

6. MERILNI MOSTIČI IN KOMPENZATORJI

Pri meritnih mostičih in kompenzatorjih **primerjamo neznano veličino z znano**.

- Dosegajo se **velike točnosti** merjenja.

Wheatstonov mostič:

- ohmske upornosti,

Izmenični mostič:

- induktivnosti,
- medsebojne induktivnosti,
- kapacitivnosti,
- faktor izgub,
- frekvence itn.

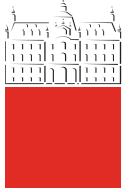
Enosmerni kompenzator:

- enosmerne napetosti,

Izmenični kompenzator:

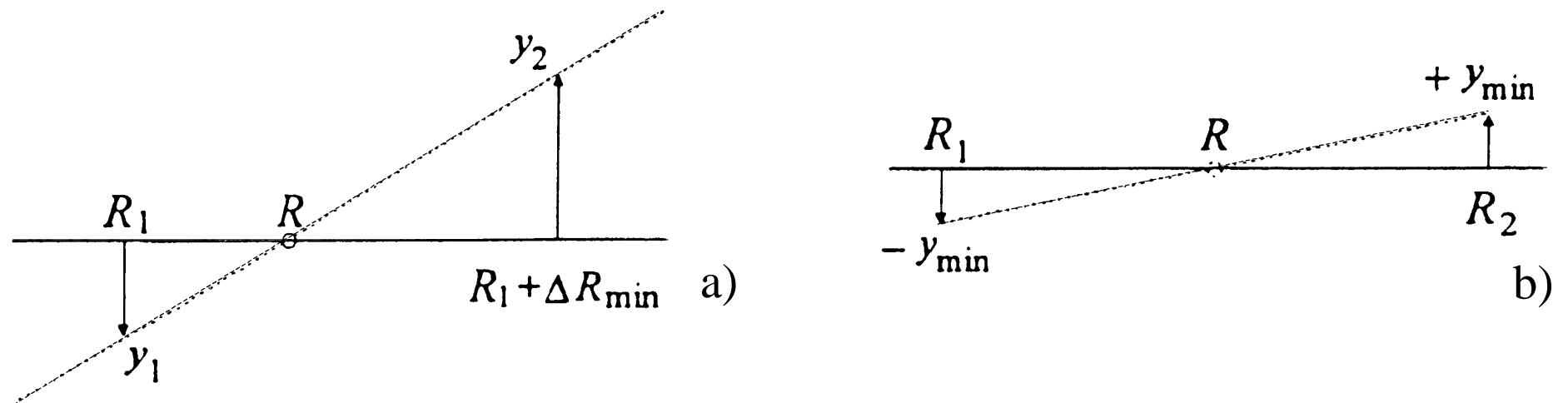
- izmenične napetosti.





Z odklonskim instrumentom – **ničelnim indikatorjem** – le ugotavljamo izenačenje - **ravnovesno stanje**.

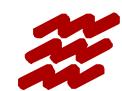
- ni potrebna točnost temveč zadostna **občutljivost!**

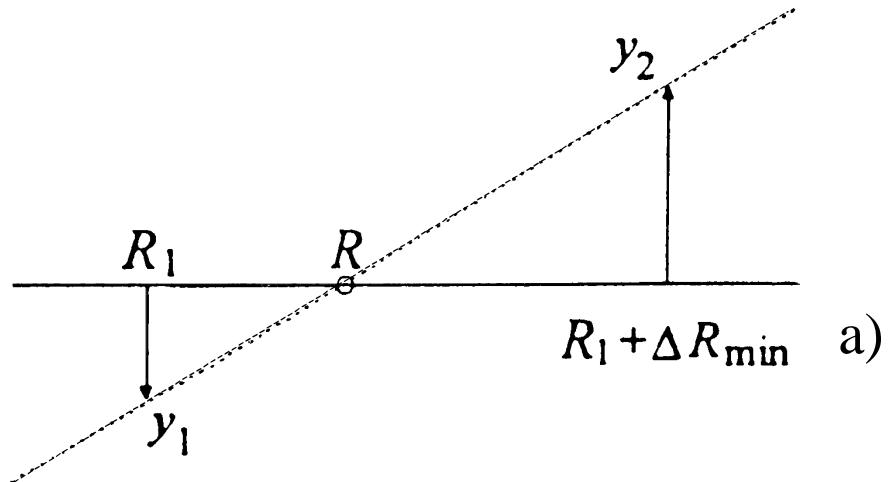
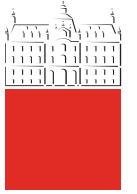


