5. vaja iz Matematike 2 (VSŠ)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

SISTEMI LINEARNIH ENAČB-NADALJEVANJE

1. naloga: Reši sisteme linearnih enačb:

c.)

$$\begin{aligned} 2x+3y-2z &= 5 \\ x-2y+3z &= 2 \\ 4x-y+4z &= 1 \end{aligned}$$

Rezultat: Sistem ni rešljiv (nima rešitve).

d.) ^{DN}

$$\begin{aligned} 2x+2y-z+t &= 4 \\ 4x+3y-z+2t &= 6 \\ 8x+5y-3z+4t &= 12 \\ 3x+3y-2z+2t &= 6 \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko sistema in delamo ničle pod glavno diagonalo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2.vr. - 2\times 1.vr. \\ 3.vr. - 2\times 2.vr. \\ 2\times 3.vr. - 3\times 1.vr. \end{array}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad 3.vr. - 2.vr.$$

$$\equiv \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \quad 3.vr. - 2\times 4.vr.$$

Ker sta ranga osnovne in razširjene matrike enaka ($r(A) = r(R) = 4$), je sistem rešljiv. Ker so v sistemu 4 neznanke, ima sistem eno samo rešitev. Zapišimo preoblikovan sistem od spodaj navzgor:

$$\begin{aligned} -2t &= 2 \\ -2z &= 2 \\ -y+z &= -2 \\ 2x+2y-z+t &= 4 \\ \hline t &= -1 \\ z &= -1 \\ y &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Rezultat: $x=1$, $y=1$, $z=-1$, $t=-1$.

e.)

$$\begin{aligned} 2x+3y+2z &= 2 \\ x+2y-3z &= 3 \\ x+y+5z &= -1 \end{aligned}$$

Rezultat: $x=-13z-5$, $y=8z+4$, $z=$ poljuben.

f.)

$$\begin{aligned} x+y+2z+3u-v &= 5 \\ x+2y+z+5u-v &= 5 \\ -x+y-4z+2u &= -3 \\ 2x-y+7z-2u &= 6 \end{aligned}$$

Rezultat: $x=-3z+3$, $y=z-2v-4$, $z=$ poljuben, $u=v+2$, $v=$ poljuben.

2. naloga: Dano je vezje. Izračunaj tok I, če so $R_1=\cdots=R_8=1\,\Omega$, $U_1=10\,V$ in $U_2=20\,V$.

Rezultat: $I=3,75\,A$.

3. naloga: Kateremu pogoju morajo zadoščati parametri a, b in c, da bo spodnji sistem enačb rešljiv? Reši sistem za vrednosti parametrov $a=12$, $b=-8$ in $c=-\frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2 &= 4 \\ x_1-4x_2 &= -1 \\ 7x_1+10x_2 &= a \\ 5x_1+6x_2 &= -b \\ 3x_1-16x_2 &= 2c \end{aligned}$$

Rezultat: pogoj: $a=12$, $b=-8$ in $c=-\frac{5}{2}$; rešitev: $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$.

4. naloga: Določi parameter k tako, da bo sistem rešljiv:

$$\begin{aligned} -x-y-z &= -1 \\ -y+3z &= 3 \\ 3x+2y+kz &= 3 \end{aligned}$$

Rezultat: $k \neq 6$; $x = \frac{4(3-k)}{6-k}$, $y = \frac{3(k-3)}{6-k}$, $z = \frac{3}{6-k}$.

Homogeni sistem linearnih enačb

Homogeni sistem lineranih enačb v matrični obliki: $Ax = 0$.

Velja:

i.) Trivialna rešitev $x = (0,0,\ldots,0)^T$ vedno obstaja (ker je $r(A) = r(R)$).

ii.) Kvadratni sistem ima netrivialno rešitev $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$.

iii.) Če je enačb manj kot neznank ($m < n$), netrivialna rešitev vedno obstaja.

iv.) Če sta x in y različni rešitvi homogenega sistema, je tudi $z = \alpha x + \beta y$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) rešitev sistema.

5. naloga: Ali ima homogeni sistem netrivialno rešitev? Če jo ima, jo izračunaj.

$$\begin{aligned} x+3y-2z &= 0 \\ x-8y+8z &= 0 \\ 3x-2y+4z &= 0 \end{aligned}$$

Rezultat: $\det A = 0 \Rightarrow$ sistem ima netrivialno rešitev; $x = -\frac{8}{11}z$, $y = \frac{10}{11}z$, $z =$ poljuben.

MATRIČNE ENAČBE

6. naloga: Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Poišči matriko X, za katero velja $4A - 3X = B$.

Rezultat: $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$.

7. naloga: Reši enačbo $Ax = b$, kjer je $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ in $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Namig: Matrično enačbo $Ax = b$ lahko rešimo, tako da z operacijami, ki ohranjajo rang, prevedemo: $[A|b] \rightsquigarrow [I|x]$.

Rezultat: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

<u>8. naloga</u>: Reši matrično enačbo $AX = B$, kjer sta $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Namig: Matrično enačbo $AX = B$ lahko rešimo, tako da z operacijami, ki ohranjajo rang, prevedemo: $[A|B] \rightsquigarrow [I|X]$.

Rezultat: Enačba nima rešitve ($\det A = 0$).

<u>9. naloga</u>: Reši matrično enačbo $XA = B$, kjer sta $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Namig: Matrično enačbo $XA = B$ najprej transponiramo, da dobimo enačbo $A^T X^T = B^T$.

Rezultat: $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$