \\ 3 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda) - 5(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3) = 0 \end{aligned}$$

Dobimo eno dvojno lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 3$ in eno enojno lastno vrednost $\lambda_3 = -3$. Izračunajmo najprej lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_3 = -3$:

$$A - \lambda_3 I = A + 3I = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lastni vektor: $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sedaj še lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 3$:

$$A - \lambda_{1,2} I = A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lastni vektor: $x_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. Dane tri množice

$$\{\{2,-1,-1\}, \{0,2,2\}, \{0,-1,-2\}\}$$

predstavljajo smerni vektor premice, eno točko na njej in točko izven premice. Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje dano premico in dano točko. Potem pa zapiši enačbo premice, ki gre skozi izhodišče in je pravokotna na izračunano ravnino.

Rešitev:

Normalo ravnine dobimo kot vektorski produkt smernega vektorja premice $\vec{e} = (2,-1,-1)$ in vektorja med točko na premici in točko izven premice $\vec{r} = (0,-3,-4)$:

$$\vec{n} = \vec{e} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} = (1, 8, -6)$$

Enačba ravnine je torej $x + 8y - 6z = 4$.

Iskana premica, ki je pravokotna na dano ravnino, ima smerni vektor enak normali ravnine. Ker gre skozi izhodišče, se enačba v kanonični obliki glasi $x = \frac{y}{8} = \frac{z}{-6}$.

3. Linearna transformacija preslika bazična vektorja v $(-3,2)$ in $(-2,3)$.

   a) Kam preslika vektor $(2,2)$?

   b) Kaj se preslika v vektor $(3,0)$?

   Napiši še matriko transformacije in njeno inverzno matriko.

   Rešitev:

   Matrika transformacije je $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, ki ima inverz $A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

   Slika vektorja $(2,2)$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

   Vektor, ki se preslika v vektor $(3,0)$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

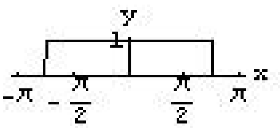
4. Napiši Taylorjevo vrsto do vključno tretje potence x-a pri razvoju okoli točke 0 in s temi členi izračunaj približno vrednost integrala funkcije $(f(x)-1)/x$ na intervalu $[0,1]$. Funkcija $f(x)$ je $\cos(x)$.

   Rešitev:

   Prvih nekaj členov Taylorjeve vrste za $f(x) = \cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)-1}{x}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 \frac{1-\frac{x^2}{2}-1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$$

5. Nariši graf funkcije $a_0 + a_1\cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = 1$, za x, ki je absolutno manj kot $3\pi/4$, in 0 drugje, s periodo 2π.



   Rešitev:

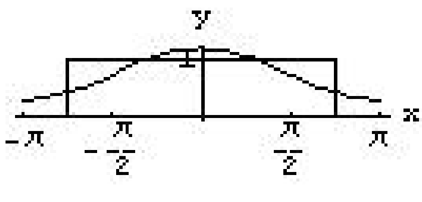
   Najprej izračunajmo koeficiente. Ker je dana funkcija soda, je $b_1 = 0$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{3\pi/4} \mathrm{d}x = \frac{3}{4} \\ a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{3\pi/4} \cos x \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \end{aligned}$$

   Iskana funkcija je

$$f(x) \approx a_0 + a_1 \cos x = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos x$$

   Slika:



6. Reši začetni problem

$$2y'(x) + y''(x) = \sin(x), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Rešitev:

To je linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti. Najprej rešimo homogeni del $y'' + 2y' = 0$ z nastavkom $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, ki nam da karakteristično enačbo $\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2) = 0$, ki ima rešitvi $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = -2$. Rešitev homogenega dela:

$$y_H = A + B\mathrm{e}^{-2x}$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom $y_p = C\sin x + D\cos x$. Odvajamo: $y_p' = C\cos x - D\sin x$, $y_p'' = -C\sin x - D\cos x$ in vstavimo v enačbo:

$$-C\sin x - D\cos x + 2C\cos x - 2D\sin x = \sin x$$

Primerjava koeficientov nam da sistem enačb $-C - 2D = 1$ in $2C - D = 0$, ki ima rešitev $C = -\frac{1}{5}$ in $D = -\frac{2}{5}$, zato je partikularna rešitev:

$$y_p = -\frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x$$

Splošna rešitev je vsota rešitve homogenega dela in partikularne rešitve

$$y(x) = y_p + y_H = -\frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + A + B\mathrm{e}^{-2x}$$