Slika 6.1 Prevelika in premajhna občutljivost

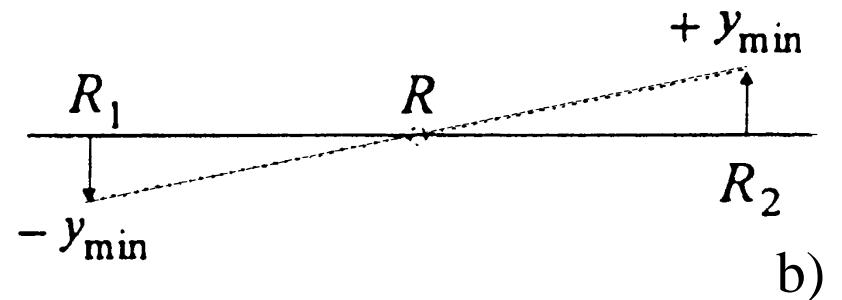
Če je **občutljivost prevelika**, težko vzpostavimo ravnoščje – z **linearno interpolacijo**:

$$\frac{R - R_1}{y_1} = \frac{\Delta R_{\min}}{y_1 + y_2} \Rightarrow R = R_1 + \frac{y_1}{y_1 + y_2} \Delta R_{\min}$$





a)



b)

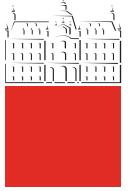
Slika 6.1 Prevelika in premajhna občutljivost

Če je **občutljivost premajhna**, ne zaznamo majhnih sprememb (npr. $(\Delta R)_q \approx R_2 - R_1$ - v ravnovesju).

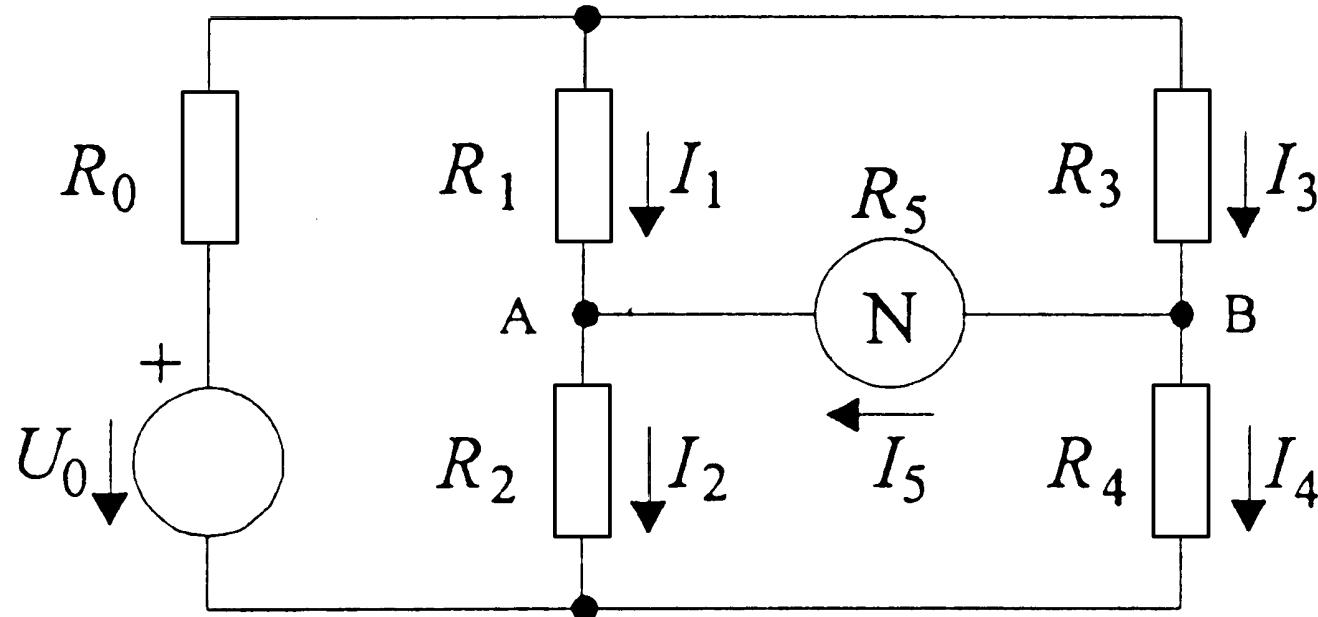
- **ločljivost naprave in standardna negotovost:**

$$u(R)_q = \frac{(\Delta R)_q}{2\sqrt{3}} \quad - \text{čim manjša proti } u_c(R_x)$$





