1. **Determinanta, poddeterminanta**
   - dvovrstne determinante srečamo pri reševanju sistemov dveh linearnih enačb z dvema neznankama; spodnji izraz imenujemo determinanta sistema
   - $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
2. **Lastnosti determinante**
   - če ima matrika A' v stolpcih zapisane vrstice matrike A, potem velja *detA'= detA*
   - če se matriki A in A' ujemata v vseh elementih, razen v i-ti vrstici, in če velja $a_{ij}'=ca_{ij}$, potem velja tudi *detA'= c detA*
   - če je A'matrika, ki jo dobimo tako, da v matriki A zamenjamo med seboj dve vrstici, potem velja *detA'= -detA*
   - če v matriki A vse elemente kakšne vrstica izrazimo kot vsoto dveh členov, je vrednost njene determinante enaka vsoti dveh determinant
   - če je matrika A' dobljena tako, da kakšni vrstici matrike A prištejemo večkratnik kakšne druge vrstice, potem velja da je *detA'= detA*
   - matrika A je zgornje trikotna, če je $a_{ij}=0$ takoj ko velja i > j; To pomeni, da ima pod glavno diagonalo same ničle; Determinanta zgornje trikotne matrike je enaka produktu elementov na diagonali detA=a_{11} + ... + a_{nn}
3. **Cramerjevo pravilo**
   - velja za sisteme linearnih enačb
   - sistemlinearnih enačb lahko zapišemo kot neničelno determinanto
   - $D = \begin{vmatrix} a_{11} - & a_{12} \\ | & | \\ a_{n1} - & a_{nn} \end{vmatrix}$ in je potem rešitev sistema dana kot $x_j = \frac{D_j}{D}$, pri čemer je Dj determinanta, ki jo dobimo,če j-ti stolpec zamenjamo s stolpcem na desni
4. **Računanje z vektorji, kot med vektorji**
   - produkt vektorja s skalarjem je vektor
   - $\alpha a = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ : \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_1 \\ : \\ \alpha a_n \end{vmatrix}$
   - vsota vektorjev **a** in **b** je vektor
   - $a + b = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 \\ : \\ a_n + b_n \end{vmatrix}$
   - vsota je komutativna, asociativna,skalarno množenje pa distributivno
   - če obstaja tak skalar,da velja **a** = c**b** in **b** = c**a**, ter če velja da so $c1, \ldots\ldots, c_n \in \Re$skalarji in $a_1, \ldots.., a_n \in \Re^n$ vektorji, potem vektorju $d = c_1 a_1 + \ldots\ldots + c_n a_n$ pravimo linearna kombinacija vektorjev $a_1, \ldots.., a_n$.
5. **Skalarni produkt vektorjev**
   - je operacija, ki vektorjema **a** in **b** priredi skalar

- $a \circ b = a_1 b_1 + ... + a_n b_n$
- lastnosti: komutativnost, distributivnost, izpostavljanje skalarjev, pozitivna definitnost
- število $|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}$ imenujemo dolžina vektorja **a**
- vektorja sta pravokotna, kadar je $a \circ b = 0$
- vsak vektor lahkozapišemo kot $\vec{a} = |a|\vec{e}$, kjer je **e** enotski vektor dolžine ena in določa smer vektorja **a**

6. **Vektorski produkt vektorjev**
   - definiran je le za vektorje s tremi komponentami
   - vektorski podukt je predpis, ki vektorjema $a, b \in \Re^3$ priredi vektor $a \times b \in \Re^3$
   - vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ in $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ lahko zapišemo tudi kot $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \end{vmatrix}$, kjer so i, j, k enotski vektorji v smeri vseh treh osi.
   - Lastnosti: distributivnost in ni komutativen, smemo izpostavljati skalarje
   - Vektorski produkt je enak 0 natanko takrat, kadar sta vektorja kolinearna, oziroma je vsaj eden od njiju enak 0. Produkt nekolinearnih vektorjev ima dolžino enako ploščini paralelograma, ki ga vektorja oklepata, po smeri pa je pravokoten na oba vektorja.
7. **Mešani produkt vektorjev**
   - mešani produkt dobimo, ko vektorski produkt skalarno množino
   - mešani produkt vektorjev **a,b** in **c** je skalarni produkt vektorjev **a** in **b**x**c**.
   - Velja $(a, b, c) = \begin{vmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{vmatrix}$
   - Če v determinanti dve vrstici zamenjamo, se predznak spremeni: $(a, b, c) = -(b, a, c)$
   - Če zamenjamo še prviin tretji faktor dobimo: $(a, b, c) = (c, a, b)$
   - Mešani produkt je po velikosti enak volumnu paralepipeda, ki je napet na vektorje **a,b,c**
   - Mešani pordukt je enak nič, če je kakšen od vektorjev enak 0 ali pa če vektorji ležijo v isti ravnini – pravimo da so komplanarni
8. **Cauchy-Schwarzova neenakost**

- za poljubna vektorja **a** in **b** velja $|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$
- kot med poljubnima neničelnima vektorjema: $\varphi = \arccos \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a| \cdot |b|}$

9. **Paralelogramska enačba**
   - trikotniška neenakost: zapoljubna vektorja **a** in **b** velja $|a + b| \leq |a| + |b|$

