DETERMINANTE

Determinanta $\det A$ je število, prirejeno kvadratni shemi A. Determinante velikosti 2×2 in 3×3 računamo takole:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

Pravila za računanje determinant

1. Determinanta je enaka 0, če:
   a.) so v kakšni vrstici (stolpcu) same 0,
   b.) sta dve vrstici (stolpca) enaki,
   c.) je kakšna vrstica (stolpec) večkratnik neke druge vrstice (stolpca).
2. Če zamenjamo dve sosednji vrstici (stolpca), determinanta spremeni predznak.
3. Determinanta ne spremeni svoje vrednosti, če kakšni vrstici (stolpcu) prištejemo večkratnik kakšne druge vrstice (stolpca).
4. Iz vrstice (stolpca) lahko izpostavimo skupni faktor:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \cdot a_{i1} & C \cdot a_{i2} & \cdots & C \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = C \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kramerjevo pravilo za reševanje sistemov linearnih enačb

Vzemimo sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots \; \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Če je determinanta sistema

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

so rešitve sistema ($j = 1, 2, \ldots, n$) enake

$$x_j = \frac{D_j}{D},$$

kjer je D_j determinanta, ki jo dobimo, tako da j-ti stolpec v D zamenjamo z vektorjem $b = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$.

VEKTORJI

Skalarni produkt

$$\begin{array}{rcl} \vec{a} & = & (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} & = & (b_1, b_2, b_3) \\ \hline \vec{a}\cdot\vec{b} & = & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{array}$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = |\vec{a}|\cdot|\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b}| = |\vec{b}|\cdot|\text{proj}_{\vec{b}}\vec{a}|$

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$ oz. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ dolžina vektorja

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Standardni bazni vektorji v $\mathbb{R}^3$: $\vec{\imath} = (1,0,0), \vec{\jmath} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$.

Pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$: $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

. Projekcijo vektorja $\vec{a}$ na x os izračunamo takole:

$$\text{proj}_{\vec{\imath}}\vec{a} = |\text{proj}_{\vec{\imath}}\vec{a}|\cdot\frac{\vec{\imath}}{|\vec{\imath}|} = \frac{\vec{\imath}\cdot\vec{a}}{|\vec{\imath}|}\cdot\frac{\vec{\imath}}{|\vec{\imath}|} = (1,0,0) = \vec{\imath}.$$

Vektorski produkt

$$\begin{array}{rcl} \vec{a} & = & (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} & = & (b_1, b_2, b_3) \\ \hline \vec{a}\times\vec{b} & = & \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, -(a_1b_3 - a_3b_1), a_1b_2 - a_2b_1) \end{array}$$

Vektorski produkt $\vec{a}\times\vec{b}$ vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor, za katerega velja:

i.) [smer] $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$ in pravilo desnega vijaka (vektorski produkt ima smer, v katero bi se pomaknil desni vijak, če bi ga zavrteli od $\vec{a}$ do $\vec{b}$ po najbližji poti),

ii.) [dolžina] dolžina $|\vec{a}\times\vec{b}|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$: antikomutativnost

$\vec{a}\times\vec{a} = 0$

$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0$

Velja: $\vec{\imath}\times\vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath}\times\vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{k}\times\vec{\imath} = \vec{\jmath}$.

Mešani produkt

$$\begin{array}{rcl}\vec{a} & = & (a_1, a_2, a_3)\\ \vec{b} & = & (b_1, b_2, b_3)\\ \vec{c} & = & (c_1, c_2, c_3)\\ \hline (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) & = & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\end{array}$$

Absolutna vrednost mešanega produkta $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ predstavlja volumen paralelepipeda, ki ga vektorji napenjajo.