6.1 Wheatstonov mostič

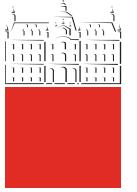


Slika 6.2 Wheatstonov mostič

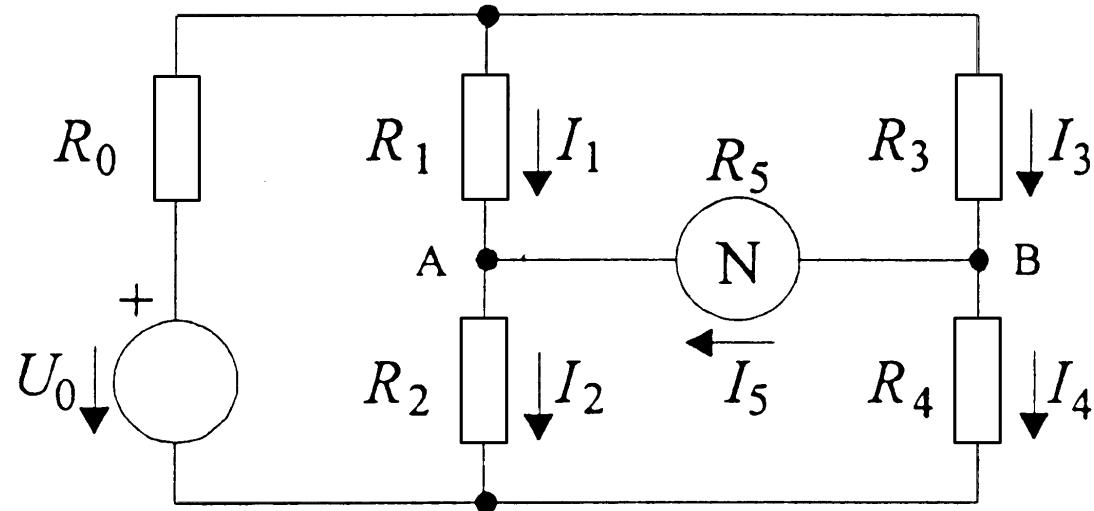
Sestavlja ga:

- **štirje** v zanko vezani **upori**,
- v eno **diagonalo** je priključen enosmerni napetostni (tokovni) **vir**,
- v drugo pa **ničelni indikator**.





Uravnovešen Wheatstonov mostič

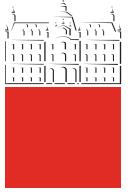


Če v diagonali A-B ne teče tok $I_5 = 0$, je mostič v ravovesju:

- enakost napetosti: $I_1R_1 - I_3R_3 = 0$ in $I_2R_2 - I_4R_4 = 0$
- enakost tokov: $I_1 = I_2$ in $I_3 = I_4$

Ravovesna enačba: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ ali $R_1R_4 = R_2R_3$