Da upoštevamo še začetne pogoje, rešitev odvajamo

$$y'(x) = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x - 2B\mathrm{e}^{-2x}$$

in vstavimo začetne pogoje

$$\begin{aligned} y(0) &= -\frac{2}{5} + A + B = 0 \\ y'(0) &= -\frac{1}{5} - 2B = 1 \end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitev $A = 1$ in $B = -\frac{3}{5}$, torej je rešitev začetnega problema

$$y(x) = -\frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + 1 - \frac{3}{5}\mathrm{e}^{-2x}$$

7. Reši diferencialno enačbo z danimi začetnimi pogoji

$$y'(x) - 2y(x) = 1, \qquad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Rešitev:

To je linearna diferencialna enačba 1. reda. Najprej homogeni del:

$$\begin{aligned} y' - 2y &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= 2\mathrm{d}x \\ \ln y &= 2x + \ln C \\ y_H &= C\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

Partikularno rešitev izračunamo z variacijo konstante: $y = C(x)e^{2x}$, $y' = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x}$. To vstavimo v enačbo in dobimo $C'(x) = e^{-2x}$, kar nam da $C(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$. Partikularna rešitev je $y_p = -\frac{1}{2}$, splošna pa

$$y(x) = y_p + y_H = -\frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

Upoštevamo še začetni pogoj $y(0) = -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2}$ in dobimo $C = 1$, zato

$$y(x) = -\frac{1}{2} + e^{2x}$$

8. Določi radij in višino valja z največjim volumnom, ki ga lahko včrtaš v kroglo z radijem 1.

Rešitev:

Da bo valj včrtan, morata radij in višina zadoščati pogoju (Pitagorov izrek): $r^2 + \frac{v^2}{4} = 1$. Volumen valja izračunamo po formuli $V = \pi r^2 v$.

Opravka imamo z vezanimi ekstremi, zato zapišemo novo funkcijo

$$F(r, v, \lambda) = \pi r^2 v + \lambda\left(r^2 + \frac{v^2}{4} - 1\right),$$

ki jo odvajamo po vseh treh spremenljivkah in odvode enačimo z 0

$$\begin{aligned} F_r &= 2\pi r v + 2\lambda r = 0 \\ F_v &= \pi r^2 + \frac{\lambda v}{2} = 0 \\ F_\lambda &= r^2 + \frac{v^2}{4} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Dobljeni sistem ima rešitev $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $v = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, kar sta dimenziji valja z največjim volumnom.

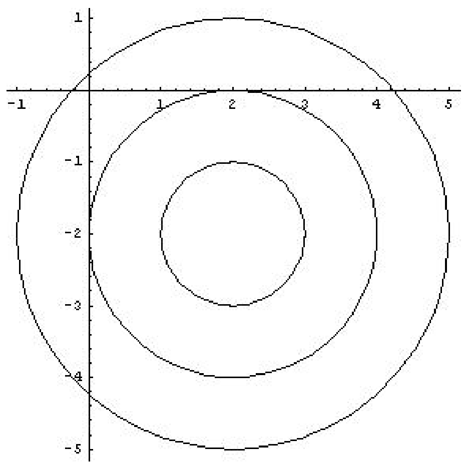
9. Nariši nivojske krivulje $z = 1$, $z = 4$ in $z = 9$, kjer je z funkcija spremenljivk x in y, podana z izrazom

$$z = 8 - 4x + x^2 + 4y + y^2.$$

Rešitev:

Pri danih vrednostih za z, dobimo:

$$\begin{aligned} z = 1 &: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 1 \\ z = 4 &: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4 \\ z = 9 &: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 9 \end{aligned}$$



To pa so ravno koncentrične krožnice s središčem v točki $(2, -2)$ in radiji 1, 2 in 3.