- paralelogramska enačba: narišemo vektorja a in b, tako da se prvi konča kjer se drugi začne, in nato narišemo še en vektor a, tako da se le ta zaključi v koncu vektorja b in pa vektor –b ki leži med obema a-jema
- za tak sistem velja paralelogramska enačba, ki se glasi $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2 \cdot \left(|a|^2 + |b|^2\right)$
- rešujemo pa jo tako, da najprej dokažemo |a+b| in nato še |a-b| in nato vse skupaj seštejemo
- enačba pravi, da je vsota kvadratov obeh diagonal enaka vsoti kvadratov vseh stranic paralelograma, ki ga tvorita a in b

10. Enačba ravnine, enačba premice

- **RAVNINA:** v prostoru ja določena s točko, ki leži na njej in vektorjem normale, ki je pravokoten nanjo
- točka **T** leži v tej ravnini, če je vektor **r – r**$_{\mathbf{T}}$ pravokoten na vektor **n**
- vektorska enačba ravnine je $(\vec{r} - r_T) \cdot \vec{n} = 0$
- splošna oblika enačbe ravnine $\vec{n}_1 x + n_2 y + \vec{n}_3 z = d; d = \vec{n} \cdot \vec{r}_A$
- normirana oblika enačbe ravnine(če je |n|=1) $\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$
- segmentna oblika enačbe ravnine $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
- PREMICA: v prostoru je določena s točko A in smernim vektorjem **e**
- Točka T leži na premici, če je vektor **r - r**$_{\mathbf{T}}$ vzporeden vektorju **e**
- Parametrična oblika enačbe premice je $\vec{r} = r_T + t\vec{e}$
- Kanonična oblika enačbe premice $\frac{x-a_1}{e_1} = \frac{y-a_2}{e_2} = \frac{z-a_3}{e_3}$
- Premica je lahko dana kot presečišče dveh nevzpordnih ravnin;
- Potem je **e** = $\mathbf{n_1}$ x $\mathbf{n_2}$

11. Razdalja med točkama, razdalja med točko in premico

- **Razdalja med točkama:** če imamo dve točki T in T', potem je razdalja med njima enaka korenu kvadratov razlike istih komponent obeh krajevnih vektorjev točk oziroma $d = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$
- **Razdalja med točko in premico:** razdalja točke T od premice, ki gre skozi tč. T' je enaka $d = \frac{|(\vec{r}_T - \vec{r}_{T'}) \times \vec{e}|}{|\vec{e}|}$

12. Razdalja med točko in ravnino, razdalja med premicama, razdalja med premico in ravnino

- **Razdalja med točko in ravnino:** razdalja točke T od ravnine, na kateri leži tč. T' je enaka $d = \left|(\vec{r}_{T'} - \vec{r}_T) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$
- **Razdalja med dvema premicama:**

- *Če sta vzporedni*, je razdalja enaka razdalji med katerokoli tč.na prvi premici od druge premice
- Če nista vzporedni, je razdalja med njima višina paralepipeda, ki je napet na vektorje **r**$\mathbf{r}_A$ - $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{e}_1$ in $\mathbf{e}_2$ oziroma $d = \frac{\left|\left(\vec{r}_A - \vec{r}_B, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)\right|}{\left|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\right|}$

13. Razdalja med premico in ravnino:

- Če sta vzporedni računamo kot razdaljo točke od ravnine
- Če nista vzporedni je razdalja enaka nič

14. Računanje z matrikami

- *Seštevanje:* seštevamo lahkosamo matrike enakih dimenzij, in to tako da seštejemo istoležne elemente
- *Množenje s skalarjem:* s skalarjem množimotak, da vsak element posebej pomnožimo s skalarjem
- *Transponiranje:* pri transponiranju matrike zamenjamo vlogo stolpcev in vrstic
- **Rang matrike**
- Matrika je ranga r, če obstaja taka poddeterminanta te matrike, ki je velikosti r x r in različna od 0,vsaka poddeterminanta večja od r x r pa je enaka 0
- Če je A dimenzije m x n, potem je rang A =< min{m,n}
- Rang A = rang A^T
- A je obrnljiva matrika natanko tedaj ko je A elt. M_{nxn} in je rang A = n
- Lepše povedano A^{-1} obstaja kadar je det A != 0
- Rang matrike je enak številu linearno neodvisnih stolpcev oziroma vrstic
- Operacije, ki ne spremenijo ranga matrike imenujemo elementarne operacije

15. Inverzna matrika (definicija, lastnosti, izračun)

- matrika A je obrnljiva ali nesingularna, če obstaja taka matrika A^{-1}, da je $AA^{-1} = A^{-1}A=I$
- Matriki A^{-1} pravimo inverzna matrika
- Če pa take matrike ni potem je A singularna
- Matrika A je nesingularna natanko takrat ko je det A != 0