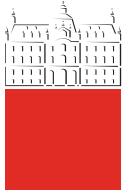




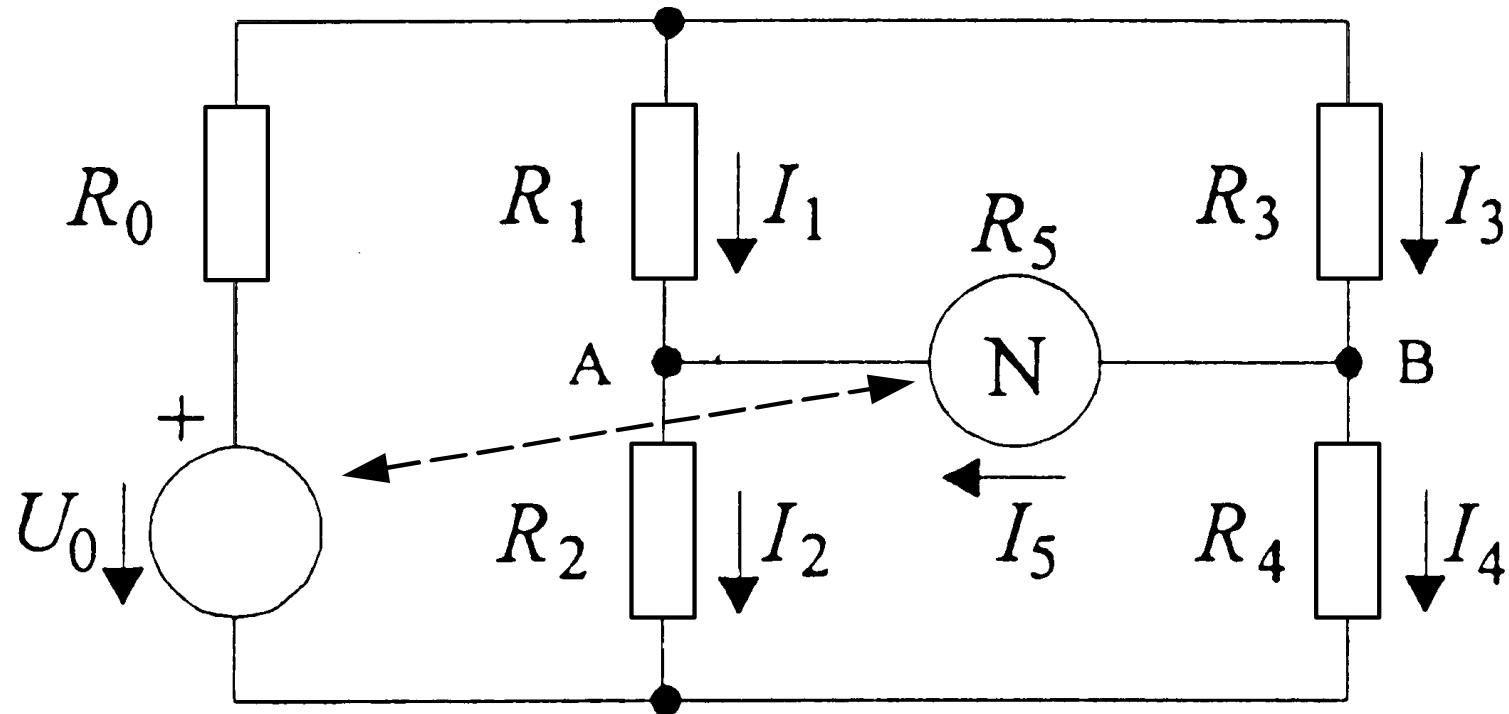
Lastnosti uravnovešenega Wheatstonovega mostiča:

- ena od štiri uporosti je **merjena veličina** (ponavadi R_1),
 - poznati moramo R_2 in **stalno razmerje** R_3 in R_4 :
$$R_1 = R_2 \left(\frac{R_3}{R_4} \right)$$
 - ali R_3 in stalno razmerje R_2 in R_4 :
$$R_1 = R_3 \left(\frac{R_2}{R_4} \right)$$
- notranja napetost U_0 in upornost R_0 napajlnega vira **ne vplivata na ravovesje**,

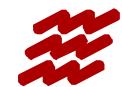


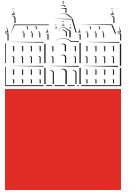


- če je mostič v ravnovesju, je v **ravnovesju tudi mostič z zamenjanima položajema napetostnega vira in ničelnega indikatorja.**



Slika 6.2 Wheatstonov mostič





Odklonski Wheatstonov mostič

Odklon indikatorja je sorazmeren merjeni veličini.

