REŠITVE

Naloga 1

Določi ravnino, ki gre skozi točko $T(3,1,3)$ ter presečišče ravnin $2x+z=1$ in $x-y=2$.

Presečišče ravnin $2x+z=1$ in $x-y=2$ je premica, ki jo dobimo kot rešitev sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & + & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 2 \end{array}$$

dveh enačb za tri neznanke x,y in z. Dobljena 1-parametrična rešitev sistema

$$\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & -2+x \\ z & = & 1-2x \end{array}$$

ustreza parametrični obliki enačbe premice

$$(x,y,z)=(0,-2,1)+t(1,1,-2)$$

s točko $A(0,-2,1)$ in smernim vektorjem $\overrightarrow{s}=(1,1,-2)$. Točki T in A ležita na iskani ravnini in določata vektor $\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{r_T}-\overrightarrow{r_A}=(3,3,2)$. Normalni vektor iskane ravnine dobimo kot vektorski produkt vektorjev $\overrightarrow{s}$ in $\overrightarrow{AT}$:

$$\overrightarrow{s}\times\overrightarrow{AT}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}=(8,-8,0).$$

Enačba iskane ravnine, ki jo določata točka $T(3,1,3)$ in normalni vektor $\overrightarrow{n}=(1,-1,0)$, je torej

$$x-y=\overrightarrow{r_T}\cdot\overrightarrow{n}=2$$

oziroma

$$x-y-2=0.$$

Naloga 2

Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti so rešitve karakteristične enačbe

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -4 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0,$$

torej $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ *in* $\lambda_3 = 3$. *Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti* $\lambda_1 = 1$, *so rešitve homogenega sistema z matriko koeficientov*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

torej vektorji oblike $\overrightarrow{u_1} = t(1,1,0)$. *Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti* $\lambda_2 = 2$, *so rešitve homogenega sistema z matriko koeficientov*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

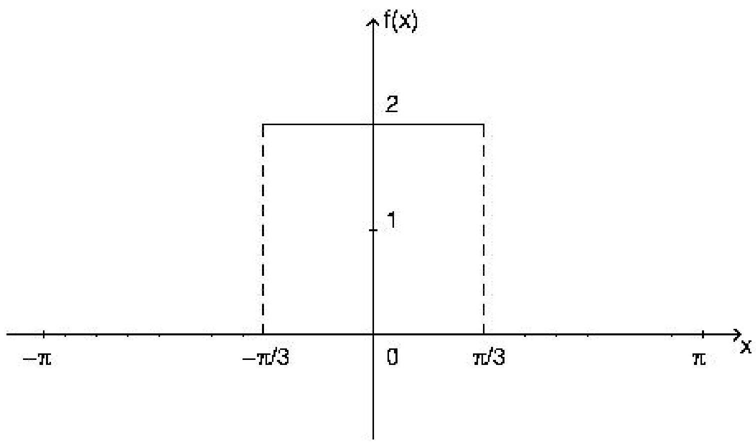
torej vektorji oblike $\overrightarrow{u_1} = t(0,1,0)$. *Lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti* $\lambda_3 = 3$, *so rešitve homogenega sistema z matriko koeficientov*

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

torej vektorji oblike $\overrightarrow{u_1} = t(-2,2,1)$.

Naloga 3

Funkcijo



razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Funkcija $f(x)$ je dana s predpisom

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2 & , -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \\ 0 & , \text{ sicer} \end{array} \right. .$$

Ker je $f(x)$ soda funkcija, so koeficienti Fourierove vrste naslednji:

$$\begin{aligned} b_n &= 0, \quad n \geq 1 \\ a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/3} 2dx = \frac{2}{3} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} 2\cos(nx)dx = \frac{4}{n\pi} \sin(\frac{n\pi}{3}), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Fourierova vrsta za funkcijo $f(x)$ je torej

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{n\pi}{3}) \cos(nx).$$

Naloga 4

Poišči najmanjšo in največjo vrednost funkcije

$$f(x, y) = 4x - y$$

na krožnici

$$x^2 + y^2 = 17.$$

Vezani ekstremi funkcije $f(x, y)$ pri pogoju $g(x, y) = x^2 + y^2 - 17$ nastopijo v stacionarnih točkah Langrangeove funkcije

$$F(x, x; \lambda) = 4x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 17),$$

to je v točkah, ki so rešitve sistema

$$\begin{aligned} F_x^{'} &= 4 + 2\lambda x = 0 \\ F_y^{'} &= -1 + 2\lambda y = 0 \\ F_\lambda^{'} &= x^2 + y^2 - 17 = 0. \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb izrazimo $x = -\frac{2}{\lambda}$ in $y = \frac{1}{2\lambda}$ ter vstavimo v tretjo enačbo:

$$\frac{4}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 17 = 0.$$

Dobimo $\lambda^2 = \frac{1}{4}$ oz. $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. Kandidata za vezane ekstreme sta naslednji točki:

$$T_1(-4,1), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2},$$

$$T_2(4,-1), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Iz geometrijske narave problema sledi, da vezan minimum in maksimum zagotovo obstajata. Funkcijski vrednosti v točkah T_1 in T_2 sta

$$f(-4,1) = -17$$

$$f(4,-1) = 17,$$

kar pomeni, da funkcija $f(x)$ zavzame največjo vrednost 17 v točki $T_2(4,-1)$, najmanjšo -17 pa v točki $T_1(-4,1)$.

Naloga 5

Poišči rešitev nehomogene diferencialne enačbe

$$y'' + 4y' + 4y = x + 1.$$

Dana je nehomogena linearna diferencialna enačba reda 2 s konstantnimi koeficienti. Najprej poiščimo splošno rešitev pripadajoče homogene enačbe

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Ker ima karakteristična enačba $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ korena $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, je splošna rešitev

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Partikularna rešitev nehomogene enačbe bo iste oblike kot desna stran, torej polinom stopnje 1 z neznanimi koeficienti

$$y_p = Ax + B.$$

Nastavek vstavimo v diferencialno enačbo in dobimo pogoj

$$4A + 4(Ax + B) = x + 1.$$

S primerjanjem koeficientov pri posameznih potencah x dobimo sistem dveh lineranih enačb za A in B:

$$\begin{array}{lcrcl} 4A & & & = & 1 \\ 4A & + & 4B & = & 1 \end{array}$$

Rešitev je $A = \frac{1}{4}$ in $B = 0$, torej $y_p = \frac{1}{4}x$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{4}x.$$