16. Posebne vrste matrik (simetrična …)

- *Matrika je simetrična* če je A^T = A oziroma, če jo lahko prezrcalimo prek diagonale in se nič ne spremeni
- *Matrika je antisimetrična*, če velja A^T = -A
- Vsako matriko lahko zapišemo kot vsoto simetrične in antisimetrične matrike A = S + T, kjer sta $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ in $T = \frac{1}{2}(A - A^T)$
- Singularna matrika
- Kompleksna matrika: če matriko A transponiramo in konjugiramo dobimo njeno adjungirano matriko $(A_{konj})^T = A^*$

17. Sistemi linearnih enačb - osnovni izrek

- sisteme linearnih enačb krajše zapišemo z razširjeno matriko

- ko imamo enkrat matriko zapisano, preoblikujemo matrikoz elementarnimi operacijami do zgoraj trikotne matrike in nato poiščemo rešitve sistema
- *Izrek o rešljivosti sistemov:* sistem m enačb z n neznankami Ax=b, z razširjeno matriko R = [Ab] je rešljiv natanko takrat, kadar imata matriki A in R enaka ranga
- *Če rang enak številu rešitev otem je rešitev ena sama*
- *Če je rang < n lahko za n – r neznank izberemo poljubne vrednosti, ostalih r pa je z njimi natanko določenih. V tem primeru dobimo parametrično družino rešitev.*

18. Gaussova metoda za reševanje sistema linearnih enačb

- pravi, da elementarne operacije ne vplivajo na rešitev sistema linearnih enačb
- opisuje tri elementarne operacije:
- če zamenjamo vrstici se nič ne spremeni
- če vrstico množimo z neničelnim številom, to ne spremeni rešitve
- če od vrstice odštejemovečkratnik druge vrstice to ne vpliva na reštev
- Nato sistem enačb zapišemo v matrični obliki in jo z elementarnimi operacijami problikujemo do zgoraj trikotne matrike.
- Nato pogledamo ranga prvotne in problikovane matrike:
- Če sta enaka potem ima sistem vsaj eno rešitev
- Če sta različna potem sistem sli nima reštev, ali pa jih ima neskončno
- Če pa je rang še enak številu neznak potem topomeni, da ima enačba natanko eno rešitev

19. Vektorski prostor

- vektorski prostor V je neprazna množica z elementi – vektorji,v kateri sta definirani dve operaciji: seštevanje vektorjev in množenje vektorjev s skalarjem
- lastnosti vektorskega prostora:
- seštevanje je komutativno x+y=y+x
- seštevanje je asociativno (x+y)+z=x+(y+z)
- obstaja ničelni vektor, ki je ničla za seštevanje x + 0 = x
- za vsak vektor x obstaja nasprotni vektor –x tako da je x + (-x) = 0
- množenje s skalarjem je distributivno glede na seštevanje skalarjev a(x+y)=ax+ay
- množenje s skalarjem je distributivno glede na seštevanje vektorjev x(a+b)=ax+bx
- za poljuben x elt. V in skalarja a in b velja (ab)x=a(bx) in 1x = x

20. Baza vektorskega prostora

- vektorji e1,e2,...,en sestavljajo bazo prostora R^n, to pa zato, ker so linearno neodvisni, saj se vsak vektor x elt. R^n izraža kot linearna kombinacija x = x1e1+...+xnen; pravimo jim standardna baza prostora
- vektorski prostor Rn ima v bazi prostora n vektorjev - > dimRn = n
- vektorski prostor P3 vseh polinomov stopnje <= 3 ima v bazi 4 polinome -> dim P3 = 4

- vektorski prostor vseh zveznih funkcij nima baze, saj je v nem poljubno mnogo funkcij, zatoje dim f = ∞

21. Linearna neodvisnost vektorjev

- množica vektorjev x1,....,xn je linearno neodvisna, če je linearna kombinacija a1x1+...+anxn enaka ničelnemu vektorju samo, če so vsi skalarji a1,...,an enaki 0
- če obstaja vsaj ena linearna kombinacija a1x1+...+anxn = 0 kjer je vsaj en skalar ai != 0 potem so vektorji linearno odvisni
- trie neničelni vektorji so linearno neodvisni natanko takrat kadar je rang matrike A = [x,y,z] , ki ima te vektorje za stolpce, enak 3, to pa je, koje mešani produkt (x,y,z)=det A^T = det A != 0, torej kovektorji niso komplanarni

22. Linearna preslikava

- linearna preslikava ohranja linearne kombinacije
- preslikava F: V1 → V2 je linearna preslikava, če za poljubno linearno kombinacijo ax + by =elt. V1 velja F(ax + by) = aF(x) + bF(y)
- vsaka linearna preslikava se izraža kot množenje z matriko F(x)=Ax

23. Lastne vrednosti, lastni vektorji matrike

- lastne vektorji: to so tisti vektorji, ki jim matrika ne spremeni smeri
- če obstaja A je elt. Mn, kije kvadratna matrika, potem je vektor Xo je elt. M_{nx1} lastni vektor matrike A če velja, daje različen od nič in da obstaja tako število λ da velja Axo = λXo
- število λ imenujemo lastna vrednost, ki pripada lastnemu vektorju Xo
- lasten vektor obstaja če je det(A- λI) = 0
- v determinantona diagonalo vstavimo λ in izračunamovrednosti λ_1, λ_2, ...
- nato vstavimo vrednosti λ v matriko in izračunamo njeno determinanto
- tako dobimo reštve za komponente lastnega vektorja