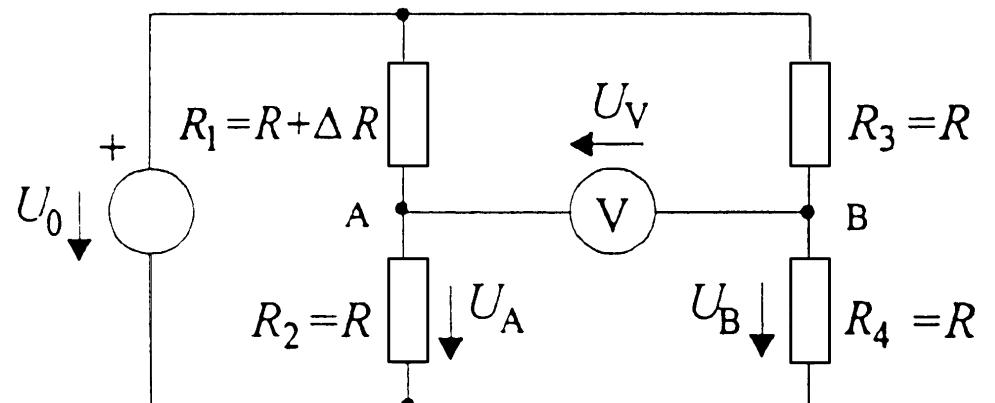
- pretvornik merjene veličine v enosmerno napetost,

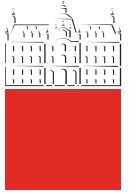
Uporabljam ga za kontinuirno merjenje spremenljivih uporov:

- uporovni lističi za merjenje sile,
- uporovni termometri itn.

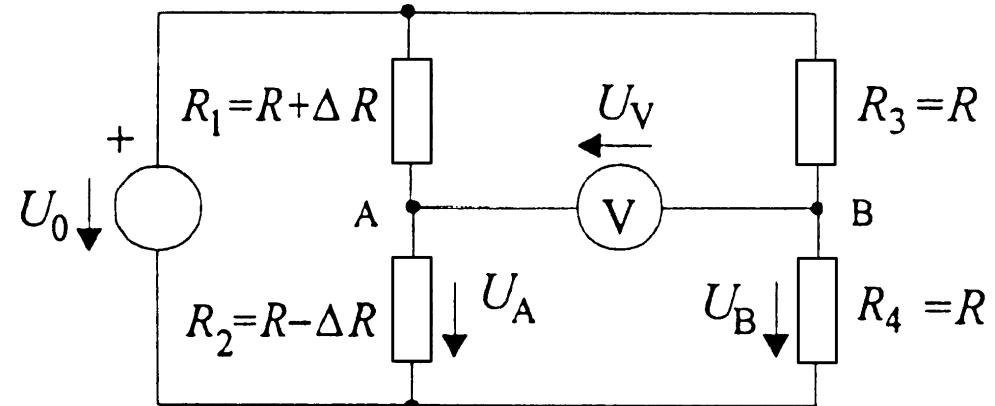
Štirje tipi odklonskega mostiča:

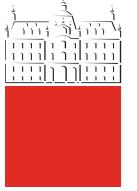
- četrtrinski,
 - spreminja se upornost ene veje,