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so komplanarni

Prostornino piramide lahko izračunamo na dva različna načina – kot šestino prostornine paralelepipeda (namig 1) in kot tretjino ploščine osnovne ploskve pomnožene z višino (namig 2):

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot |\vec{v_A}|.$$

Iz dobljene zveze sledi formula za izračun višine skozi oglišče A, namreč

$$|\vec{v_A}| = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{120}{|(11, 10, 17)|} = \frac{120}{\sqrt{510}}.$$

Namig 1: $V_{piramide} = \frac{1}{6} V_{paralelepipeda}$
Namig 2: $V_{piramide} = \frac{1}{3} p_{\text{osnovnega trikotnika}} \cdot |\vec{v}|$

ANALITIČNA GEOMETRIJA

Premica v prostoru

Premica v prostoru je določena s točko in smernim vektorjem.
Enačbo premice lahko zapišemo v več oblikah:

- Vektorska oblika:

$$\begin{array}{rcl}\vec{r} & = & \vec{r_A} + t \cdot \vec{s},\\ (x, y, z) & = & (a_1, a_2, a_3) + t(s_1, s_2, s_3),\end{array}$$

  kjer je $T(x, y, z)$ poljubna točka na premici (odvisna od t), $A(a_1, a_2, a_3)$ je izbrana točka na premici, $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ pa smerni vektor premice.

- Parametrična oblika:

$$\begin{array}{rcl}x & = & a_1 + t \cdot s_1,\\ y & = & a_2 + t \cdot s_2,\\ z & = & a_3 + t \cdot s_3.\end{array}$$

- Kanonična oblika:

$$\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3}.$$

Ravnina v prostoru

Ravnina v prostoru je določena s točko in normalo.

Enačbo ravnine lahko zapišemo v več oblikah:

- Vektorska oblika:

$$\vec{AT} \cdot \vec{n} = 0 \implies (\vec{r} - \vec{r_A}) \cdot \vec{n} = 0,$$
$$((x, y, z) - (a_1, a_2, a_3)) \cdot (a, b, c) = 0,$$

  kjer je $T(x, y, z)$ poljubna točka na ravnini, $A(a_1, a_2, a_3)$ je izbrana točka na ravnini, $\vec{n} = (a, b, c)$ pa normalni vektor, ki je pravokoten na ravnino.

- Implicitna ali splošna oblika:

$$ax + by + cz = d, \quad d = \vec{r_A} \cdot \vec{n}.$$

Pri tem smo kot med normalo ravnine $\vec{n}$ in smernim vektorjem premice $\vec{s}$ izračunali iz pravila $\vec{n} \cdot \vec{s} = |\vec{n}| \cdot |\vec{s}| \cos\varphi$.

Razdalje

a.) Razdalja med točko in ravnino:
$T(x_0, y_0, z_0)$, $\pi : ax + by + cz = d$

$$d(T, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

b.) Razdalja med točko in premico (višina paralelograma):
T točka, p premica s točko T_0 in smernim vektorjem $\vec{s}$

$$d(T, p) = \frac{|\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)|}{|\vec{s}|}$$

c.) Razdalja med vzporednima premicama:
p_1, p_2 dve premici, T_1 točka na premici p_1

$$d(p_1, p_2) = d(T_1, p_2)$$

d.) Razdalja med nevzporednima premicama (višina paralelepipeda):
p_1, p_2 dve premici, T_1 točka na premici p_1, T_2 točka na premici p_2, $\vec{r} = \vec{T_1 T_2}$

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r})|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

MATRIKE

Matrika dimenzije $m \times n$ je pravokotna tabela $m \cdot n$ števil, ki ima m vrstic in n stolpcev:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m,n}.$$

- množenje s skalarjem:

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

- se števanje po komponentah (matriki morata biti enakih dimenzij):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

- transponiranje (zamenjava vrstic in stolpcev oz. zrcaljenje čez glavno diagonalo):

$$A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m,n} \quad \Longrightarrow \quad A^T = [a_{ji}]_{j=1,i=1}^{n,m}$$

- konjugiranje (za kompleksne matrike):

$$A^* = \overline{A^T}$$

- množenje matrik (pogoj: št. vrstic druge matrike = št. stolpcev prve matrike):

  $A{\cdot}B = C$, $c_{ij} =$ skalarni produkt $i-$te vrstice matrike A in $j-$tega stolpca matrike B

- sled kvadratne matrike (vsota diagonalnih elementov):

$$tr(A) = tr \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

<u>1. naloga</u>: Dana je kompleksna matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -3\mathrm{i} & -4+\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} & 6 & 7 & 2+6\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Zapiši A^T in A^*.