24. <u>Lastne vrednosti hermitskih, poševno hermitskih, unitarnih matrik?</u>

25. Funkcijska vrsta (definicija, definicijsko območje, konvergenca)

- funkcijska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0) = u_0(x) + ... + u_n(x) + ...$ je vrsta, katere členi so funkcije u_n , definirane na nekem skupnem intervalu (a,b)
- za vsak x_0 iz tega intervala je $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0) = u_0(x_0) + ... + u_n(x_0) + ...$ številska vrsta, ki je lahko konvergentna ali divergentna
- Območje konvergence funkcijske vrste je množica tistih točk $x \in (a,b)$, kjer je vrsta konvergentna
- Vsota funkcijske vrste je funkcija $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, ki je definirana na območju konvergence D vrste.
- Funkcijska vrsta je enakomerno konvergentna na množici $D \subset \Re$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks N, da je za vsak m > N $|S(x) - S_m(x)| < \varepsilon$ pri vsakem $x \in D$

- Če je $a_0 + a_1 + ... + a_n + ...$ številska vrsta s pozitivnimi členi in če za vsak $x \in D$ in vsak n velja $|u_n(x)| \leq a_n$, pravimo da je vrsta majoranta funkcijske vrste
- Funkcijska vrsta, ki ima na množici $D \subset \Re$ konvergentno majoranto, je na D enakomerno konvergentna
- Če je vrsta na nekem intervalu I enakomerno konvergentna, členi pa so zvezne funkcije, je tudi vsota zvezna funkcija I.
- Enakomerno konvergentno vrsto lahko členoma odvajamo in členoma intergiramo

26. Potenčna vrsta (definicija, konvergenca)

- funkcijsko vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ imenujemo potenčna vrsta okrog točke x_0
- Števila $a_n \in \Re$ so koeficienti potenčne vrste
- Če je konvergentna v tč. $x_1 \neq x_0$ je absolutno konvergentna za vsak x, kjer je $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$
- Če je divergentna v tč. x_2 je divergentna v vsaki tč. x, kjer je $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$
- Če obstaja tako največje število R da je potenčna vrsta absolutno konvergentna za vsak x, kjer je |x - x0| < R in divergentna za vsak x, kjer je |x - x0| > R, je število R konvergenči polmer vrste
- Če je vrsta konvergentna za vsak x je polmer R = neskončno, če pa je konvergentna le v točki x0, je polmer R=0
- Če obstaja $L = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0$, potem je konvergenčni polmer enak R=1/L

27. Odvajanje in integriranje potenčnih vrst

- Če potenčno vrsto s konvergenčnim polmerom R in vsoto f(x) členoma odvajamo, dobimo potenčno vrsto z enakim konvergenčnim polmerom R in vsoto $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$
- Nedoločeni integral funkcije f(x) se izražakot vsota potenčne vrste z istim konvergenčnim polmerom R $\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n (x - x_0)^m dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$
- Vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ je Taylorjeva vrsta funkcije f(x) okrog točke x0 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ko je n naravno število

28. Taylorjeva vrsta funkcije

- če je f(x) neskončnokrat odvedljiva funkcija v točki x0, je poTaylorjevi formuli $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$, kjer je $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, če gre ostanek R → 0, ko gre x → ∞, se vrednost izraža kot vsota Taylorjeve vrste, ki je potenčna vrsta okoli točke x0
- Pravimo, da smo funkcijo f(x) razvili v Taylorjevo vrsto okrog točke x0

29. Taylorjeva vrsta funkcij

- $e^x = 1 + x + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$
- $\sin x = x - .\frac{x^3}{3!} + .. + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$
- $\cos x = 1 - .\frac{x^2}{2!} + .. + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$
- $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - ...$

30. Binomska vrsta, binomski koeficienti

- $(1 + x)^a = 1 - +ax + .. + \binom{a}{n} x^n + ...$
- zgornja vrsta je binomska vrsta, njeni koeficienti pa so enaki $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1).....a(a-n+1)}{n!}$ in so definirani za vsak realen n

31. Fouriejeva vrsta (definicija, konvergenca)

- vrsti oblike $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ pravimo trigonometrična vrsta
- členi so periodične funkcije s periodo 2π, in če je vrsta konvergentna,je torej tudi njena vsote periodična funkcija s periodo 2 π
- če je vrsta enakomerno konvergentna na intervalu [-π, π], tako da je njena vsota zvezna funkcija $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ smemo vrsto členoma intergirati, iz česar lahko dobimo koeficiente an in bn
- sledi: $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ → koeficient a0 je torej povprečna vrednost funkcije na intervalu [-π, π]
- vrsti $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ s koeficienti $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \cdot dx$ in $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \cdot dx$ pravimo Fourierjeva trigonometrična vrsta
- Če je periodična funkcija f(x) s periodo 2π odsekoma zvezna na intervalu [-π, π] in ima v vsaki točki tega intervala levi in desni odvod,je njena Fourierjeva vrsta konvergentna

