KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Visokošolski študij

31. maj 2007

1. [20T] Izračunaj ploščino in višino iz oglišča C v trikotniku z oglišči

$$A(-1,3,-5), \quad B(2,1,-2) \quad \text{in} \quad C(1,3,-2).$$

Rešitev:
Določimo dva vektorja:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{AB} = (3,-2,3),\\ \vec{b} &= \vec{AC} = (2,0,3).\end{aligned}$$

Vektorski produkt:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-6,-3,4).$$

Ploščina trikotnika:

$$p = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{61}.$$

Iz geometrije poznamo formulo: $p = \frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot v_C$. Ker je $|\vec{a}| = \sqrt{22}$, je

$$v_C = \frac{2p}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{22}}.$$

2. [20T] Z Gaussovo eliminacijo reši sistem enačb:

$$\begin{aligned}3x-2y-u+v &= 6,\\ x-3y+2u-v &= 4,\\ 2x+y+u+2v &= 6.\end{aligned}$$

Rešitev:

Razširjena matrika:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & 4 & -6 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Rešitev sistema:

$$\begin{aligned} x &= \frac{17-5v}{7}, \\ y &= \frac{1-4v}{7}, \\ u &= 1, \\ v &= \text{polj.} \end{aligned}$$

3. [20*T*] Razvij funkcijo

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$$

v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = 0$. Zadošča zapisati člene do vključno potence x^5.
Namig: binomska vrsta.

Rešitev:
Binomska vrsta se glasi:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Razvoj funkcije $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(1-x^2)^{-\frac{1}{3}} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} (-1)^n x^{2n+1} \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{9}x^5 + \cdots . \end{aligned}$$

4. [20*T*] Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 4.$$

Rešitev:
Prvi parcialni odvodi:

$$\begin{aligned} f_x &= 6x - 2y - 8, \\ f_y &= -2x + 6y + 8. \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Sistem enačb:

$$\begin{aligned} 6x - 2y - 8 &= 0, \\ -2x + 6y + 8 &= 0. \end{aligned}$$

To je sistem linearnih enačb, ki ima eno rešitev: $x = 1$, $y = -1$, torej dobimo eno stacionarno točko $T(1, -1)$.
Drugi parcialni odvodi:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6, \\ f_{yy} &= 6, \\ f_{xy} &= -2. \end{aligned}$$

Hessejeva matrika funkcije f:

$$Hf = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Determinanta te matrike v stacionarni točki:

$$\det Hf(1, -1) = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0.$$

Ker je poleg tega še $f_{xx}(1, -1) = 6 > 0$, imamo v točki $T(1, -1)$ minimum.

5. [20T] Reši diferencialno enačbo

$$xy' + 2y = \frac{\sin x}{x}.$$

Poišči tisto rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju $y(\pi) = \frac{2}{\pi^2}$.

Rešitev:
To je linearna diferencialna enačba.

(i) Homogeni del.

$$\begin{aligned} xy' + 2y &= 0 \\ \int \frac{dy}{y} &= -2\int \frac{dx}{x} \\ \ln y &= -2\ln x + \ln C \\ y_H &= Cx^{-2} \end{aligned}$$

(ii) Nehomogeni del rešimo z variacijo konstante.

$$\begin{aligned} y &= C(x)x^{-2} \\ y' &= C'(x)x^{-2} - 2C(x)x^{-3} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$C'(x)x^{-1} - 2C(x)x^{-2} + 2C(x)x^{-2} = \frac{\sin x}{x}.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} C'(x) &= \sin x \\ C(x) &= \int \sin x dx \\ C(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

Partikularna rešitev:

$$y_p = -\frac{\cos x}{x^2}$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = -\frac{\cos x}{x^2} + Cx^{-2} = \frac{C - \cos x}{x^2}.$$

Zacetni pogoj:

$$y(\pi) = \frac{C+1}{\pi^2} = \frac{2}{\pi^2} \quad \Rightarrow C = 1.$$

Rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju:

$$y(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$