1. vaja iz Matematike 2 (VSŠ)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

DETERMINANTE

Determinanta $\det A$ je število, prirejeno kvadratni shemi A. Determinante velikosti 2×2 in 3×3 računamo takole:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

1. naloga: Izračunaj determinante:

a.) $\begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a^2} & \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{2a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1-a^2} \end{vmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \pm 1$

Rezultat: 1.

b.) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

Rezultat: -21.

c.) $\begin{vmatrix} 0 & 1+i & 2+i \\ 1-i & 0 & 1+2i \\ 2-i & 1-2i & 0 \end{vmatrix}$

Rezultat: 2.

2. naloga: Za katere vrednosti t je determinanta

$$\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix}$$

enaka 0?

Rezultat: $-2, 4$.

3. naloga:^{DN} Za katere vrednosti x je determinanta

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & x^4 & x^6 \end{vmatrix}$$

enaka 0?

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & x^4 & x^6 \end{vmatrix} &= x^8 + x^5 + x^6 - x^4 - x^8 - x^7 = -x^7 + x^6 + x^5 - x^4 = \\ &= -x^4(x^3 - x^2 - x + 1) = -x^4(x^2(x-1) - (x-1)) = \\ &= -x^4(x-1)(x^2-1) = -x^4(x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

Rezultat: $0, 1, -1$.

Pravila za računanje determinant

1. Determinanta je enaka 0, če:
   a.) so v kakšni vrstici (stolpcu) same 0,
   b.) sta dve vrstici (stolpca) enaki,
   c.) je kakšna vrstica (stolpec) večkratnik neke druge vrstice (stolpca).
2. Če zamenjamo dve sosednji vrstici (stolpca), determinanta spremeni predznak.
3. Determinanta ne spremeni svoje vrednosti, če kakšni vrstici (stolpcu) prištejemo večkratnik kakšne druge vrstice (stolpca).
4. Iz vrstice (stolpca) lahko izpostavimo skupni faktor:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \cdot a_{i1} & C \cdot a_{i2} & \cdots & C \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = C \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4. naloga: Izračunaj determinante:

a.) $\begin{vmatrix} 15 & 25 & 40 \\ 1 & 3 & 28 \\ 5 & 2 & 24 \end{vmatrix}$

Rezultat: 2 620.

b.) $\star \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

Rezultat: 20.

c.) ^{DN*}

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} 2.vr. - 2 \times 1.vr. \\ 3.vr. - 1.vr. \\ 4.vr. - 1.vr. \\ 5.vr. - 3 \times 1.vr. \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 & 6 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & -3 \\ 4 & -7 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \\ 1 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 8 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{razvoj po 1. stolpcu} \\ 2.vr. - 1.vr. \\ 2.vr. + 3.vr. \\ 4.vr. + 2 \times 3.vr. \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 16 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & -3 \\ 1 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & -19 & 8 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & -2 & 6 \\ 4 & -4 & -3 \\ -19 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 118 \quad \begin{array}{l} 1.vr. - 3 \times 3.vr. \\ \text{razvoj po 1. stolpcu} \end{array}$$

Rezultat: 118.

d.) $\star \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Rezultat: 2.

Kramerjevo pravilo za reševanje sistemov linearnih enačb

Vzemimo sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Če je determinanta sistema

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

so rešitve sistema ($j = 1, 2, \ldots, n$) enake

$$x_j = \frac{D_j}{D},$$

kjer je D_j determinanta, ki jo dobimo, tako da j-ti stolpec v D zamenjamo z vektorjem $b = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$.

5. naloga: Reši sisteme z uporabo Kramerjevega pravila:

a.)

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 3x - 5y &= 4 \end{aligned}$$

Rezultat: $x = 3, y = 1$.

b.)

$$\begin{aligned} 3y + 2x &= z + 1 \\ 3x + 2z &= 8 - 5y \\ 3z - 1 &= x - 2y \end{aligned}$$

Rezultat: $x = 3, y = -1, z = 2$.

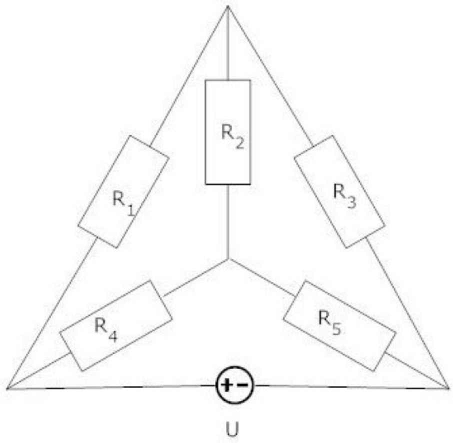
6. naloga:^{DN} Za vezje na sliki poišči tokove I_1, I_2 in I_3 v posameznih tokokrogih (tok I_1 v krogu levo zgoraj, nadaljujemo v smeri urinega kazalca). Podatki so: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 3\Omega$ in $U = 1.5V$.