32. Fourierova vrsta s poljubno periodo

- naj bo f(x) periodična funkcija s periodo 2a
- če vpeljemo novo spremenljivko t = πx/a, bo funkcija f(x)=f(at/x)=g(t) periodična s periodo 2π
- dobimo Fourierjevo vrsto $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{a} + b_n \sin\frac{n\pi x}{a})$ s koeficienti $a_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\cdot dx$ in $b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot dx$

33. Sinusna Fouriejeva vrsta, kosinusna Fouriejeva vrsta

- kosinusna Fourirjeva ali vrsta sode funkcije f(x) s periodo 2a je $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a}$, kjer je $a_0 = \frac{1}{a}\int_{0}^{a} f(x)dx$ in $a_n = \frac{2}{a}\int_{0}^{a} f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\cdot dx$
- sinusna Fourirjeva ali vrsta lihe funkcije f(x) s periodo 2π je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a}$, kjer je $b_n = \frac{2}{a}\int_{0}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\cdot dx$

34. Funkcija dveh spremenljivk (definicija, zveznost, limita, graf)

- *Definicija:* Funkcija dveh spremenljivak je preslikava, ki vsaki točki (x,y) iz ravninske množice D priredi realno število z = f(x,y), torej preslikava $f : D \subset \Re^2 \to \Re$
- Množica D je definicijsko območje funkcije
- *Graf:* funkcijo dveh spremenljivk lahko gemetrijsko ponazorimo z njenim grafom $\Gamma(f) = \{(x,y,z);(x,y) \in D, z = f(x,y)\} \subset \Re^2 \times \Re = \Re^3$, ki predstavlja neko ploskev v prostoru R^3
- Pravokotna projekcija na ravnino z=0 je definicijsko območje, pravokotna projekcija na os z pa zaloga vrednosti
- Funkcijo pa lahko ponazorimo tudi z nivojskimi krivuljami, kjer vsaka točka leži na natanko eni nivojski krivulji, ki potem zapolnijo celoten prostor D
- Funkcija f(x,y) je v točki (a,b) iz D zvezna, če obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$ da je $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$ za vsak (x,y) iz D ki je od (a,b) oddaljen f
- *Limita:* Število l je limita funkcije f(x,y), ko gre točka (x,y) proti točki (a,b); $l = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, če obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da je $|f(x,y) - l| < \varepsilon$ če je $0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2$
- *Zveznost:* Funkcija f je v točki a=(a1,.....,an) zvezna natanko takrat, kadar je $\lim_{x\to a} f(x1,....,xn) = f(a1,....,an)$
- Odvod funkcije več spremenljivk
- če funkciji z = f(x,y), ki je zvezna v točki (a,b) na območju D predpišemo vrednost y = b, je funkcija odvisna le še od ene spremenljivke x, dobljena funkcija $f_1(x)$ pa je zvezna

- prav tako je zvezna funkcija $f_2(y)$, koje x = a
- če obstaja limita diferenčnega količnika $\lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ jo imenujemo parcialni odvod funkcije f po spremenljivki x in označimo z $\frac{\partial f}{\partial x}$ ali $f_x(x,y)$
- isto velja tudi za difer. Kol. funkcije $f_2(y)$, le da je tu limita parcialni odvod funkcije f po spremenljivki y
- funkcija n spremenljivk ima n parcialnih odvodov, ki skupaj sestavljajo vektor z n komponentami,ki ga imenujemo gradient funkcije f

35. Posredno odvajanje:

- večinoma pravila za odvajanje veljajo tako za odvajanje kot tudi parcialno odvajanje
- izjema pa je pravilo za posredno odvajanje ali verižno pravilo

- naj bo z=f(x,y) diferenciabilna, spremenljivki x in y pa naj bosta odvedljivi funkciji parametra t, torej x = x(t) in y = y(t), potem je tudi f(x(t),y(t)) posredna funkcija parametra t in njen odvod je
$$\frac{dz}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t))}{h}$$

- od tod sledi da je $\frac{dz}{dt}=f_x x'(t)+f_y y'(t)$

36. Višji parcialni odvodi

- parcialna odvoda funkcije f(x,y) sta spet funkciji dveh spremenljivk in lahko se zgodi da sta parcialno odvedljivi
- njune odvode imenujemo parcialni odvodi funkcije f drugega reda
- parcialni odvodi drugega reda funkcije dveh spremenljivk so štrije
- $f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial f_x}{\partial x};\ f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial f_y}{\partial y};\ f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial f_x}{\partial y};\ f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f_y}{\partial x}$

37. Taylorjeva vrsta funkcije dveh spremenljivk

  - funkcijo dveh spremenljivk lahko prav tako razvijemo po Taylorjevi formuli
  - funkcija f(x,y) naj bo (n+1)-krat zvezno parcialno odvedljiva na obe spremenljivki v okolici tč. (a,b)

- Potem velja $f(a+h,b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + \ldots + \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(a,b)h^{n-i}k^i + R_n$
    - Če je limita $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ potem lahkoTaylorjevo formulo nadomestiom s Taylorjevo vrsto $f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f^n}{\partial x^{n-i}\partial y^i}h^{n-i}k^i\right)$