Rezultat: $A^T = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 4 & -2-\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 2 & 6 \\ 4 & -3\mathrm{i} & 7 \\ 5 & -4+\mathrm{i} & 2+6\mathrm{i} \end{bmatrix}$, $A^* = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 4 & -2+\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 2 & 6 \\ 4 & 3\mathrm{i} & 7 \\ 5 & -4-\mathrm{i} & 2-6\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

Rang matrike

Rang $r(A)$ matrike $A^{m\times n}$ je enak številu linearno neodvisnih vrstic/stolcev. Velja:

$$r \leq \min\{m, n\}.$$

Rang matrike se ne spremeni, če:

i.) dve vrstici med seboj zamenjamo,

ii.) vrstico pomnožimo s poljubnim neničelnim številom,

iii.) vrstici prištejemo poljubni večkratnik kake druge vrstice.

Obrnljive matrike in inverzi

Kvadratna matrika A je obrnljiva, če obstaja matrika A^{-} , tako da je $AA^{-} = A^{-} A = I$. Pri tem je

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

enotska matrika ali identiteta. Če matrika ni obrnljiva, pravimo, da je singularna. Matriko A^{-1} imenujemo inverzna matrika matrike A.

Velja naslednje:

i.) Identiteta je enota za matrično množenje: $A \cdot I = I \cdot A = A$.

ii.) Matrika A je nesingularna natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$.

Računanje inverzne matrike z Gaussovo eliminacijo

Razširjeno matriko $[A|I]$ transformiramo z operacijami, ki ohranjajo rang, do oblike $[I|A^{-1}]$, tj. razširjene matrike, ki ima na levi strani identiteto. Na ta način dobimo na desni strani inverzno matriko A^{-1} matrike A.

$$[A|I] \rightsquigarrow^{\text{transformacija}} \rightsquigarrow [I|A^{-1}]$$

Operacije, ki ohranjajo rang matrike:

i.) dve vrstici lahko med seboj zamenjamo,

ii.) vrstico lahko pomnožimo s poljubnim neničelnim številom,

iii.) vrstici lahko prištejemo poljubni večkratnik kake druge vrstice.

Inverz matrike dimenzije 2×2 izračunamo takole:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

Dan je sistem m enačb z n neznankami:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots &= \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Sistem lahko zapišemo v matrični obliki $Ax = b$, kjer je A matrika koeficientov, b pa vektor vrednosti z desne strani sistema.

Sestavimo razširjeno matriko $R = [A|b]$ in z Gaussovo eliminacijo pretvorimo R v obliko, ki ima pod glavno diagonalo same 0. Tedaj lahko rešitve sistema direktno izrazimo. Pri tej transformaciji uporabljamo operacije, ki ohranjajo rang matrik:

i.) dve vrstici med seboj zamenjamo,

ii.) vrstico pomnožimo s poljubnim neničelnim številom,

iii.) vrstici prištejemo poljubni večkratnik kake druge vrstice.

