

KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II

Visokošolski študij

4. junij 2009

1. [20T] Določi enačbo ravnine, ki poteka skozi dane točke

$$A(1, 2, -1), \quad B(2, 1, 3) \quad \text{in} \quad C(-3, -2, 1).$$

Rešitev:

Določimo dva vektorja v ravnini:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{AB} = (1, -1, 4), \\ \vec{b} &= \vec{AC} = (-4, -4, 2).\end{aligned}$$

Izračunamo normalo z vektorskim produktom:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ -4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (14, -18, -8).$$

Koeficient d :

$$d = (14, -18, -8) \cdot (1, 2, -1) = -14.$$

Enačba ravnine:

$$14x - 18y - 8z = -14 \quad \text{oz.} \quad 7x - 9y - 4z = -7.$$

2. [20T] Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

Lastne vrednosti matrike A so rešitve enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Lastni vrednosti matrike A : $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 3$. Lastna vektorja, ki pripadata tema lastnima vrednostima:

i) $\lambda_1 = 2$:

$$A - \lambda_1 I = A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Lastni vektor: } x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

ii) $\lambda_1 = 3$:

$$A - \lambda_2 I = A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Lastni vektor: } x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

3. [20T] Razvij funkcijo

$$f(x) = \frac{-5x + 7}{(1-x)(2-x)}$$

v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 0$. Namig: geometrijska vrsta.

Rešitev:

Racionalno funkcijo razbijemo na parcialne ulomke:

$$\frac{-5x + 7}{(1-x)(2-x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{2-x} = \frac{(-A-B)x + 2A+B}{(1-x)(2-x)}$$

Sledi, da je $A = 2$ in $B = 3$. Uporabimo geometrijsko vrsto:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{1-x} + \frac{3}{2-x} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2 + \frac{3}{2^{n+1}}\right) x^n \end{aligned}$$

4. [20T] Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x - 2y + 5.$$

Rešitev:

Prvi parcialni odvodi:

$$\begin{aligned}f_x &= 6x + 2y + 4, \\f_y &= 2x + 4y - 2.\end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Sistem enačb:

$$\begin{aligned}6x + 2y + 4 &= 0, \\2x + 4y - 2 &= 0.\end{aligned}$$

To je sistem linearnih enačb, ki ima eno rešitev: $x = -1$, $y = 1$, torej dobimo eno stacionarno točko $T(-1, 1)$.

Drugi parcialni odvodi:

$$\begin{aligned}f_{xx} &= 6, \\f_{yy} &= 4, \\f_{xy} &= 2.\end{aligned}$$

Hessejeva matrika funkcije f :

$$Hf = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determinanta te matrike v stacionarni točki:

$$\det Hf(-1, 1) = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

Ker je poleg tega še $f_{xx}(-1, 1) = 6 > 0$, imamo v točki $T(-1, 1)$ minimum.

5. [20T] Reši diferencialno enačbo

$$y' + 2y = 3e^{-x}.$$

Poišči tisto rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju $y(0) = 4$.

Rešitev:

To je linearna diferencialna enačba.

(i) Homogeni del:

$$\begin{aligned}y' + 2y &= 0 \\ \int \frac{dy}{y} &= -2 \int dx \\ \ln y &= -2x + \ln C \\ y_H &= Ce^{-2x}\end{aligned}$$

(ii) Partikularno rešitev poiščemo z variacijo konstante:

$$\begin{aligned}y &= C(x)e^{-2x} \\ y' &= C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x}\end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = 3e^{-x}.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}C'(x) &= 3e^x \\ C(x) &= 3e^x\end{aligned}$$

Partikularna rešitev:

$$y_p = 3e^{-x}$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = 3e^{-x} + Ce^{-2x}.$$

Zacetni pogoj:

$$y(0) = 3 + C = 4 \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju:

$$y(x) = 3e^{-x} + e^{-2x}.$$