6. VAJA IZ MATEMATIKE 2 (VSŠ)

avtorica: Melita Hajdinjak

datum: Ljubljana, 2009

VEKTORSKI PROSTORI IN LINEARNE PRESLIKAVE

LINEARNA NEODVISNOST VEKTORJEV

Množica vektorjev $x_1, \ldots, x_n \in V$ je linearno neodvisna, če velja:

$$\underbrace{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}_{\text{linearna kombinacija}} = 0 \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Sledi:

- če $\det A = 0$, so vektorji linearno *odvisni*,
- če $\det A \neq 0$, so vektorji linearno *neodvisni*,

kjer matriko A dobimo tako, da dane vektorje zložimo v stolpce.

1. naloga: Ali so dani vektorji $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ linearno neodvisni?

Rezultat: $\det A = 6 \neq 0$: vektorji so linearno neodvisni.

2. naloga: Ali so dani vektorji $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 11 \end{bmatrix}$ linearno neodvisni? Če niso, tj. vce so odvisni, zapiši drugi vektor kot linearno kombinacijo prvega in tretjega vektorja.

Rezultat: $\det A = 0$: vektorji so linearno odvisni; $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 11 \end{bmatrix}$.

BAZA VEKTORSKEGA PROSTORA

Baza imenujemo vsako največjo množico linearno neodvisnih vektorjev. Število vektorjev v bazi je enako dimenziji vektorskega prostora.
Standardna baza v prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{e_1} = [1, 0, \ldots, 0]^T, \vec{e_2} = [0, 1, 0, \ldots, 0]^T, \ldots, \vec{e_n} = [0, 0, \ldots, 1]^T.$$

Vsak vektor danega vektorskega prostora lahko zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev!

3. naloga: Pokaži, da vektorji $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tvorijo bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$. Nato zapiši vektor $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ kot linearno kombinacijo vektorjev x_1, x_2 in x_3.

Rezultat: $\det A = 9 \neq 0$: vektorji so linearno neodvisni, ker so trije, tvorijo bazo $\mathbb{R}^3$; $y = x_1 + x_2 + x_3$.

Linearne preslikave

Preslikavo $\mathcal{T} : U \to V$ imenujemo linearna preslikava med vektorskima prostoroma U in V, če velja:

$$\mathcal{T}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\mathcal{T}(\vec{x}) + \beta\mathcal{T}(\vec{y}).$$

Bazni vektorji $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ prostora U se z linearno preslikavo $\mathcal{T}$ preslikajo v bazne vektorje $\mathcal{T}(\vec{e_1}), \ldots, \mathcal{T}(\vec{e_n})$ prostora V.

Linearno preslikavo $\mathcal{T}$ predstavimo z matriko T, katere stolpci so $\mathcal{T}(\vec{e_1}), \ldots, \mathcal{T}(\vec{e_n})$. Sliko vektorja $\vec{x}$ tedaj dobimo tako, da matriko z njim pomnožimo: $\mathcal{T}(\vec{x}) = T \cdot \vec{x}$.

4. naloga: Določi sliko vektorja $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ z linearno preslikavo, ki jo določa matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Rezultat: $y = Ax = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$.

5. naloga: Linearna preslikava preslika standardne bazne vektorje v vektorje $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. V kateri vektor se preslika vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$? Kateri vektor se preslika v vektor $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$?

Rezultat: $y = Ax = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

<u>6. naloga</u>:* Poišči matriko linearne preslikave, ki preslika vektorje $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ v vektorje $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Določi še sliko vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Rezultat: $A = \begin{bmatrix} -45 & -32 & 28 \\ -8 & -5 & 5 \\ -37 & -25 & 21 \end{bmatrix}$, $A \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} -58 \\ -11 \\ -49 \end{bmatrix}.$

LASTNE VREDNOSTI IN LASTNI VEKTORJI

Lastni vektor kvadratne matrike $A^{n\times n}$ je neničelni vektor $x \neq 0$, za katerega velja:

$$Ax = \lambda x,$$

kjer je λ skalar in ga imenujemo *lastna vrednost*. Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma matrike A, torej rešitve enačbe

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti λ, dobimo kot netrivialne rešitve homogenega sistema:

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

<u>7. naloga</u>: Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Rezultat: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

<u>8. naloga</u>: Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Rezultat: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

9. naloga:* Določi parameter a, tako da bo 0 lastna vrednost matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rezultat: $a = -\frac{3}{4}$.

POTENČNE VRSTE

Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

Konvergenčni radij (polmer) potenčne vrste izračunamo takole:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Potenčna vrsta je

- enakomerno in absolutno konvergentna, če je $|x-a| < R$, in
- divergentna, če je $|x-a| > R$.

Če je $|x-a| = R$, to je v primerih $x = a+R$ in $x = a-R$, konvergenco preverimo kot konvergenco številske vrste.

Spomnimo se kriterijev za konvergenco številske vrste.

a.) Vrste s pozitivnimi členi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0$:
  - Kvocientni kriterij: $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, za $q < 1$ konvergira, za $q > 1$ divergira,
  - Korenski kriterij: $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, za $q < 1$ konvergira, za $q > 1$ divergira,
  - Primerjalni kriterij: $0 \leq a_n \leq b_n$ za $n \geq n_0$
    - $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergira $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira,
    - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergira $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergira.

b.) Alternirajoče vrste $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,\ a_n \geq 0$:
  - Leibnitzov kriterij: Alternirajoča vrsta konvergira, če zaporedje a_n od nekje naprej pada proti 0.

10. naloga: Določi konvergenčno območje potenčnih vrst:

a.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+4}$

Rezultat: $R = 1$, območje konvergence: $[-2, 0)$.

b.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} x^n$

Rezultat: $R = 0$, območje konvergence: $\{0\}$.

c.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-3)^n$

Rezultat: $R = 1$, območje konvergence: $(2, 4]$.