7. VAJA IZ MATEMATIKE 2 (VSŠ)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

POTENČNE VRSTE - NADALJEVANJE

1. naloga: Določi konvergenčni polmer potenčne vrste in izračunaj vsoto vrste v središču:

a.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}(x-3)^n$

Rezultat: $R = 2$, območje konvergence $(1, 5)$, vsota pri $x = 3$ je 0.

b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} x^n$

Rezultat: $R = \infty$, območje konvergence $(-\infty, \infty)$, vsota pri $x = 0$ je 1.

2. naloga: Določi konvergenčno območje potenčnih vrst:

a.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+4}$

Rezultat: $R = 1$, območje konvergence: $[-2, 0)$.

b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$

Rezultat: $R = 0$, območje konvergence: $\{0\}$.

c.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-3)^n$

Rezultat: $R = 1$, območje konvergence: $(2, 4]$.

TAYLORJEVA VRSTA (PRIMER POTENČNE VRSTE)

Razvoj funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x_0 = a$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \text{Taylorjeva vrsta} \\
&= \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m}_{\text{Taylorjev polinom stopnje } m} + \underbrace{R_m}_{\text{ostanek}}
\end{aligned}
$$

Taylorjev polinom (stopnje n) je najboljši polinomski približek (stopnje n) dane funkcije!

Razvoj nekaterih elementarnih funkcij okrog točke $x = 0$:

a.) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad |x| < \infty$

b.) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad |x| < \infty$

c.) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad |x| < \infty$

d.) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; \quad |x| < 1$

e.) Binomska formula: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n; \quad |x| < 1$

f.) Geometrijska vrsta: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \quad |x| < 1$

3. naloga: Razvij funkcijo v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 in določi območje konvergence vrste:

a.) $p(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 2$

Rezultat: $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 2$; $|x| < \infty$.

b.) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

Rezultat: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n$; $|x| < \infty$.

c.) $g(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$

Rezultat: $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n!}$; $|x| < \infty$.

d.) $h(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$

Namig: Parcialni ulomki.
Rezultat: $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n$; $|x| < 2$.

e.) $i(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Rezultat: $i(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$; $|x| < 1$.

4. naloga: Razvij funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okoli točke x_0. Določi tudi območje konvergence.

a.) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x_0 = 1$

Rezultat: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)}{2} (x-1)^n$; $|x - 1| < 1$.

b.) $\star$ $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, $x_0 = 2$

Namig: Parcialni ulomki.
Rezultat: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3^{n+1} + 1)}{2 \cdot 3^{n+1}} (x-2)^n$; $|x - 2| < 1$.