38. Izrek o implicitni funkciji

- Naj bo F(x,y) zvezna in diferenciabilna v okolici točka (a,b) in naj bo F(a,b) = 0.
- Če je F_y(a,b) != 0 obstaja odvedljiva funkcija y = y(x), ki je definirana v neki oklici realnega števila a in zadošča pogojema y(a) = b in F(x,y(x))=0

39. Ekstrem funkcije dveh spremenljivk

- zvezna funkcija dveh spremeljivk zavzame v točki (a,b) lokalni maksimum, če obstaja tak δ da je $f(a+h,b+k) - f(a,b) < 0$ za vsak (h,k) ki zadošča pogoju $h^2 + k^2 < \delta^2$, in lokalni minimum, če obstaja tak δ da je $f(a+h,b+k) - f(a,b) > 0$ za vsak (h,k) ki zadošča pogoju $h^2 + k^2 < \delta^2$
- pogoj za nastop ekstrema v točki (a,b) je $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$
- točka (a,b) v kateri je $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ je stacionarna točka ali kritična točka funkcija f(x,y)

40. Hessejeva matrika

- funkcija n spremenljivk ima n2 parcialnih odvodov drugega reda
- vsi skupaj sestavljajo Hesserjevo matriko $H = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$
- če druga mešana odvoda obstajata in sta zvezni funkciji, sta enaka
- Zadosten pogoj za ekstrem: Točka (a,b) naj bo stacionarna točka dvakrat zvezno odvedljive funkcije f(x,y) in naj bodo $A = f_{xx}(a,b); B = f_{xy}(a,b); C = f_{yy}(a,b)$ vrednosti drugih odvodov funkcije f v tej točki in $H(a,b) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ matrika drugih odvodov f v tej točki
- Potem velja:

- Če je detH(a,b)=AC - B^2 > 0, je v točki (a,b) lokalni minimum kadar je A > 0 in lokalni maksimum kadar je A < 0
- Če je detH(a,b) < 0 je v točki (a,b) sedlo
- Če je detH(a,b) = 0 pa na podlagi drugih odvodov o obstoju ekstrema ne moremo sklepati

41. Vezani ekstrem funkcije dveh spremenljivk

- vezani ekstrem je ekstrem funkcije nad dano krivuljo
- če je f(x,y) definirana na območju D in je g(x,y)=0 implicitna oblika enačbe neke krivulje, je vezani ekstrem funkcijeekstrem na množici točk, kizadoščajo pogoju g(x,y)=0
- vezane ekstreme lahko poiščemo tudi z Langrangovo funkcijo, ki jo sestavimo iz funkcije in vseh danih pogojev
- Lagrangova funkcija je odvisna od n+k spremenljivk – poleg x1,...,xn starih nastopa še k novih, ki so λ1,...,λn → to so Lagrangovi multiplikatorji
- Vezani ekstremi funkcije f pri pogojih g1=0,....,gk=0 nastopijo med stacionarnimi točkami Lagrangove funkcije L, torej med točkami, ki so rešitve sistema

42. Diferencialna enačba (definicija, začetni problem, robni problem)

navadna diferencialna enačba je zveza med neodvisno spremeljivko x, odvisno spremenljivko y in njenimi odvodi $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$

poleg navadnih obstajajo še parcialne diferencialne enačbe, kipovezujejo dve ali več neodvisnih spremenljivk, odvisno spremenljivko in njene parcialne odvode

red diferencialne enačbe je red najvišjega odvoda v enačbi

rešitev diferencialne enačbe reda n je vsaka funkcija y = g(x), ki je intervalu [a,b] n-krat odvedljiva in za vsak x element [a,b] zadošča pogoju $F(x, g(x), g'(x), g''(x), ..., g^{(n)}(x)) = 0$

diferencialna enačba reda n ima navadno celo družino rešitev ki so odvisne od n parametrov → pravimo jim splošna rešitev, ni pa nujno da jo ima vsaka dif. Enačba

če v splošni funkciji izberemo vrednosti vseh parametrov dobimo natanko določenofunkcijo ki ji pravimo partikularna rešitev

lahko se zgodi da ima enačba poleg splošne rešitve še kakšno dodatno rešitev in jo ne moremo dobiti z izbiro konstante v splošni rešitvi → taki rešitvi pravimo singularna rešitev

začetni problem: splošna rešitev enačbe $F(x, y, y') = 0$ je enoparametrična družina odvedljivih funkcij y=g(x,C) ki določa enoparametrično družino krivulj v ravnini

partikularno rešitev dobimo tako,da predpišemo vrednost parametra C ali pa postavimo kakšen pogoj, ki ga mora rešitev izpolnjevati, na primer y(x0)=y0 takemu načinu pravimo začetni pogoj, ko pa mu pridružimo še prvotno dif. Enačbo pa dobimo začetni problem

43. Diferencialna enačba z ločljivimi spremenljivkami

- z tako vrsto enačbe imamo opravka, ko desna stran enačbe y' = f(x,y) razpade na produkt dveh faktorjev, kjer je vsak odvisen le od ene spremenljivke y' = g(x)h(y)
- upoštevamo, da je y' = dy/dx in dobimo $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$
- če sta funkciji zvezni dobimozgoraj enakostdiferencialov in lahko enačbo intergiramo in dobimo splošno rešitev enačbe