Za rešljivost sistema linearnih enačb velja naslednje:

1. Sistem $Ax = b$ je rešljiv $\Leftrightarrow r(A) = r(R) =: r$.
2. Če je $r = n \Rightarrow$ rešitev je ena sama.
3. Če je $r < n \Rightarrow$ rešitev je $(n-r)$-parametrična družina (za $n-r$ neznank lahko izberemo poljubne vrednosti).

d.)

$$\begin{aligned}
2x + 2y - z + t &= 4 \\
4x + 3y - z + 2t &= 6 \\
8x + 5y - 3z + 4t &= 12 \\
3x + 3y - 2z + 2t &= 6
\end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko sistema in delamo ničle pod glavno diagonalo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2.vr. - 2 \times 1.vr. \\ 3.vr. - 2 \times 2.vr. \\ 2 \times 3.vr. - 3 \times 1.vr. \end{array}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad 3.vr. - 2.vr.$$

$$\equiv \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \quad 3.vr. - 2 \times 4.vr.$$

Homogeni sistem linearnih enačb

Homogeni sistem lineranih enačb v matrični obliki: $Ax = 0$.

Velja:

i.) Trivialna rešitev $x = (0, 0, \ldots, 0)^T$ vedno obstaja (ker je $r(A) = r(R)$).

ii.) Kvadratni sistem ima netrivialno rešitev $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$.

iii.) Če je enačb manj kot neznank ($m < n$), netrivialna rešitev vedno obstaja.

iv.) Če sta x in y različni rešitvi homogenega sistema, je tudi $z = \alpha x + \beta y$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ rešitev sistema.

VEKTORSKI PROSTORI IN LINEARNE PRESLIKAVE

Linearna neodvisnost vektorjev

Množica vektorjev $x_1, \ldots, x_n \in V$ je linearno neodvisna, če velja:

$$\underbrace{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}_{\text{linearna kombinacija}} = 0 \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Sledi:

- če $\det A = 0$, so vektorji linearno *odvisni*,
- če $\det A \neq 0$, so vektorji linearno *neodvisni*,

kjer matriko A dobimo tako, da dane vektorje zložimo v stolpce.

<u>1. naloga</u>:^{DN} Ali so dani vektorji $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ linearno neodvisni?

Izračunamo determinanto matrike, ki jo dobimo, tako da vektorje zaporedoma zložimo v stolpce:

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix} = \left| \begin{array}{ccc} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 5 & 8 \\ 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{array} = 6.$$

Ker je detrminanta različna od 0, so vektorji linearno neodvisni.

Rezultat: $\det A = 6 \neq 0$: vektorji so linearno neodvisni.

Baza vektorskega prostora

Baza imenujemo vsako največjo množico linearno neodvisnih vektorjev. Število vektorjev v bazi je enako dimenziji vektorskega prostora.

Standardna baza v prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{e_1} = [1, 0, \ldots, 0]^T, \vec{e_2} = [0, 1, 0, \ldots, 0]^T, \ldots, \vec{e_n} = [0, 0, \ldots, 1]^T.$$

Vsak vektor danega vektorskega prostora lahko zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev!

Linearne preslikave

Preslikavo $\mathcal{T} : U \to V$ imenujemo linearna preslikava med vektorskima prostoroma U in V, če velja:

$$\mathcal{T}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\mathcal{T}(\vec{x}) + \beta\mathcal{T}(\vec{y}).$$

Bazni vektorji $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ prostora U se z linearno preslikavo $\mathcal{T}$ preslikajo v bazne vektorje $\mathcal{T}(\vec{e_1}), \ldots, \mathcal{T}(\vec{e_n})$ prostora V.

Linearno preslikavo $\mathcal{T}$ predstavimo z matriko T, katere stolpci so $\mathcal{T}(\vec{e_1}), \ldots, \mathcal{T}(\vec{e_n})$. Sliko vektorja $\vec{x}$ tedaj dobimo tako, da matriko z njim pomnožimo: $\mathcal{T}(\vec{x}) = T \cdot \vec{x}$.

