12. VAJA IZ MATEMATIKE 2 (VSŠ)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

# DIFERENCIALNE ENAČBE - NADALJEVANJE

## Ortogonalne trajektorije

Dana je 1-parametrična družina krivulj $F(x,y,C)=0$. Ortogonalne trajektorije so vse krivulje, ki sekajo to družino pod pravim kotom.

$$\begin{aligned}
F(x,y,C) &= 0 \\
&\downarrow \ \text{dif. enačba} \\
y' &= f(x,y) \ = \ \text{tangens naklonskega kota tangente} \\
&\downarrow \\
y'_T &= -\frac{1}{f(x,y)} \ = \ \text{tangens naklonskega kota normale} = \text{tangente ortog. trajektorij} \\
&\downarrow \\
& \quad \text{rešitev te dif. enačbe so ortogonalne trajektorije}
\end{aligned}$$

1. naloga: Dana je družina krivulj $y=C(x^2+1)$. Poišči ortogonalne trajektorije. Določi še tisto ortogonalno trajektorijo, ki gre skozi točko $T(1,\frac{1}{4})$.

*Rezultat:* $y(x)=\pm\sqrt{-(\frac{x^2}{2}+\ln x)+C}$ cela družina; $y(x)=\pm\sqrt{-(\frac{x^2}{2}+\ln x)+\frac{9}{16}}$ ortogonalna trajektorija skozi točko $T$.

# LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE VIŠJIH REDOV

## Homogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$a_n y^{(n)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0,$$

kjer so $a_0,a_1,\ldots,a_n$ konstantni koeficienti.

Navodilo za reševanje: Rešujemo jo z nastavkom $y(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}$, ki ga odvajamo in vstavimo v dif. enačbo. Dobimo *karakteristično enačbo*:

$$a_n\lambda^n+\cdots+a_1\lambda+a_0=0,$$

katere rešitve so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Splošna rešitev homogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti je tedaj

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n x}.$$

2. naloga: Reši enačbo $y'' - 4y' + 3y = 0$.

*Rezultat:* $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{x}$.

3. naloga: Reši enačbo $y'' + 4y = 0$. Poišči tisto rešitev, za katero velja $y(0) = 0$ in $y'(0) = 2$.
NAMIG: Uporabi Eulerjevo formulo $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$.

*Rezultat:* $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ splošna rešitev; $y(x) = \sin 2x$ rešitev začetnega problema.

4. naloga: Reši enačbo $y'' - 2y' + y = 0$.

*Rezultat:* $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 x \mathrm{e}^{x}$.

5. naloga: Poišči rešitev dif. enačbe $y''' - y'' - y' + y = 0$, ki zadošča pogojem $y(0) = 2$, $y(1) = -\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}$ in $y'(0) = 0$.

*Rezultat:* $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 x \mathrm{e}^{x} + C_3 \mathrm{e}^{-x}$ splošna rešitev; $y(x) = 3\mathrm{e}^{x} - 4x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$.

## Nehomogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x),$$

kjer so $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstantni koeficienti, $b(x)$ pa funkcija spremenljivke $x$.

Splošna rešitev je oblike

$$y(x) = y_h + y_p,$$

kjer je $y_h$ rešitev homogene linearne dif. enačbe s konst. koef., $y_p$ pa neka partikularna rešitev (zadošča diferencialni enačbi).

A. Homogeni del (dobimo $y_h$):

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

To je homogena linearna dif. enačba s konstantnimi koeficienti. Dobimo rešitev $y_h$.

B. Nehomogeni del (dobimo $y_p$):

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x).$$

Rešujemo z metodo *inteligentnega ugibanja*. To je, nastavek uganemo glede na obliko desne strani $b(x)$:

- $b(x)$ polinom stopnje $m \implies y_p = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$,
- $b(x) = \sin ax$ ali $b(x) = \cos ax \implies y_p = A\sin ax + B\cos ax$,
- $b(x) = \mathrm{e}^{ax} \implies y_p = A\mathrm{e}^{ax}$,
- $b(x)$ je vsota več členov iz zgornjih treh točk $\implies$ $y_p$ je vsota pripadajočih nastavkov.