44. Linearna diferencialna enačba 1. reda (homogena, nehomogena)

- enačbo oblike $\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$ imenujemo linearna diferencialna enačba prvega reda
- če je g(x) = 0 potem je enačba homogena in ima ločljivi spremenljivki
- nehomogeno linearno enačbo rešimo s pomočjo variacije konstante
- v splošni rešitvi y_H prirejene homogene enačbe nadomestimo konstanto C z neznano funkcijo v(x)
- nato dobljeno rešitev odvajamo in dobljene vrednosti vstavimo v enačbo
- tako dobimo enačbo z ločljivima spremenljivkama za neznano funkcijo v(x)
- splošna rešitev nehomogene lin. Enačbe je vedno vsota rešitve homogenega dela enačbe in rešitve nehomogenega dela enačbe

45. Bernoullijeva diferencialna enačba

- enačbo oblike $y' + f(x)y = g(x)y^n$, kjer sta f(x) in g(x) zvezni funkciji odvisne spremenljivke x in je n != 0,1 imenujemo Bernoullijeva enačba
- enačbo delimo z y^n in dobimo $y^{-n}y' + f(x)y^{-n+1} = g(x)$
- vpeljemo novo odvisno spremenljivko z = y^{-n+1}, jo odvajamo in dobimo $z' + (-n+1)fz = (-n+1)g$, ki je linearna enačba

46. Eksaktna diferencialna enačba

- vsako diferencialno enačbo y' = f(x,y) lahko zapišemo v obliki M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0
- funkciji M in N sta funkciji dveh neodvisnih spremenljivk
- enačba M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 je diferencialna enačba, če sta ode funkciji zvezno parcialno odvedljivi na obe spremenljivki in velja $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
- z integriranjem pa lahko najdemo tudi tako funkcijo F(x,y) da je $\frac{\partial F}{\partial x} = M; \frac{\partial F}{\partial y} = N$, tako je na levi totalni diferencial funkcije F(x,y) in enačbo lahko zapišemo ko dF(x,y) = 0
- splošna rešitev je F(x,y) = C

47. Vpeljava parametra v diferencialno enačbo

- Če enačba nima odvisne spremenljivke uporabimo spodnji postopek

- včasih odvoda y' ne moremo eksplicitno izraziti z x, lahko pa, obratno izrazimo x z y',torej x = h(y')
- to enačbo potem diferenciramo in vpeljemo nov parameter p = y' in dobimo $dx = h'(p)dp$, ker pa je dy = pdx je tudi dy = ph'(p)dp, torej y(p) = ∫ph'(p)dp
- rešitev v parametrični obliki je x(p)=h(p) in y(p) = ∫ ph'(p)dp

48. Ortogonalne trajektorije

- naj bo dana enoparametrična družina krivulj F(x,y,C) = 0
- krivulje, ki sekajo vse krivulje družine pod pravim kotom imenujemo ortagonalne trajektorije
- tako družino, kjer je funkcija F(x,y,C) = 0 parcialno odvedljiva lahko predstavimo z enačbo y' = f(x,y)
- krivulja iz družine F(x,y,C) = 0, ki poteka skozi točko (x,y) ima v tej točki tangens naklonskega kota tangente enak f(x,y)
- tangens naklonskega kotatangente na krivuljo,ki je na krivuljo pravokotna, je temu kotu recipročen in nasproten, torej $y'_T = -\frac{1}{f(x,y)}$
- družina ortagonalnih trajektorij je splošna rešitev te enačbe

49. Eksistenca in enoličnost rešitve diferencialne enačbe

- rešitev in enoličnost sta odvisna od lastnosti funkcije f(x,y) = y'
- če le ta zadošča določenim pogojem je rešitev natanko ena
- *Eksistenčni izrek:* funkcija f(x,y) naj bo definirana, zvezna in omejena z |f(x,y)| < M v vseh točkah pravokotnika Q = {(x,y); |x-x0|<a, |y-y0|<b}
- Če obstaja konstanta N, da je |f(x,y2) - f(x,y1)| <= N|y2 - y1| za poljubni točki (x, y1) in (x,y2) iz Q, ima začetni problem vsaj eno rešitev y(x), ki je definirana na intervali (x0 – a, x0 + a), kjer je a manjše od števil a,b/M
- Zadnji pogoj imenujemo Lipschitzov pogoj, konstanto N pa Lipschitzova konstanta
- Pogoj je izpolnjen če je parcialni odvod f_x(x,y) zvezna funkcija
- *Izrek o enoličnosti rešitve:* Če so izpolnjeni vsi pogoji eksistenčnega izreka je rešitev problema natanko na intervalu [x0 – b, x0 + b], kjer je b manjši od števil a,b/M in 1/N

50. Splošna rešitev linearne diferencialne enačbe drugega reda

- splošna oblika linearne enačbe 2. reda $y''+f(x)y'+g(x)y = r(x)$ kjer so f, g, r funkcije neodvisne spremenljivke x
- vsaka dif. Enačba, ki se na da zapisati v tej obliki je nelinearna enačba
- če je funkcija r na desni strani enaka 0 je enačba homogena, drugače je nehomogena
- *Homogena enačba: eksistenca in enoličnost rešitve* – edina rešitev začetnega problema je ničelna funkcija
- Če sta y_1(x) in y_2(x) rešitvi homogene linearne enačbe, je njuna linearna kombinacija ay_1(x) + by_2(x)spet rešitev enačbe

