4. vaja iz Matematike 2 (VSŠ)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

MATRIKE

Matrika dimenzije $m \times n$ je pravokotna tabela $m \cdot n$ števil, ki ima m vrstic in n stolpcev:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m,n}.$$

Operacije na matrikah

- množenje s skalarjem:

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

- se števanje po komponentah (matriki morata biti enakih dimenzij):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

- transponiranje (zamenjava vrstic in stolpcev oz. zrcaljenje čez glavno diagonalo):

$$A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^{m,n} \quad \Longrightarrow \quad A^T = [a_{ji}]_{j=1,i=1}^{n,m}$$

- konjugiranje (za kompleksne matrike):

$$A^* = \overline{A^T}$$

- množenje matrik (pogoj: št. vrstic druge matrike = št. stolpcev prve matrike):

  $A{\cdot}B = C$, c_{ij} = skalarni produkt $i-$te vrstice matrike A in $j-$tega stolpca matrike B

- sled kvadratne matrike (vsota diagonalnih elementov):

$$tr(A) = tr\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

<u>1. naloga</u>: Dana je kompleksna matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -3\mathrm{i} & -4+\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} & 6 & 7 & 2+6\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Zapiši A^T in A^*.

Rezultat: $A^T = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 4 & -2-\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 2 & 6 \\ 4 & -3\mathrm{i} & 7 \\ 5 & -4+\mathrm{i} & 2+6\mathrm{i} \end{bmatrix}$, $A^* = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 4 & -2+\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 2 & 6 \\ 4 & 3\mathrm{i} & 7 \\ 5 & -4-\mathrm{i} & 2-6\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

<u>2. naloga</u>: Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$. Izračunaj $4A - B^T$ in $2A^T + 3B$!

Rezultat: $4A - B^T = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 17 & -2 \\ 18 & 2 \end{bmatrix}$, $2A^T + 3B = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 16 \\ 6 & -8 & 22 \end{bmatrix}$.

<u>3. naloga</u>: Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Izračunaj produkta AB in BA!

Rezultat: $AB = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \\ 9 & 22 & 15 & -8 \\ -4 & -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$.

<u>4. naloga</u>: Izračunaj produkta vrstičnega vektorja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ in stolpičnega vektorja $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rezultat: $A \cdot B = 6$, $B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

5. naloga:* Izračunaj $f(A)$, če je $f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 7$ in $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Rezultat: $f(A) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Obrnljive matrike in inverzi

Kvadratna matrika A je obrnljiva, če obstaja matrika A^{-1}, tako da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Pri tem je

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

enotska matrika ali identiteta. Če matrika ni obrnljiva, pravimo, da je singularna. Matriko A^{-1} imenujemo inverzna matrika matrike A.

Velja naslednje:

i.) Identiteta je enota za matrično množenje: $A \cdot I = I \cdot A = A$.

ii.) Matrika A je nesingularna natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$.

iii.) Izračun inverzne matrike (metoda kofaktorjev):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T,$$

kjer je $\tilde{A}$ matrika kofaktorjev $\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ in A_{ij} je poddeterminanta k elementu a_{ij}, ki jo iz $\det A$ dobimo tako, da odstranimo i-to vrstico in j-ti stolpec.

6. naloga: Poišči inverze k danim matrikam:

a.) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Rezultat: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

b.) $B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Rezultat: $B^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

c.) $C = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

Rezultat: $C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -10 & -56 & 32 \\ 5 & 22 & -13 \\ 4 & 26 & -14 \end{bmatrix}.$

Rang matrike

Rang $r(A)$ matrike $A^{m \times n}$ je enak številu linearno neodvisnih vrstic/stolcev. Velja:

$$r \leq \min\{m, n\}.$$

Rang matrike se ne spremeni, če:

i.) dve vrstici med seboj zamenjamo,

ii.) vrstico pomnožimo s poljubnim neničelnim številom,

iii.) vrstici prištejemo poljubni večkratnik kake druge vrstice.

7. naloga: Določi rang matrik:

a.) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

Rezultat: $r(A) = 3$.

b.) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 8 & -6 \\ 3 & -3 & 11 & -2 \end{bmatrix}$

Rezultat: $r(B) = 2$.

c.) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -5 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -9 & 13 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rezultat: $r(C) = 4$.

Računanje inverzne matrike z Gaussovo eliminacijo

Razširjeno matriko $[A|I]$ transformiramo z operacijami, ki ohranjajo rang, do oblike $[I|A^{-1}]$, tj. razširjene matrike, ki ima na levi strani identiteto. Na ta način dobimo na desni strani inverzno matriko A^{-1} matrike A.

$$[A|I] \rightsquigarrow^{\text{transformacija}} \rightsquigarrow [I|A^{-1}]$$

<u>8. naloga</u>: Z Gaussovo eliminacijo izračunaj inverz matrik:

a.) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ -8 & 3 & 10 \end{bmatrix}$

Rezultat: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

b.) $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Rezultat: $B^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}$.

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

Dan je sistem m enačb z n neznankami:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Sistem lahko zapišemo v matrični obliki $Ax = b$, kjer je A matrika koeficientov, b pa vektor vrednosti z desne strani sistema.

Sestavimo razširjeno matriko $R = [A|b]$ in z Gaussovo eliminacijo pretvorimo R v obliko, ki ima pod glavno diagonalo same 0. Tedaj lahko rešitve sistema direktno izrazimo. Pri tej transformaciji uporabljamo operacije, ki ohranjajo rang matrik:

i.) dve vrstici med seboj zamenjamo,

ii.) vrstico pomnožimo s poljubnim neničelnim številom, iii.) vrstici prištejemo poljubni večkratnik kake druge vrstice.

Za rešljivost sistema linearnih enačb velja naslednje:

1. Sistem $Ax = b$ je rešljiv $\Leftrightarrow r(A) = r(R) =: r$.
2. Če je $r = n \Rightarrow$ rešitev je ena sama.
3. Če je $r < n \Rightarrow$ rešitev je $(n-r)$-parametrična družina (za $n-r$ neznank lahko izberemo poljubne vrednosti).

9. naloga: Reši sisteme linearnih enačb:

a.)

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 0 \\ x + y + z &= 13 \end{aligned}$$

Rezultat: $x = 7$, $y = 5$, $z = 1$.

b.) ^{DN}

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 9 \\ x + 2y - 3z &= 14 \\ 3x + 4y + z &= 16 \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko sistema in delamo ničle pod glavno diagonalo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & 14 \\ 3 & 4 & 1 & 16 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 0 & -2 & 10 & -26 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 0 & -1 & 8 & -19 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} 1.vr. - 2 \times 2.vr. \\ 3.vr. - 3 \times 2.vr. \\ \text{premešamo vr. } 2. \to 1. \\ \hline 3.vr. - 2 \times 2.vr. \end{array}$$

Vidimo, da je rang matrike koeficientov enak 3, rang razširjene matrike je tudi 3. Sledi, da je sistem rešljiv. Ker sta ranga enaka, je rešitev ena sama (sistem zapišemo od spodaj navzgor):

$$\begin{aligned} -6z &= 12, \\ -y + 8z &= -19, \\ x + 2y - 3z &= 14, \end{aligned}$$

torej $z = -2$, $y = 3$, $x = 2$.

Rezultat: $x = 2$, $y = 3$, $z = -2$.