REŠITVE

Naloga 1

Dani sta matriki A in B ter vektor $\vec{v}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte:

a.) inverzno matriko k matriki A,

b.) produkt matrik A in B^T,

c.) sliko vektorja $\vec{v}$ z linearno transformacijo, ki jo določa matrika A.

a.) Za izračun inverzne matrike k matriki dimenzije 2×2 lahko uporabimo formulo:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo inverzno matriko k matriki A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1 - 2 \cdot 0} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b.) Izračunajmo produkt matrik A in B^T. Zaradi dimenzij matrik lahko izračunamo samo

$$A \cdot B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

c.) Sliko vektorja $\vec{v}$ z linearno transformacijo, ki jo določa matrika A, dobimo, tako da matriko A pomnožimo z vektorjem $\vec{v}$:

$$A \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Naloga 2

Analizirajte rešljivost sistema (ni rešljiv, je enolično rešljiv, ima parametrično rešitev) ter z Gaussovo eliminacijo poiščite rešitve:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 5y & + & 4z & + & 3u & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 2z & - & u & = & 0 \\ 5x & + & 3y & + & 8z & - & u & = & 1 \end{array}$$

Sistem linearnih enačb zapišimo v matrični obliki

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

in preverimo, kakšna sta ranga matrike koeficientov sistema in razširjene matrike:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & -1 & 1 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -16 & -4 \end{array}\right] \equiv \qquad \begin{array}{c} 2.vr. - 2 \times 1.vr \\ 3.vr. - 5 \times 1.vr. \end{array}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \equiv \qquad 3.vr. - 2 \times 2.vr$$

Vidimo, da sta ranga matrike koeficientov sistema in razširjene matrike oba enaka 3. *To pomeni, da je sistem rešljiv. Ker so v sistemu* 4 *spremenljivke, rang pa je enak* 3, *ima sistem* 1*-parametrično rešitev. Izračunajmo jo:*

$$\begin{array}{rrrrrrrcr} x & + & 5y & + & 4z & + & 3u & = & 1 \\ & - & 11y & - & 6z & - & 7u & = & -2 \\ & & & & & - & 2u & = & 0 \end{array}$$

Iz zadnje enačbe sledi $u = 0$. *Če za parameter izberemo* z, *iz druge enačbe sledi*

$$y = \frac{2}{11} - \frac{6}{11}z.$$

Iz prve enačbe sedaj sledi

$$x = 1 - 5y - 4z = 1 - 5(\frac{2}{11} - \frac{6}{11}z) - 4z = \frac{1}{11} - \frac{14}{11}z.$$

Rešitev sistema je zato:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{11} - \frac{14}{11}z, \\ y &= \frac{2}{11} - \frac{6}{11}z, \\ z &= \text{poljuben}, \\ u &= 0. \end{aligned}$$

Naloga 3

Funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi \leq x \leq 0 \\ -x + \pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

razvijte v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Funkcija $f(x)$ je soda (graf funkcije in abscisna os tvorita enakokraki trikotnik, simetričen glede na ordinatno os). Fourierova vrsta sode funkcije vsebuje samo sode člene ($b_n = 0$):

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Izračunajmo neznane koeficiente:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x+\pi)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{2}+\pi x\right]_0^{\pi} = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2} \\
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x+\pi)\cos(nx)\,dx = \qquad \left[\textit{per partes:}\ \begin{array}{ll} u=-x+\pi & dv=\cos(nx)dx \\ du=-dx & v=\frac{1}{n}\sin(nx)\end{array}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[(-x+\pi)\cdot\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)\,dx\right) = \\
&= \frac{2}{\pi}\left(0-0+\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi)-\cos 0\right)\right) = \\
&= -\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)
\end{aligned}$$

Sledi (kosinusna) Fourierova vrsta funkcije $f(x)$:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos(nx).$$

Naloga 4

Dana je funkcija dveh spremenljivk:

$$u(x,y) = 2\sqrt{x}\cdot\sin(xy^2).$$

Izračunajte parcialna odvoda u'_x in u'_y.

