8. vaja iz Matematike 2 (VSŠ)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

TAYLORJEVA VRSTA - NADALJEVANJE

1. naloga: S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj vrednost $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ na tri decimalke natančno.

Taylorjeva vrsta funkcije e^x okrog točke 0 je bila

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad |x| < \infty.$$

Ker je

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},$$

iskani približek dobimo, tako da v zgornjo vrsto namesto x vstavimo $-\frac{1}{2}$:

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = 1 + (-\frac{1}{2}) + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(-\frac{1}{2})^4}{4!} + \frac{(-\frac{1}{2})^5}{5!} + \cdots .$$

Zdaj računamo zaporedje delnih vsot:

$$\begin{aligned}
S_0 &= 1, \\
S_1 &= 1 + (-\frac{1}{2}) = 0.5, \\
S_2 &= 1 + (-\frac{1}{2}) + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} = 0.625, \\
S_3 &= 1 + (-\frac{1}{2}) + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3!} = 0.60416..., \\
S_4 &= 1 + (-\frac{1}{2}) + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(-\frac{1}{2})^4}{4!} = 0.60677..., \\
S_5 &= 1 + (-\frac{1}{2}) + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2!} + \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(-\frac{1}{2})^4}{4!} + \frac{(-\frac{1}{2})^5}{5!} = 0.60651...
\end{aligned}$$

Ker je vsak naslednji člen zgornje alternirajoče vrste manjši od prejšnjega, se prva tri decimalna mesta ne bodo več spremenila.

Rezultat: $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 0.606$.

2. naloga: S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj vrednost $\sin \frac{1}{3}$ na tri decimalke natančno.

Rezultat: $\sin \frac{1}{3} \approx 0.327$.

3. naloga:* S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto funkcije $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{n}}$ do vključno potence x^3 izračunajte približno vrednost korena $\sqrt{197}$.

Rezultat: $\sqrt{197} = 14,0356688....$

4. naloga: S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{4x^2}.$$

Rezultat: $\frac{1}{2}$.

Fourierova vrsta

Razvoj funkcije $f(x)$, ki je periodična s periodo T (ali podana na intervalu (t_0, t_0+T)), v Fourierovo vrsto na intervalu (t_0, t_0+T):

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)\right) \\
\omega_0 &= \frac{2\pi}{T} \\
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\cos(n\omega_0 x)\mathrm{d}x \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)\sin(n\omega_0 x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Velja:

- Če je funkcija $f(x)$ soda, je njena Fourierova vrsta sestavljena samo iz kosinusov in konstante ($b_n = 0$).
- Če je funkcija $f(x)$ liha, je njena Fourierova vrsta sestavljena samo iz sinusov ($a_0 = 0$, $a_n = 0$).

Če je funkcija $f(x)$ definirana na intervalu $(0, a)$, jo lahko razvijemo v Fourierovo vrsto kot:

- funkcijo s periodo a – navadna Fourierova vrsta,
- sodo funkcijo s periodo $2a$ – sodo nadaljevanje (kosinusna Fourierova vrsta),
- liho funkcijo s periodo $2a$ – liho nadaljevanje (sinusna Fourierova vrsta).

5. naloga: Razvij funkcijo $f(x) = x^2$ v Fourierovo vrsto na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Rezultat: $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$.

6. naloga: Razvij funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x \leq \pi \\ 0 & ; -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rezultat: $f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right)$.

7. naloga: Razvij funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -2 \leq x < -1, \\ 1 & ; -1 \leq x < 1, \\ 0 & ; 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-2, 2]$.

Rezultat: $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2}$.

8. naloga: Razvij funkcijo $f(x) = x$, ki je dana na intervalu $[0, \pi]$, najprej v sinusno, nato v kosinusno, potem pa še v navadno Fourierovo vrsto.

Rezultat: Sinusna vrsta (liho nadaljevanje):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx,$$

kosinusna vrsta (sodo nadaljevanje):

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos (2n-1)x,$$

navadna Fourierova vrsta (periodična funkcija s periodo π):

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin (2nx).$$

9. naloga:^{DN} Razvij funkcijo $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ v kosinusno Fourierovo vrsto.