Nastavek $y_p$ odvajamo in vstavimo v diferencialno enačbo. Iz dobljene enačbe izračunamo vse parametre iz nastavka $(A, B, \ldots)$.

6. naloga: Reši enačbo $y'' - y = 2\mathrm{e}^{2x}$.

*Rezultat:* $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{x}$.

7. naloga: Reši enačbo $y'' - 5y' - 6y = \cos x + \mathrm{e}^{2x}$.

*Rezultat:* $y(x) = C_1\mathrm{e}^{6x} + C_2\mathrm{e}^{-x} - \frac{7}{74}\cos x - \frac{5}{74}\sin x - \frac{1}{12}\mathrm{e}^{2x}$.

8. naloga: Reši začetni problem $y'' - 2y' - 3y = x^2$, $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$.

*Rezultat:* $y(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}$ splošna rešitev; $y(x) = \frac{29}{108}\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}$ rešitev začetnega problema.

9. naloga:* Reši enačbo $y''' - y = -3\mathrm{e}^{x}$.
Namig: Partikularno rešitev išči v obliki $y_p = Ax\mathrm{e}^{x}$.

*Rezultat:* $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - x\mathrm{e}^{x}$.

## Eulerjeve enačbe

Tako imenujemo diferencialne enačbe oblike:

$$a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

kjer so $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstantni koeficienti.

Navodilo za reševanje: Rešujemo jo z nastavkom $y(x) = x^\lambda$, ki ga odvajamo in vstavimo v dif. enačbo. Dobimo *karakteristično enačbo*, katere rešitve so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Splošna rešitev Eulerjeve dif. enačbe je tedaj

$$y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + \cdots + C_n x^{\lambda_n}.$$

10. naloga: Reši enačbo $x^2y'' - xy' - 3y = 0$.

*Rezultat:* $y(x) = C_1x^3 + C_2x^{-1}$.

11. naloga: Reši enačbo $x^2y'' - xy' + y = 0$.

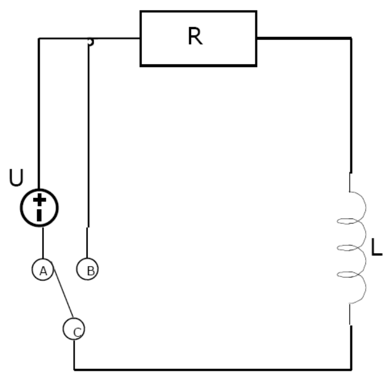
*Rezultat:* $y(x) = C_1x + C_2x\ln x$.

12. naloga: Reši diferencialno enačbo $y''' = 2 + \sin x$.

*Rezultat:* $y(x) = \frac{x^3}{3} + \cos x + \frac{Cx^2}{2} + Dx + E$.

## NEKAJ PRIMEROV UPORABE DIFERENCIALNIH ENAČB V ELEKTROTEHNIKI

1. primer: LINEARNA DIFERENCIALNA ENAČBA 1. REDA
Dano je LR vezje na sliki s podatki $R = 6\Omega$, $L = 3H$ in $U = 2V$. Izračunaj, kako se spreminja tok s časom, če smo ob času $t = 0s$ preklopili stikalo (torej je bil tok takrat enak 0). Kolikšen je tok ob času $t = 5s$?