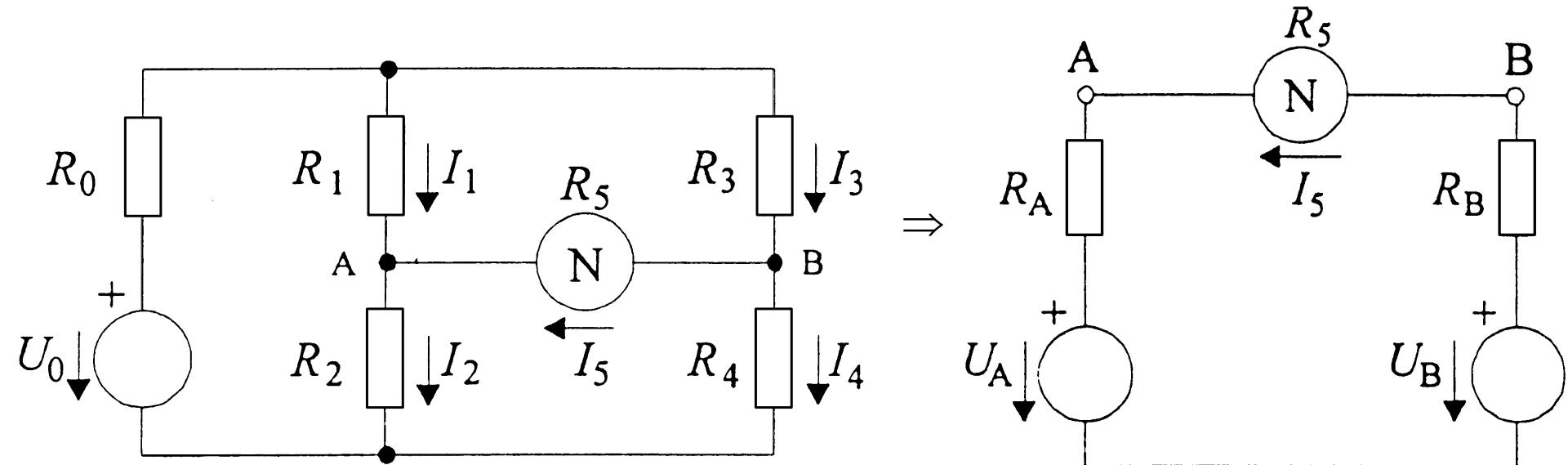


- **dvočetrtinski**,
 - spremenjata se upora dveh nasprotnih vej v istem smislu: (R_1 in R_4 ali R_2 in R_3)
- **polovični**,
 - spremenjata se upora dveh **sosednih** vej:
 R_1 in R_2 ali R_3 in R_4
v nasprotnem smislu:
$$\Delta R_1 = -\Delta R_2$$
- **polni mostič**:
 - spreminja se vsi štirje upori:
 - **diametalna dva v isto smer** in **druga diametalna dva v nasprotno smer**.





Navadno je **upornost voltmetra** zelo **velika** in je **izhodna napetost**: $U_V = U_B - U_A = U_0 \frac{R_4}{R_3 + R_4} - U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

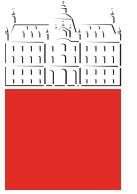


Slika 6.4 Nadomestno vezje za mostič z idealnim napetostnim virom

Nadomestni napetosti sta:

$$U_A = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} ; \quad U_B = U_0 \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$





Diagonalna (izhodna) napetost mostiča pri pogoju $R_5 \gg R_1, R_2, R_3, R_4$! je:

$$U_v = U_0 \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

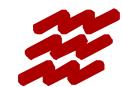
Četrtninski mostič:

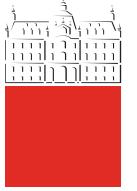
- če so v izhodišču vse štiri **upornosti enake**, je izhodna napetost **četrtninskega** mostiča:

$$U_v = U_0 \frac{(R + \Delta R)R - R^2}{(2R + \Delta R)2R} \quad \text{oz.} \quad U_v = \frac{1}{4} U_0 \frac{\Delta R/R}{1 + \frac{1}{2} \Delta R/R}$$

- če so **spremembe majhne**, je **linearna odvisnost**:

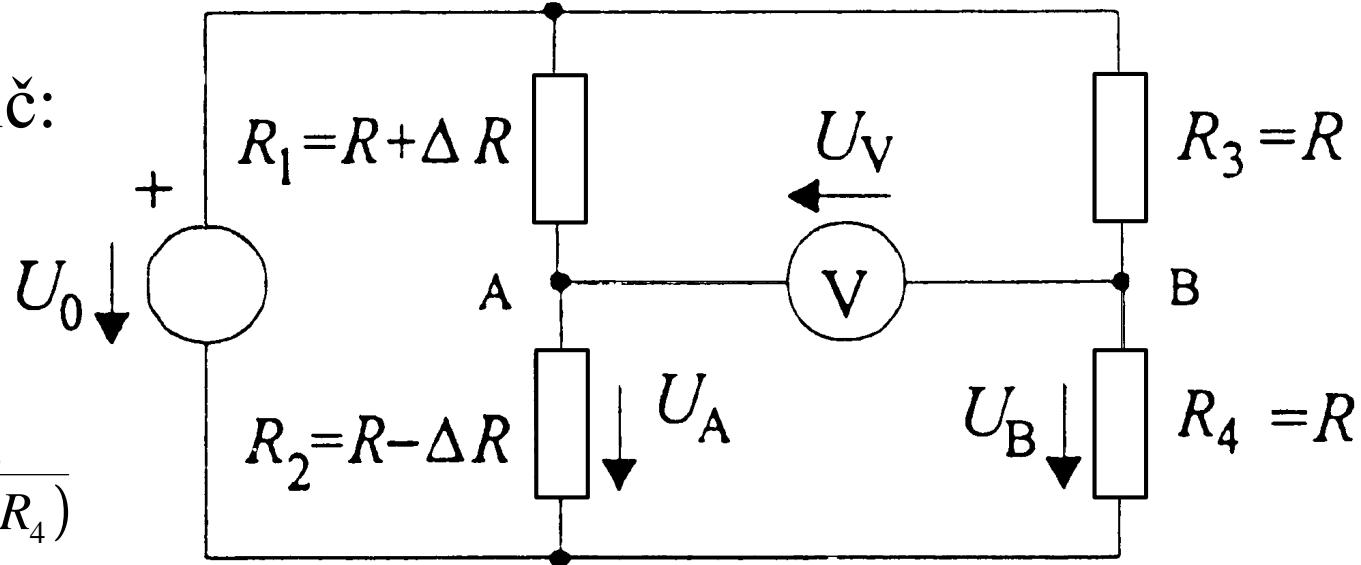
$$\frac{\Delta R}{R} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad U_v \approx \frac{1}{4} U_0 \frac{\Delta R}{R}$$