Za vsak tokokrog zapišemo Ohmov zakon ($U = IR$). Dobimo sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} I_1R_1 + (I_1 - I_2)R_2 + (I_1 - I_3)R_4 &= 0, \\ I_2R_3 + (I_2 - I_3)R_5 + (I_2 - I_1)R_2 &= 0, \\ (I_3 - I_1)R_4 + (I_3 - I_2)R_5 &= U, \end{aligned}$$

ki ga še uredimo:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_4)I_1 - R_2I_2 - R_4I_3 &= 0, \\ -R_2I_1 + (R_2 + R_3 + R_5)I_2 - R_5I_3 &= 0, \\ -R_4I_1 - R_5I_2 + (R_4 + R_5)I_3 &= U. \end{aligned}$$



Ko vstavimo podatke, dobimo sistem:

$$
\begin{aligned}
5I_1 - 2I_2 - 2I_3 &= 0, \\
-2I_1 + 7I_2 - 3I_3 &= 0, \\
-2I_1 - 3I_2 + 5I_3 &= \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Po Kramerjevem pravilu izračunamo determinanto sistema D ter determinante D_1, D_2 in D_3:

$$
D = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 58, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 7 & -3 \\ \frac{3}{2} & -3 & 5 \end{vmatrix} = 30,
$$

$$
D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & \frac{3}{2} & 5 \end{vmatrix} = \frac{57}{2}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ -2 & -3 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{93}{2}.
$$

Sedaj so tokovi enaki:

$$
I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{30}{58} = 0.52A, \quad I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{57}{116} = 0.49A, \quad I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{93}{116} = 0.8A.
$$

Rezultat: $I_1 = 0.52A, I_2 = 0.49A, I_3 = 0.8A$.

VEKTORJI

Skalarni produkt

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\
\vec{b} &= (b_1, b_2, b_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R} : \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\
\mathbb{C} : \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + a_3\bar{b}_3
\end{aligned}
$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = |\vec{a}|\cdot|\text{proj}\ _{\vec{a}}\vec{b}| = |\vec{b}|\cdot|\text{proj}\ _{\vec{b}}\vec{a}|$

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$ oz. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ dolžina vektorja

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$: komutativnost v $\mathbb{R}$

$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Standardni bazni vektorji v $\mathbb{R}^3$: $\vec{\imath} = (1,0,0), \vec{\jmath} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$.

Pravokotna projekcija vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$: $\text{proj}\ _{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

7. naloga: Izračunaj skalarni produkt kompleksnih vektorjev $\vec{a} = (2+\mathrm{i}, \mathrm{i}, 3-\mathrm{i})$ in $\vec{b} = (-\mathrm{i}, 1+2\mathrm{i}, -2)$.

Rezultat: $-5+5\mathrm{i}$.

8. naloga: Izračunaj skalarni produkt $(5\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$, kjer je $\vec{a}$ pravokoten na $\vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$ in $|\vec{b}| = 3$.

Rezultat: 13.

9. naloga: Izračunaj skalarni produkt $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b})$, kjer je kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak $\frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 4$ in $|\vec{b}| = 6$.

Rezultat: 336.

10. naloga: Dana sta vektorja $\vec{u} = 2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$ in $\vec{v} = 2\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$. Določi kot med njima in pravokotni projekciji enega na drugega.

Rezultat: $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\text{proj}\ _{\vec{u}}\vec{v} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, $\text{proj}\ _{\vec{v}}\vec{u} = (2,1,1)$.

11. naloga:^{DN} Določi kot med x osjo in vektorjem $\vec{a} = (1,0,-1)$ ter pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na x os.

Kot med x osjo in vektorjem $\vec{a}$ je enak kotu med enotskim smernim vektorjem $\vec{\imath} = (1,0,0)$ in $\vec{a}$. To je,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\imath}\cdot\vec{a}}{|\vec{\imath}|\cdot|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

in $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Projekcijo vektorja $\vec{a}$ na x os izračunamo takole:

$$\text{proj}\ _{\vec{\imath}}\vec{a} = |\text{proj}\ _{\vec{\imath}}\vec{a}|\cdot\frac{\vec{\imath}}{|\vec{\imath}|} = \frac{\vec{\imath}\cdot\vec{a}}{|\vec{\imath}|}\cdot\frac{\vec{\imath}}{|\vec{\imath}|} = (1,0,0) = \vec{\imath}.$$

Rezultat: $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\text{proj}\ \vec{a}_{\vec{\imath}} = \vec{\imath}$.