Rešitev:
Diferencialna enačba za to vezje se glasi:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U.$$

Začetni pogoj: $I(0) = 0$.
To je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda. Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} L\frac{dI}{dt} + RI &= 0 \\ \int \frac{dI}{I} &= -\frac{R}{L}\int dt \\ \ln I &= -\frac{R}{L}t + \ln k \\ I_h(t) &= ke^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

Nato z variacijo konstante izračunamo partikularno rešitev.

$$\begin{aligned} I &= k(t)e^{-\frac{R}{L}t} \\ \dot{I} &= \dot{k}(t)e^{-\frac{R}{L}t} - k(t)\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo

$$L\dot{k}(t)e^{-\frac{R}{L}t} - k(t)Re^{-\frac{R}{L}t} + k(t)Re^{-\frac{R}{L}t} = U$$

in dobimo

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{U}{L}e^{\frac{R}{L}t} \\ k(t) &= \frac{U}{L}\int e^{\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}e^{\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

Partikularna rešitev je torej: $I_p(t) = \frac{U}{R}$.
Splošna rešitev je vsota partikularne rešitve in rešitve homogenega dela:

$$I(t) = I_p(t) + I_h(t) = \frac{U}{R} + ke^{-\frac{R}{L}t}$$

Ko upoštevamo še začetni pogoj, dobimo:

$$I(0) = \frac{U}{R} + k = 0,$$

od koder sledi, da je $k = -\frac{U}{R}$.
Tok v vezju se torej s časom spreminja takole:

$$I(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Za dane podatke je tok ob času $t = 5s$:

$$I(5) = \frac{2}{6}(1 - e^{-\frac{6\cdot 5}{3}}) = 0.33A.$$

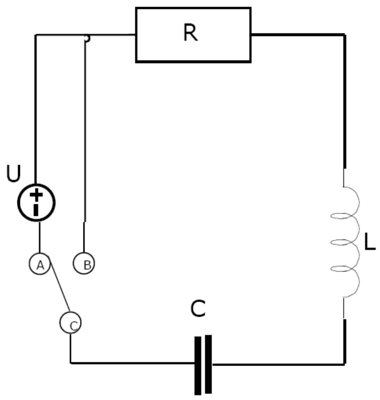
2. primer: LINEARNA DIFERENCIALNA ENAČBA 2. REDA
Dano je LCR vezje na sliki s podatki $U = 10V$, $R = 7\Omega$, $L = 20mH$ in $C = \mu 8F$. Izračunaj, kako se spreminja tok s časom, če smo ob času $t = 0s$ preklopili stikalo (torej je bil tok takrat enak 0).

Rešitev:
Napetostna enačba za to vezje:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int Idt = U.$$

Enačbo enkrat odvajamo po času in delimo z $L$, da dobimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0.$$




Začetni pogoji: $I(0) = 0$ in $\frac{dI}{dt}(0) = \frac{U}{L}$. Drugi začetni pogoj dobimo iz prve enačbe pri $t = 0$.
To je homogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Rešimo jo z nastavkom $I = e^{\lambda t}$, pri čemer označimo $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ in $2\xi\omega = \frac{R}{L}$:

$$\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\xi\omega \pm \sqrt{4\xi^2\omega^2 - 4\omega^2}}{2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Oblika rešitve je odvisna od tega, ali ima karakteristična enačba dve različni realni rešitvi, eno dvojno rešitev, ali dve konjugirano kompleksni rešitvi. To pa je seveda odvisno od danih podatkov. Ker je $L = 20mH$ in $C = 8\mu F$, je $\omega = 2500$ in zato je $\xi = \frac{7}{100}$, kar pomeni, da dobimo za dane podatke dve konjugirano kompleksni rešitvi. Zato je rešitev diferencialne enačbe oblike:

$$I(t) = e^{-2\xi\omega t}\left(A\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + B\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)\right)$$

Potrebno je še določiti konstanti $A$ in $B$. V ta nemen rešitev odvajamo:

$$\begin{aligned}\dot{I}(t) &= -2\xi\omega e^{-2\xi\omega t}\left(A\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + B\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)\right) \\ &\quad + e^{-2\xi\omega t}\left(-A(\omega\sqrt{1-\xi^2})\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + B(\omega\sqrt{1-\xi^2})\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)\right)\end{aligned}$$