LASTNE VREDNOSTI IN LASTNI VEKTORJI

Lastni vektor kvadratne matrike $A^{n\times n}$ je neničelni vektor $x \neq 0$, za katerega velja:

$$Ax = \lambda x,$$

kjer je λ skalar in ga imenujemo *lastna vrednost*. Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma matrike A, torej rešitve enačbe

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti λ, dobimo kot netrivialne rešitve homogenega sistema:

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

POTENCNE VRSTE

Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n.$$

Konvergenčni radij (polmer) potenčne vrste izračunamo takole:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Potenčna vrsta je

- enakomerno in absolutno konvergentna, če je $|x-a| < R$, in
- divergentna, če je $|x-a| > R$.

Če je $|x-a| = R$, to je v primerih $x = a + R$ in $x = a - R$, konvergenco preverimo kot konvergenco številske vrste.

Spomnimo se kriterijev za konvergenco številske vrste.

a.) Vrste s pozitivnimi členi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0$:

- Kvocientni kriterij: $q = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, za $q < 1$ konvergira, za $q > 1$ divergira,
- Korenski kriterij: $q = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, za $q < 1$ konvergira, za $q > 1$ divergira,
- Primerjalni kriterij: $0 \leq a_n \leq b_n$ za $n \geq n_0$
  - $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira,
  - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergira.

b.) Alternirajoče vrste $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n,\ a_n \geq 0$:

- Leibnitzov kriterij: Alternirajoča vrsta konvergira, če zaporedje a_n od nekje naprej pada proti 0.

Taylorjeva vrsta (primer potenčne vrste)

Razvoj funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = a$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \text{Taylorjeva vrsta} \\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m}_{\text{Taylorjev polinom stopnje } m} + \underbrace{R_m}_{\text{ostanek}} \end{aligned}$$

Taylorjev polinom (stopnje n) je najboljši polinomski približek (stopnje n) dane funkcije!

Razvoj nekaterih elementarnih funkcij okrog točke $x = 0$:

a.) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad |x| < \infty$

b.) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad |x| < \infty$

c.) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad |x| < \infty$

d.) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; \quad |x| < 1$

e.) Binomska formula: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n; \quad |x| < 1$

f.) Geometrijska vrsta: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \quad |x| < 1$

<u>2. naloga</u>: Razvij funkcijo v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 in določi območje konvergence vrste:

a.) ^{DN} $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

Uporabimo razvoj funkcije e^x v Taylorjevo vrsto okrog točke 0:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad |x| < \infty.$$

V zgornjo vrsto namesto x vstavimo $-2x$ in dobimo:

$$\mathrm{e}^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n; \quad |-2x| < \infty.$$

Območje konvergence, ki je podano z neenakostjo $|-2x| < \infty$, po deljenju z 2 preide v obliko $|x| < \infty$.

Rezultat: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n$; $|x| < \infty$.

Fourierova vrsta

Razvoj funkcije $f(x)$, ki je periodična s periodo T (ali podana na intervalu (t_0, t_0+T)), v Fourierovo vrsto na intervalu (t_0, t_0+T):

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)\right) \\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{T} \\ a_0 &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\cos(n\omega_0 x)\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\sin(n\omega_0 x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Velja:

- Če je funkcija $f(x)$ soda, je njena Fourierova vrsta sestavljena samo iz kosinusov in konstante ($b_n = 0$).
- Če je funkcija $f(x)$ liha, je njena Fourierova vrsta sestavljena samo iz sinusov ($a_0 = 0$, $a_n = 0$).

Če je funkcija $f(x)$ definirana na intervalu $(0, a)$, jo lahko razvijemo v Fourierovo vrsto kot:

- funkcijo s periodo a – navadna Fourierova vrsta,
- sodo funkcijo s periodo $2a$ – sodo nadaljevanje (kosinusna Fourierova vrsta),
- liho funkcijo s periodo $2a$ – liho nadaljevanje (sinusna Fourierova vrsta).

FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

Funkcija n spremenljivk je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x_1, \ldots, x_n) = y$.