Izračunajmo oba parcialna odvoda funkcije $u(x,y)$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 2x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(xy^2), \\ u'_x &= \left(2 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \sin(xy^2) + 2x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos(xy^2) \cdot y^2\right) = \\ &= x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(xy^2) + 2x^{\frac{1}{2}} y^2 \cdot \cos(xy^2) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin(xy^2) + 2\sqrt{x} y^2 \cdot \cos(xy^2), \\ u'_y &= 2x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos(xy^2) \cdot 2xy\right) = \\ &= 4x^{\frac{3}{2}} y \cdot \cos(xy^2) = \\ &= 4x\sqrt{x} y \cdot \cos(xy^2). \end{aligned}$$

Naloga 5

Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe 1. reda:

$$xy' + 2y = x^4.$$

Poiščite še tisto rešitev, ki zadošča pogoju $y(1) = \frac{1}{6}$.

Dana enačba je linearna diferencialna enačba 1. reda. Njena splošna rešitev je sestavljena iz rešitve homogenega dela (y_h) in partikularne rešitve (y_p):

$$y = y_h + y_p.$$

Izračunajmo vsakega posebej.

a.) Homogeni del (računamo y_h):

$$xy' + 2y = 0.$$

Vemo, da je to diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama, ki jo rešujemo, *tako da namesto y' pišemo $\frac{dy}{dx}$, ločimo spremenljivki x, y ter na koncu še integriramo:*

$$\begin{aligned}
xy' + 2y &= 0 \\
x\frac{dy}{dx} &= -2y \\
xdy &= -2ydx \\
\frac{dy}{y} &= -2\frac{dx}{x} \\
\int \frac{dy}{y} &= -2\int \frac{dx}{x} \\
\ln y &= -2\ln x + \ln C \\
\ln y &= \ln x^{-2} + \ln C \\
\ln y &= \ln Cx^{-2} \\
y &= Cx^{-2} \\
y_h &= \frac{C}{x^2} \quad \textit{rešitev homogenega dela}
\end{aligned}$$

b.) Nehomogeni del (računamo y_p):

$$xy' + 2y = x^4.$$

Partikularno rešitev y_p iščemo z metodo variacije konstante. Ker je $y_h = Cx^{-2}$, za nastavek vzamemo

$$y_p = C(x)x^{-2},$$

kar pomeni, da namesto konstante C zdaj pišemo $C(x)$, ki je funkcija spremenljivke x. Nastavek odvajamo in vstavimo v dif. enačbo:

$$\begin{aligned}
y &= C(x)x^{-2}, \\
y' &= C'(x)x^{-2} + C(x)(-2x^{-3}), \\
x(C'(x)x^{-2} - 2C(x)x^{-3}) + 2(C(x)x^{-2}) &= x^4, \\
C'(x)x^{-1} &= x^4.
\end{aligned}$$

Iščemo $C(x)$, zato $C'(x)$ iz zgornje enačbe izrazimo in integriramo:

$$\begin{aligned}
C'(x) &= x^5, \\
C(x) &= \int x^5 dx, \\
C(x) &= \frac{x^6}{6} + D.
\end{aligned}$$

Ker iščemo samo eno (partikularno) rešitev, lahko izberemo $D = 0$ in dobimo

$$C(x) = \frac{x^6}{6}.$$

Sledi partikularna rešitev:

$$y_p = C(x)x^{-2} = \frac{x^6}{6} \cdot x^{-2} = \frac{x^4}{6}.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je zato

$$y = y_h + y_p = \frac{C}{x^2} + \frac{x^4}{6}.$$

Poiščimo še tisto rešitev, ki zadošča pogoju $y(1) = \frac{1}{6}$. *Pogoj* ($x = 0$, $y = \frac{1}{6}$) *vstavimo v splošno rešitev:*

$$\frac{1}{6} = C + \frac{1}{6}.$$

Dobimo $C = 0$ *in*

$$y = \frac{x^4}{6}.$$