9. VAJA IZ MATEMATIKE 2 (VSŠ)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

FOURIEROVA VRSTA - NADALJEVANJE

1. naloga: Nariši graf funkcije $g(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$, ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(x) = 1$, za x, ki je absolutno manj kot $\frac{2\pi}{4}$, in 0 drugje, s periodo 2π.

Rezultat: $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos x$.

FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

Funkcija n spremenljivk je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x_1, \ldots, x_n) = y$.

2. naloga: Poišči in nariši definicijsko območje funkcije 2 spremenljivk:

a.) $f(x, y) = \frac{x-5xy}{3\sqrt{y-x^2}}$

Rezultat: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x^2\}$.

b.) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$

Rezultat: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1 \text{ in } (y \geq 1 \text{ ali } y \leq -1\}$.

NIVOJSKE KRIVULJE ALI NIVOJNICE

Nivojske krivulje funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $z = f(x, y)$, so krivulje $f(x, y) = C$ v definicijskem območju funkcije f, na katerih zavzame f konstantno vrednost C.

3. naloga: Izračunaj in nariši nivojske krivulje funkcije 2 spremenljivk:

a.) $f(x, y) = xy$

Rezultat: nivojnice so hiperbole $y = \frac{C}{x}$.

b.) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2+y^2}$

Rezultat: nivojnice so krožnice $x^2+y^2=\ln C$.

Parcialni odvodi

Funkcijo $f(x_1,\ldots,x_n)$ lahko odvajamo na vsako spremenljivko $x_1,\ldots,x_n$ posebej. Ko odvajamo f po spremenljivki x_i, obravnavamo vse ostale spremenljivke x_j $(j\neq i)$ kot konstante.

Parcialni odvod funkcije $f(x_1,\ldots,x_n)$ po spremenljivki x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=f_{x_i}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)}{h}$$

Totalni diferencial funkcije f:

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

4. naloga: Poišči prve parcialne odvode in totalni diferencial funkcije:

a.) $f(x,y)=(x^3-y^2)^2$

Rezultat: $f_x=6x^2(x^3-y^2)$, $f_y=-4y(x^3-y^2)$, $df=6x^2(x^3-y^2)\mathrm{d}x-4y(x^3-y^2)\mathrm{d}y$.

b.) $f(x,y,z)=\sin(x^2+y^2+z^2)$

Rezultat: $f_x=2x\cos(x^2+y^2+z^2)$, $f_y=2y\cos(x^2+y^2+z^2)$, $f_z=2z\cos(x^2+y^2+z^2)$, $df=2\cos(x^2+y^2+z^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$.

c.) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\ln(xy)$

Rezultat: $f_x=\mathrm{e}^x(\ln(xy)+\frac{1}{x})$, $f_y=\frac{\mathrm{e}^x}{y}$, $df=\mathrm{e}^x(\ln(xy)+\frac{1}{x})\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{e}^x}{y}\mathrm{d}y$.

5. naloga: S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost izraza $\sqrt{2.04^3+2.98^2-1}$.

Namig: Uporabimo formulo $f(a+h,b+k)\approx f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k$.
Rezultat: $f(a+h,b+k)=4.045$.

6. naloga:^{DN} S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost izraza $(-1.99)^3+\ln 1.03$.

Naj bo $f(x,y)=x^3+\ln y$. Tedaj dobimo vrednost iskanega izraza kot

$$(-1.99)^3+\ln 1.03=f(-1.99,1.03).$$

Točka, ki je blizu $(-1.99, 1.03)$ in v kateri znamo izračunati vrednost iskanega izraza, je $(a,b) = (-2,1)$. Sedaj uporabimo formulo za približek z diferencialom

$$f(-1.99, 1.03) \approx f(-2,1) + f_x(-2,1)(-1.99 - (-2)) + f_y(-2,1)(1.03 - 1).$$

Izračunajmo parcialne odvode funkcije f v točki $(-2,1)$:

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 &\Rightarrow\quad & f_x(-2,1) = 12, \\ f_y &= \frac{1}{y} &\Rightarrow\quad & f_y(-2,1) = 1. \end{aligned}$$

Sledi $(-1.99)^3 + \ln 1.03 = f(-1.99, 1.03) \approx -8 + 12 \cdot 0.01 + 1 \cdot 0.03 = -7.85$.

Rezultat: $f(-1.99, 1.03) \approx -7.85$.

Višji parcialni odvodi

Funkcija $f(x_1, \ldots, x_n)$ ima n prvih parcialnih odvodov (parcialni odvodi 1. reda),

$$f_{x_1}, \ldots, f_{x_n},$$

in n^2 drugih parcialnih odvodov (parcialni odvodi 2. reda):

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \ 1 \leq i, j \leq n.$$

Če drugi mešani odvodi (tj. odvajani po različnih spremenljivkah) obstajajo in so zvezni, vrstni red odvajanja ni pomemben:

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}.$$

7. naloga: Poišči vse parcialne odvode prvega in drugega reda za funkcijo $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$.

Rezultat: $f_x = \frac{2x}{x^2+y}$, $f_y = \frac{1}{x^2+y}$, $f_{xx} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$, $f_{xy} = f_{yx} = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}$, $f_{yy} = \frac{-1}{(x^2+y)^2}$.

8. naloga: Poišči tretji parcialni odvod f_{yzz} za funkcijo $f(x,y,z) = y \ln(x^2 + z^4)$. Izračunaj tudi $f_{yzz}(1,0,1)$.

Rezultat: $f_{yzz} = \frac{4z^2(3x^2 - z^4)}{(x^2+z^4)^4}$, $f_{yzz}(1,0,1) = 2$.

9. naloga: Poišči tretji parcialni odvod f_{xyz} za funkcijo $f(x,y,z) = \sin(xyz)$.

Rezultat: $f_{xyz} = \cos(xyz) - 3xyz \sin(xyz) - x^2y^2z^2 \cos(xyz)$.