8. naloga: Poišči in nariši definicijsko območje funkcije 2 spremenljivk:

a.) ^{DN} $f(x,y) = \frac{x-5xy}{3\sqrt{y-x^2}}$

Funkcijski predpis je definiran pri naslednjih pogojih:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{y-x^2} &\neq 0, \\ y - x^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Oba pogoja skupaj pravita $y > x^2$. Torej je definicijsko območje funkcije f enako

$$D_f = \{(x,y); y > x^2\},$$

kar je množica vseh točk nad parabolo z enačbo $y = x^2$.

Rezultat: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > x^2\}$.

FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK - NADALJEVANJE

Nivojske krivulje ali nivojnice

Nivojske krivulje funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $z = f(x, y)$, so krivulje $f(x, y) = C$ v definicijskem območju funkcije f, na katerih zavzame f konstantno vrednost C.

Parcialni odvodi

Funkcijo $f(x_1, \ldots, x_n)$ lahko odvajamo na vsako spremenljivko $x_1, \ldots, x_n$ posebej. Ko odvajamo f po spremenljivki x_i, obravnavamo vse ostale spremenljivke x_j $(j \neq i)$ kot konstante.

Parcialni odvod funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ po spremenljivki x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

Totalni diferencial funkcije f:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

a.) ^{DN} $f(x, y) = (x^3 - y^2)^2$

Izračunajmo vse parcialne odvode (1. reda) funkcije $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2(x^3 - y^2) \cdot 3x^2 = 6x^2(x^3 - y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2(x^3 - y^2) \cdot (-2y) = -4y(x^3 - y^2) \end{aligned}$$

Sedaj je totalni diferencial funkcije f enak

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = 6x^2(x^3 - y^2)\mathrm{d}x - 4y(x^3 - y^2)\mathrm{d}y.$$

Višji parcialni odvodi

Funkcija $f(x_1,\ldots,x_n)$ ima n prvih parcialnih odvodov (parcialni odvodi 1. reda),

$$f_{x_1},\ldots,f_{x_n},$$

in n^2 drugih parcialnih odvodov (parcialni odvodi 2. reda):

$$f_{x_ix_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\ 1\leq i,j\leq n.$$

Če drugi mešani odvodi (tj. odvajani po različnih spremenljivkah) obstajajo in so zvezni, vrstni red odvajanja ni pomemben:

$$f_{x_ix_j}=f_{x_jx_i}.$$

EKSTREMI FUNKCIJ VEČ SPREMENLJIVK

Kandidati za lokalne ekstreme funkcije $f(x_1,\ldots,x_n)$ so *stacionarne* ali *kritične točke* funkcije. To so tiste točke, kjer so vsi prvi parcialni odvodi enaki 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}=0.$$

Naj bo $f(x,y)$ funkcija dveh spremenljivk. S pomočjo Hessejeve matrike ugotovimo, ali je v dani kritični točki res lokalni ekstrem funkcije f:

$$H_f=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}.$$

Za kritično točko (x_0,y_0) funkcije f namreč velja:

1. Če je $\det\left(H_f(x_0,y_0)\right)>0$, potem je v točki (x_0,y_0) lokalni ekstrem.
   a.) Če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$, potem je v tej točki lokalni minimum.
   b.) Če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0$, potem je v tej točki lokalni maksimum.
   c.) Če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)=0$, je lokalni ekstrem težje karakterizirati (mi ne bomo).
2. Če je $\det\left(H_f(x_0,y_0)\right)<0$, potem je v točki (x_0,y_0) sedlo (ni lokalnega ekstrema).
3. Če je $\det\left(H_f(x_0,y_0)\right)=0$, je lokalni ekstrem težje karakterizirati (mi ne bomo).

VEZANI EKSTREMI FUNKCIJ

Dana je funkcija $f(x,y)$. Zanimajo nas ekstremi nad krivuljo $g(x,y)=0$. Takšni ekstremi, rečemo jim *vezani ekstremi*, lahko nastopajo v stacionarnih točkah Lagrangeove funkcije:

$$F(x,y;\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y).$$

Spremenljivki λ rečemo *Lagrangeov množitelj*, enačbi $g(x,y)=0$ pa *vez*.

