10. VAJA IZ MATEMATIKE 2 (VSŠ)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

EKSTREMI FUNKCIJ VEČ SPREMENLJIVK

Kandidati za lokalne ekstreme funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ so *stacionarne* ali *kritične točke* funkcije. To so tiste točke, kjer so vsi prvi parcialni odvodi enaki 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Naj bo $f(x, y)$ funkcija dveh spremenljivk. S pomočjo Hessejeve matrike ugotovimo, ali je v dani kritični točki res lokalni ekstrem funkcije f:

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Za kritično točko (x_0, y_0) funkcije f namreč velja:

1. Če je $\det(H_f(x_0, y_0)) > 0$, potem je v točki (x_0, y_0) lokalni ekstrem.
   - **a.)** Če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, potem je v tej točki lokalni minimum.
   - **b.)** Če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, potem je v tej točki lokalni maksimum.
   - **c.)** Če je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 0$, je lokalni ekstrem težje karakterizirati (mi ne bomo).
2. Če je $\det(H_f(x_0, y_0)) < 0$, potem je v točki (x_0, y_0) sedlo (ni lokalnega ekstrema).
3. Če je $\det(H_f(x_0, y_0)) = 0$, je lokalni ekstrem težje karakterizirati (mi ne bomo).

Edini kandidati za globalne ekstreme so poleg stacionarnih točk še robne točke definicijskega območja in točke, v katerih funkcija ni odvedljiva.

4. naloga: Določi lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Rezultat: $T_1(0, 0)$: sedlo, $T_2(1, 1)$: lokalni minimum.

5. naloga: Poišči stacionarne točke funkcije treh spremenljivk: $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

Rezultat: $T(2, 1, 7)$.

6. naloga: Določi lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = \mathrm{e}^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

Rezultat: $T(\frac{1}{2}, -1)$: lokalni minimum.

7. naloga: Izračunaj prve parcialne odvode implicitno podane fukcije $z(x, y)$: $x^2 - 2y^2 + z^3 = 2 - z$.

Rezultat: $z'_x = -\frac{2x}{3z^2+1}$, $z'_y = \frac{4y}{3z^2+1}$.

8. naloga: Določi lokalne ekstreme implicitno podane funkcije $z = z(x, y) : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

Rezultat: $T_1(1, -1)$: lokalni minimum.

VEZANI EKSTREMI FUNKCIJ

Dana je funkcija $f(x, y)$. Zanimajo nas ekstremi nad krivuljo $g(x, y) = 0$. Takšni ekstremi, rečemo jim *vezani ekstremi*, lahko nastopajo v stacionarnih točkah Lagrangeove funkcije:

$$F(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y).$$

Spremenljivki λ rečemo *Lagrangeov množitelj*, enačbi $g(x, y) = 0$ pa *vez*.

9. naloga: Poišči najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = x + 2y$ na krivulji $x^2 + y^2 = 5$.

Rezultat: $T_1(-1, -2)$: vezani minimum in $f(-1, -2) = -5$, $T_2(1, 2)$: vezani maksimum in $f(1, 2) = 5$.

10. naloga: Poišči vezane ekstreme funkcije $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, kjer je vez podana z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Rezultat: $T_1(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$: vezani minimum in $f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -3$, $T_2(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$: vezani maksimum in $f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 3$.

11. naloga:* Poišči vezane ekstreme funkcije $f(x, y, z) = x^2 - 14x + y^2 - 8y + 48 + z^2 - 8z$, kjer je vez podana z neenačbo $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Rezultat: $T_1(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9})$: vezani minimum in $f(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}) = 31$, $T_2(-\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9})$: vezani maksimum in $f(-\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}) = 67$.