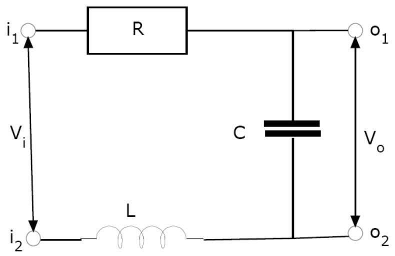
Nato vstavimo začetna pogoja:

$$\begin{aligned} I(0) = A &= 0 \\ \dot{I}(0) = -2\xi\omega A + B\omega\sqrt{1-\xi^2} &= \frac{U}{L}\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je $A = 0$ in $B = \frac{U}{L\omega\sqrt{1-\xi^2}}$. Torej je rešitev diferencialne enačbe enaka:

$$I(t) = \frac{U}{L\omega\sqrt{1-\xi^2}}e^{-2\xi\omega t}\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)$$

3. primer: LINEARNA DIFERENCIALNA ENAČBA 2. REDA
Dano je LCR vezje na sliki. Izračunaj, kako se spreminja izhodna napetost $V_o$ s časom,




če je vhodna napetost $V_i$ oblike $V_i = V\cos\Omega t$.
Rešitev:
Napetostna enačba za to vezje je

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I dt = V_i,$$

kjer je

$$V_o = \frac{1}{C}\int I dt.$$

Od tod sledi, da je

$$I = C\frac{dV_o}{dt}, \qquad \frac{dI}{dt} = C\frac{d^2V_o}{dt^2}.$$

Diferencialna enačba se torej glasi:

$$LC\frac{d^2V_o}{dt^2} + RC\frac{dV_o}{dt} + V_o = V_i,$$

oziroma

$$\frac{d^2V_o}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_o}{dt} + \frac{V_o}{LC} = \frac{V_i}{LC}.$$

To je nehomogena linearna diferencialna enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti. Signal $V_i$ naj bo oblike $V_i(t) = V\cos\Omega t$. Če pišemo $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, $2\xi\omega = \frac{R}{L}$ in $F = \frac{V}{LC}$, dobimo enačbo oblike:

$$\ddot{V}_o + 2\xi\omega\dot{V}_o + \omega^2 V_o = F\cos\Omega t.$$

Najprej rešimo homogeni del:

$$\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\xi\omega \pm \sqrt{4\xi^2\omega^2 - 4\omega^2}}{2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Predpostavimo, da so podatki taki, da je $\xi < 1$, torej sta rešitvi karakteristične enačbe konjugirano kompleksni. Rešitev ima obliko:

$$V_o^h(t) = e^{-2\xi\omega t}\left(A\cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + B\sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)\right)$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom (predpostavimo, da so podatki taki, da je $\Omega \neq \omega\sqrt{1-\xi^2}$):

$$V_o^p(t) = D\cos\Omega t + E\sin\Omega t.$$

Ker je $\dot{V}_o^p = -D\Omega \sin \Omega t + E\Omega \cos \Omega t$ in $\ddot{V}_o^p = -D\Omega^2 \cos \Omega t - E\Omega^2 \sin \Omega t$, sledi

$$(-D\Omega^2 + 2E\xi\omega\Omega + D\omega^2) \cos \Omega t + (-E\Omega^2 - 2D\xi\omega\Omega + E\omega^2) \sin \Omega t = F \cos \Omega t$$

Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} -D\Omega^2 + 2E\xi\omega\Omega + D\omega^2 &= F \\ -E\Omega^2 - 2D\xi\omega\Omega + E\omega^2 &= 0 \end{aligned}$$

Od tu dobimo konstanti $D$ in $E$ in partikularno rešitev diferencialne enačbe. Splošna rešitev je vsota partikularne rešitve in rešitve homogenega dela.