11. vaja iz Matematike 2 (VSŠ)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

DIFERENCIALNE ENAČBE

Osnovni pojmi

Diferencialna enačba reda n je zveza med neodvisno spremenljivko x, odvisno spremenljivko y ter njenimi odvodi $y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Pri tem je $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Red diferencialne enačbe je stopnja najvišjega odvoda.

Rešitev diferencialne enačbe $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ na intervalu $[a, b]$ je vsaka funkcija $g(x)$, ki je na intervalu $[a, b]$ n-krat odvedljiva in za katero za vsak $x \in [a, b]$ velja $F(x, g(x), g'(x), \ldots, g^{(n)}(x)) = 0$ (zadošča diferencialni enačbi).

Rešitev diferencialne enačbe n-tega reda je n-parametrična družina funkcij.

Cauchyjeva naloga ali *začetni problem* imenujemo diferencialno enačbo skupaj z začetnimi pogoji. Rešitev začetnega problema je ena sama funkcija (parametre iz splošne rešitve začetni pogoji določijo).

1. naloga: Kateri diferencialni enačbi pripada družina krožnic $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$?

Rezultat: $(1 + (y')^2)y''' - 3y'(y'')^2 = 0$.

2. naloga: Pokaži, da je družina funkcij $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$ rešitev diferencialne enačbe $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Namig: Funkcijo odvajamo in vstavimo v diferencialno enačbo.

3. naloga: Določi tisto funkcijo iz družine $y = C_1\mathrm{e}^{2C_2x}$, ki zadošča začetnim pogojem $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

Rezultat: $y(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$.

DIFERENCIALNE ENAČBE PRVEGA REDA

Začetni problem (Cauchy-jeva naloga) je v primeru diferencialnih enačb 1. reda takšne oblike:

$$F(x, y, y') = 0,$$
$$y(x_0) = y_0.$$

Diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{oz.} \quad f(x)\mathrm{d}x = g(y)\mathrm{d}y.$$

4. naloga: Reši diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama:

a.) $y' = \mathrm{e}^{x+y}$

Rezultat: $y(x) = -\ln(-\mathrm{e}^x - C)$

b.) $y' = \mathrm{e}^{x+y}$, $y(0) = 1$ (začetni pogoj)

Rezultat: $y(x) = -\ln(-\mathrm{e}^x + 1 + \mathrm{e}^{-1})$

Homogene diferencialne enačbe

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$y' = f(\frac{y}{x}) \quad \text{oz.} \quad F(y', \frac{y}{x}) = 0.$$

Navodilo za reševanje: Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = \frac{y}{x}$, tj. za nastavek vzamemo $y = xu$ (sledi $y' = u + xu'$), dobimo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama.

5. naloga: Reši homogeno diferencialno enačbo $xy' - y = x\mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

Rezultat: $y(x) = x \arcsin(Cx)$.

6. naloga: Reši homogeno diferencialno enačbo $(xy' - y)^2 = x^2 - y^2$.

Rezultat: $y(x) = \pm x \sin(\ln x + C)$.

Linearne diferencialne enačbe 1. reda

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Splošna rešitev je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene linearne enačbe, y_p pa neka partikularna rešitev (zadošča diferencialni enačbi).

A. Homogeni del (dobimo y_h):

$$p(x)y' + q(x)y = 0$$

To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama. Dobimo rešitev $y_h = Cg(x)$.

B. Nehomogeni del (dobimo y_p):

$$p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

Rešujemo z metodo *variacija konstante*: Za nastavek vzamemo $y_p = C(x)g(x)$ (konstanto iz rešitve homogenega dela variiramo), ga odvajamo $y' = C'(x)g(x) + C(x)g'(x)$ in vstavimo v diferencialno enačbo. Iz dobljene enačbe izračunamo $C(x)$.

7. naloga: Reši linearno diferencialno enačbo $xy' - 2y = 2x^4$ z začetnim pogojem $y(1) = 2$.

Rezultat: $y(x) = x^4 + x^2$.

8. naloga: Reši linearno diferencialno enačbo $x^2y' + xy + 1 = 0$.

Rezultat: $y(x) = -\frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x}$.

Bernoullijeve diferencialne enačbe

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)y^\alpha.$$

Navodilo za reševanje: Uvedemo novo odvisno spremenljivko $u = y^{1-\alpha}$, jo odvajamo $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, vstavimo v enačbo in dobimo linearno diferencialno enačbo 1. reda.

9. naloga: Reši Bernoullijevo diferencialno enačbo $(x+1)y' - y = (x+1)y^{-1}$.

Rezultat: $y(x) = \pm\sqrt{-2(x+1) + C(x+1)^2}$