Ko funkcijo $f(x)$ razvijemo v kosinusno Fourierovo vrsto na intervalu $[0,\pi]$, dobimo sodo periodično funkcijo s periodo π. Ker je $T=\pi$, je $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=2$:

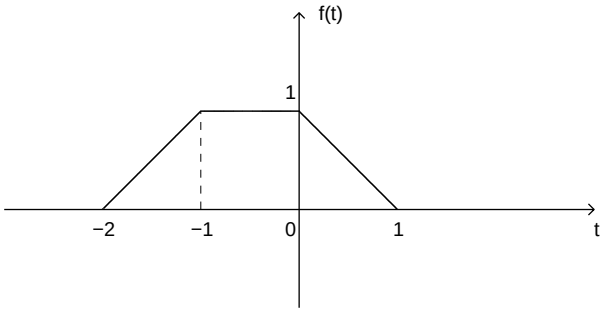
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(x)\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}(1+1) = \frac{2}{\pi}\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(2nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(2nx)\,dx\\
&\quad \left[\textit{uporabimo formulo } \sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))\right]\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin(x-2nx)+\sin(x+2nx))\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin(1-2n)x+\sin(1+2n)x)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{1-2n}\cos(1-2n)x - \frac{1}{1+2n}\cos(1+2n)x\right]_0^\pi\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{1-2n}\cos(\pi-2n\pi) - \frac{1}{1+2n}\cos(\pi+2n\pi) + \frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{1-2n}\cos\pi - \frac{1}{1+2n}\cos\pi + \frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1-2n} + \frac{2}{1+2n}\right) = \frac{4}{(1-4n^2)\pi}\\
b_n &= 0
\end{aligned}
$$

Sledi kosinusna Fourierova vrsta funkcije $f(x)$ na intervalu $[0,\pi]$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4n^2)\pi}\cos(2nx).$$

Rezultat: $f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(1-4n^2)\pi}\cos(2nx)$.

<u>10. naloga:</u>^{DN*} Razvij funkcijo $f(t)$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-2,2]$.



Iz slike razberemo predpis funkcije $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} t+2, & -2 \le t < -1\\ 1, & -1 \le t < 0\\ -t+1, & 0 \le t < 1\\ 0, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Fourierova vrsta funkcije $f(t)$ je periodična funkcija s periodo 4. Dobljena funkcija ne bo ne liha ne soda, zato moramo izračunati tako koeficiente a_n kot tudi koeficiente b_n. Ker je $T = 4$, je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{-1}(t+2)\,dt + \int_{-1}^{0} 1\,dt + \int_{0}^{1}(-t+1)\,dt + \int_{1}^{2} 0\,dt\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left[\frac{t^2}{2}+2t\right]_{-2}^{-1} + [t]_{-1}^{0} + \left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_{0}^{1}\right) = \frac{1}{2} \\
a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\cos(\frac{n\pi t}{2})\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-1}(t+2)\cos(\frac{n\pi t}{2})\,dt + \int_{-1}^{0}\cos(\frac{n\pi t}{2})\,dt + \int_{0}^{1}(-t+1)\cos(\frac{n\pi t}{2})\,dt\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[(t+2)\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi t}{2})\right]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1}\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi t}{2})\,dt + \left[\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi t}{2})\right]_{-1}^{0} + \right. \\
&\quad \left.\left[(-t+1)\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi t}{2})\right]_{0}^{1} + \int_{0}^{1}\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi t}{2})\,dt\right) = \\
&= \frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n) \\
b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\sin(\frac{n\pi t}{2})\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-1}(t+2)\sin(\frac{n\pi t}{2})\,dt + \int_{-1}^{0}\sin(\frac{n\pi t}{2})\,dt + \int_{0}^{1}(-t+1)\sin(\frac{n\pi t}{2})\,dt\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[-(t+2)\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi t}{2})\right]_{-2}^{-1} + \int_{-2}^{-1}\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi t}{2})\,dt + \left[-\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi t}{2})\right]_{-1}^{0} + \right. \\
&\quad \left.\left[-(-t+1)\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi t}{2})\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi t}{2})\,dt\right) = \\
&= -\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Sledi Fourierova vrsta funkcije $f(t)$ na intervalu $[-2, 2]$:

$$
f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\cos(\frac{n\pi t}{2}) - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin(\frac{n\pi t}{2})\right).
$$

Rezultat: $f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\cos(\frac{n\pi t}{2}) - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin(\frac{n\pi t}{2})\right)$.