2. vaja iz Matematike 2 (VSŠ)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

VEKTORJI - NADALJEVANJE

Vektorski produkt

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\
\vec{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\
\hline
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, -(a_1 b_3 - a_3 b_1), a_1 b_2 - a_2 b_1)
\end{aligned}
$$

Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor, za katerega velja:

i.) [smer] $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$ in pravilo desnega vijaka (vektorski produkt ima smer, v katero bi se pomaknil desni vijak, če bi ga zavrteli od $\vec{a}$ do $\vec{b}$ po najbližji poti),

ii.) [dolžina] dolžina $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$: antikomutativnost

$\vec{a} \times \vec{a} = 0$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

Velja: $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$.

<u>1. naloga</u>: Izračunaj vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ in $\vec{b} = -\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$.

Rezultat: $\vec{a} \times \vec{b} = (7, -8, 13), \vec{b} \times \vec{a} = (-7, 8, -13)$.

<u>2. naloga</u>: Izračunaj ploščino paralelograma, ki ga oklepata vektorja $\vec{a} = 6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ in $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$.

Rezultat: 49.

3. naloga: Izračunaj ploščino trikotnika z oglišči $A(1,0,1)$, $B(2,2,1)$ in $C(4,-3,-2)$.

Rezultat: $\frac{3}{2}\sqrt{14}$.

4. naloga: Poišči vektor dolžine 1, ki je pravokoten na vektorja $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ in $\vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$. Koliko rešitev ima naloga?

Rezultat: $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$.

5. naloga: Kolikšna je ploščina paralelograma, ki ga določata vektorja $2\vec{a} + 4\vec{b}$ in $\vec{a} - 3\vec{b}$, če je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, kot med $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa je $\frac{\pi}{6}$?

Rezultat: 20.

6. naloga: Poenostavi izraz $\vec{\imath} \times (\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}) - \vec{\jmath} \times (\vec{\imath} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + \vec{k} \times \vec{\imath}$!

Rezultat: $-2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$.

Mešani produkt

$$\begin{array}{rcl} \vec{a} & = & (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b} & = & (b_1, b_2, b_3) \\ \vec{c} & = & (c_1, c_2, c_3) \\ \hline (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) & = & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{array}$$

Absolutna vrednost mešanega produkta $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ predstavlja volumen paralelepipeda, ki ga vektorji napenjajo.

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so komplanarni

7. naloga: Izračunaj volumen paralelepipeda, ki ga oklepajo vektorji $\vec{a} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$ in $\vec{c} = 4\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Rezultat: 23.

8. naloga: Izračunaj prostornino tristrane piramide z oglišči $A(1,-1,2)$, $B(4,3,2)$, $C(4,4,4)$ in $D(1,5,-1)$!

Namig: $V_{piramide} = \frac{1}{6} V_{paralelepipeda}$.
Rezultat: $V = \frac{15}{2}$.

9. naloga: Dani so vektorji $\vec{a} = (\lambda, 1, 4)$, $\vec{b} = (1, -2\lambda, 0)$ in $\vec{c} = (3\lambda, -3, 4)$. Določi parameter λ tako, da bodo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ komplanarni!

Rezultat: $1, -1$.

10. naloga:[DN] Pokaži, da vektorji $\vec{a} = (m, 1, 1)$, $\vec{b} = (m+2, 1, 1)$ in $\vec{c} = (-m, 1, -1)$ za nobeno vrednost parametra m ne ležijo v isti ravnini.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m+2 & 1 & 1 \\ -m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Rezultat: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 4 \neq 0 \Rightarrow$ vektorji so nekomplanarni

Vektorji v ravnini in prostoru

11. naloga: Dan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$. Označimo $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{BC}$. Izrazi z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorje $\vec{AC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, $\vec{BE}$, $\vec{AE}$, $\vec{BF}$ in $\vec{DF}$!

Rezultat: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{AD} = 2\vec{b}$, $\vec{BE} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$, $\vec{AE} = 2\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{BF} = \vec{b} - 2\vec{a}$, $\vec{DF} = -\vec{a} - \vec{b}$.

12. naloga: Izračunaj ploščino in notranje kote trikotnika z oglišči $A(5,4,2), B(0,7,-5)$ in $C(3,-2,1)$.

Rezultat: $p = \frac{9}{2}\sqrt{42}, \alpha = 90°59', \beta = 34°46', \gamma = 54°15'$.

13. naloga: Dana so tri oglišča paralelograma $ABCD$: $A(1,-2,0)$, $B(2,1,3)$ in $C(-2,0,5)$. Izračunaj oglišče D, ploščino paralelograma in dolžino diagonale BD.

Rezultat: $D(-3,-3,2)$, $p = \sqrt{398}$, $|\vec{BD}| = \sqrt{42}$.

14. naloga: Dan je trikotnik z oglišči $A(2,0,1)$, $B(1,-2,3)$ in $C(0,4,2)$. Določi težišče T trikotnika, vektor z začetkom v razpolovišču S stranice AB in koncem v težišču, ploščino trikotnika ter višino skozi oglišče C.

Rezultat: $T(1, \frac{2}{3}, 2)$, $S(\frac{3}{2}, -1, 2)$, $\vec{ST} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}, 0)$, $p = \frac{\sqrt{173}}{2}$, $v_c = \frac{\sqrt{173}}{3}$.

15. naloga: Dana so oglišča tristrane piramide $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$ in $D(3,7,2)$. Izračunaj vektor višine skozi oglišče A.

Rezultat: $\vec{v} = \frac{4}{17}(11, 10, 17)$.