- *Splošna rešitev homogene enačbe drugega reda je dvo parametrična družina y(x) = $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, kjer sta C1 in C2 poljubni konstanti, funkciji pa linearno neodvisni*

51. Linearna diferencialna enačba drugega reda homogena s konstantnimi koeficienti

- če sta f(x) in g(x) v enačbi konstani, ravimo enačbi y''+ py' + q = 0, homogena enačba s konstantnimi koeficienti
- rešitev take enačbe iščemo z nastavkom y = $e^{\lambda x}$, torej y' = $\lambda e^{\lambda x}$ in y'' = $\lambda^2 e^{\lambda x}$
- to vstavimo v enačbo ($\lambda^2 + p\lambda + q$) $e^{\lambda x}$ = 0, ker pa je $e^{\lambda x}$ različen od nič, mora biti $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ → to enačbo imenujemo karakteristična enačba
- dobimo kvadratno enačbo iz katere izračunamo vrednosti za λ
- ločimo tri možnosti
- 1. korena sta realna in različna: dobimo dve rešitvi $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ in $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$, ki sta linearno neodvisni
- 2. konjugiran par kompleksnih rešitev: λ1 = a + ib in λ2 = a – ib
- v tem primeru sta rešitvi $y_1(x) = e^{(a+ib)x}$ in $y_1(x) = e^{(a-ib)x}$ komplenski funkciji, nas pa zanimajo realne rešitve
- te dobimo z Eulerjevo formulo $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$
- 3. korena sta realna in enaka: λ1 = λ2 = -p/2, v tem, primeru dobimo eno samo rešitev iz nastavka $y_1(x) = e^{-px/2}$, drugopa dobimo z variacijo konstant (nastavek $y_2(x) = u(x)y_1$ → dvakrat odvajamo in vstavimo v enačbo)
- splošna rešitev je v tem primeru $y = e^{-px/2}(C_1 + C_2 x)$

52. Determinanta Wronskega (linearna odvisnost funkcij)

- funkciji y1(x) in y2(x) sta linearno odvisni na intervalu I, če obstajata taki konstanti C1 in C2, od katerih je vsaj ena različna od 0, da je C1y1(x) + C2y2(x) = 0 za vsak x element I
- funkciji ki nista linearno odvisni sta linearno neodvisni
- če sta y1(x) in y2(x) rešitvi homogene enačbe lahko zapišemo dvovrstno determinanto ali determinanto Wronskega
$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x)$$
- rešitvi sta linearno neodvisni, kadar je W(y1,y2) != 0 za vsak x element I, če pa je W = 0 v kakšni točki x element I pa sta funkciji linearno odvisni

53. Nehomogena linearna diferencialna enačba 2. reda

- *splošna rešitev* nehomogene linearne enačbe se izraža kot vsota $y(x)=y_H(x) + y_P(x)$, kjer je y_H splošna rešitev homogenega dela enačbe y_P pa katerakoli partikularna rešitev enačbe
- partikularno rešitev nehomogene enačbe lahko poiščemo s pomočjo variacije konstant ali s pomočjo nastavka (metoda nedoločenih koeficientov – ugibanje desne strani enačbe)

- *Variacija konstant*: funkcije f, g, r v enačbi y'' + fy' +gy = r naj bodo zvezne na odprtem intervalu Irešitev pripadajoče homogene enačbe pa naj bo $y_H=C_1y_1 + C_2y_2$
- *Rešitev poiščemo v isti obliki, samo da konstante zamenjamo z neznanima funkcijama u(x) in v(x), odvajamo in vstavimov enačbo*

54. Eulerjeva diferencialna enačba 2. reda

- je linearna enačba kjer sta a in b konstanti, icer pa nima konstantnih koeficientov
- na enačno s konstantnimi koeficienti jo lahko prevedemo z zamenjavo neodvisne spremenljivke $x = e^t$
- izrazimo odvode po x z odvodi po t in vstavimo v enačbo $\ddot{y}+(a-1)\dot{y}+by=0$, in zračunamo nejno karakteristično enačbo $\lambda(\lambda-1)+a\lambda+b=0$, kjer sta rešitvi $y_1 = e^{\lambda_1 t} = x^{\lambda_1}$ in $y_2 = e^{\lambda_2 t} = x^{\lambda_2}$

55. Sistemi diferencialnih enačb

- sistem dif enačb prvega reda za dve neznani funkciji y1(x) in y2(x) izgleda takole y'1 = f1(x,y1,y2), y'2 = (x,y1,y2)
- tak sistem je ekvivalenten eni sami enačbi drugega reda, kijodobimo tako, da prvo enačbo odvajamo po neodvisni spremenljivki x $y''_1=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}y'_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}y'_2$, nato paiz prve enačbe izrazimo y2 in ga vstavimo v zgornjo enačbo
- tako dobimo diferencialno enačbo drugega reda

BY LEON PANJTAR