DIFERENCIALNE ENAČBE

Osnovni pojmi

Diferencialna enačba reda n je zveza med neodvisno spremenljivko x, odvisno spremenljivko y ter njenimi odvodi $y',y'',\ldots,y^{(n)}$:

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0.$$

Pri tem je $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Red diferencialne enačbe je stopnja najvišjega odvoda.

Rešitev diferencialne enačbe n-tega reda je n-parametrična družina funkcij.

Cauchyjeva naloga ali *začetni problem* imenujemo diferencialno enačbo skupaj z začetnimi pogoji. Rešitev začetnega problema je ena sama funkcija (parametre iz splošne rešitve začetni pogoji določijo).

DIFERENCIALNE ENAČBE PRVEGA REDA

Začetni problem (Cauchy-jeva naloga) je v primeru diferencialnih enačb 1. reda takšne oblike:

$$F(x, y, y') = 0,$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{oz.} \quad f(x)\mathrm{d}x = g(y)\mathrm{d}y.$$

DIFERENCIALNE ENAČBE - NADALJEVANJE

Homogene diferencialne enačbe

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$y' = f(\frac{y}{x}) \quad \text{oz.} \quad F(y', \frac{y}{x}) = 0.$$

Navodilo za reševanje: Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = \frac{y}{x}$, tj. za nastavek vzamemo $y = xu$ (sledi $y' = u + xu'$), dobimo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama.

Linearne diferencialne enačbe 1. reda

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Splošna rešitev je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne enačbe, y_p pa neka partikularna rešitev (zadošča diferencialni enačbi).

A. Homogeni del (dobimo y_h):

$$p(x)y' + q(x)y = 0$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Dobimo rešitev $y_h = Cg(x)$.

B. Nehomogeni del (dobimo y_p):

$$p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Rešujemo z metodo *variacija konstante*: Za nastavek vzamemo $y_p = C(x)g(x)$ (konstanto iz rešitve homogenega dela variiramo), ga odvajamo $y' = C'(x)g(x) + C(x)g'(x)$ in vstavimo v diferencialno enačbo. Iz dobljene enačbe izračunamo $C(x)$.

LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE VIŠJIH REDOV

Homogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

kjer so $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstantni koeficienti.

Navodilo za reševanje: Rešujemo jo z nastavkom $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, ki ga odvajamo in vstavimo v dif. enačbo. Dobimo *karakteristično enačbo*:

$$a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

katere rešitve so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Splošna rešitev homogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti je tedaj

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n x}.$$

Nehomogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x),$$

kjer so $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstantni koeficienti, $b(x)$ pa funkcija spremenljivke x.

Splošna rešitev je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne dif. enačbe s konst. koef., y_p pa neka partikularna rešitev (zadošča diferencialni enačbi).

A. Homogeni del (dobimo y_h):

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

To je homogena linearna dif. enačba s konstantnimi koeficienti. Dobimo rešitev y_h.

B. Nehomogeni del (dobimo y_p):

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x).$$

Rešujemo z metodo *inteligentnega ugibanja*. To je, nastavek uganemo glede na obliko desne strani $b(x)$:

- $b(x)$ polinom stopnje $m \implies y_p = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$,
- $b(x) = \sin ax$ ali $b(x) = \cos ax \implies y_p = A \sin ax + B \cos ax$,
- $b(x) = \mathrm{e}^{ax} \implies y_p = A\mathrm{e}^{ax}$,
- $b(x)$ je vsota več členov iz zgornjih treh točk $\implies$ y_p je vsota pripadajočih nastavkov.

Nastavek y_p odvajamo in vstavimo v diferencialno enačbo. Iz dobljene enačbe izračunamo vse parametre iz nastavka $(A, B, \ldots)$.