Polovični mostič:

$$U_v = U_0 \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$



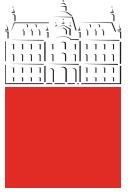
Slika 6.3b Odklonski polovični Wheatstonov mostič

- Dobimo **linearno karakteristiko** neodvisno od spremebe upornosti:

$$U_5 = U_0 \frac{(R + \Delta R) R - R (R - \Delta R)}{(R + \Delta R + R - \Delta R) (R + R)} \Rightarrow U_v = \frac{1}{2} U_0 \frac{\Delta R}{R}$$

Če uporabljamо za napajanje mostičev tokovni vir (tok mostičа \$I_0\$ je stalen), se **linearost mostičev izboljša!**



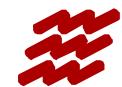


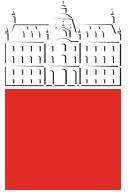
Občutljivost in ločljivost mostiča

Občutljivost je **definirana** kot:

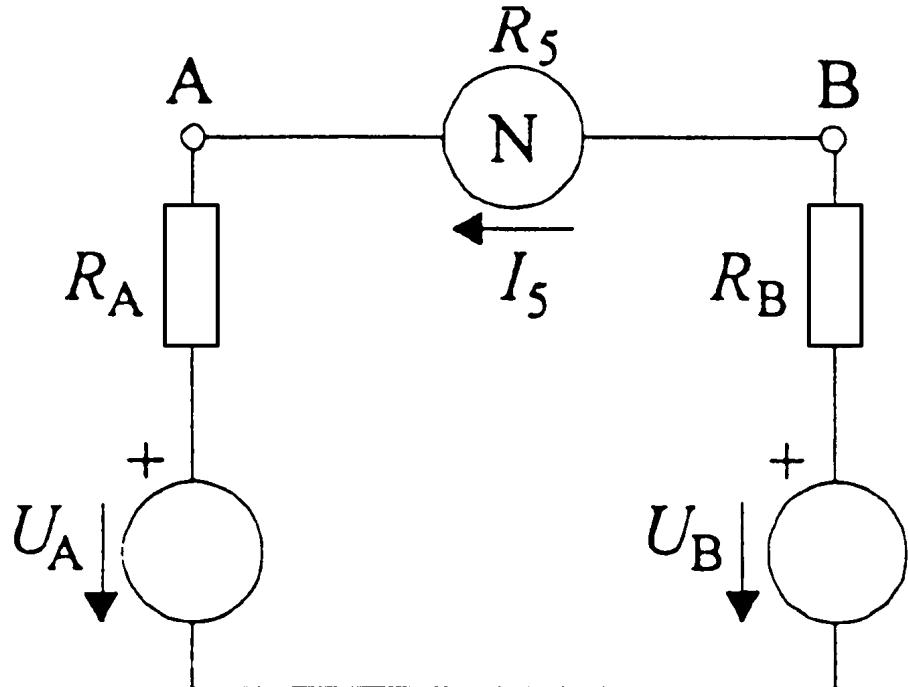
- **spremembu izhodne veličine** (npr. tok ničelnega indikatorja) **glede na relativno spremembo vhodne veličine** (relativna spremembu merjene upornosti):

$$S = \frac{\Delta I_5}{\Delta R_1 / R_{10}}$$





Tok I_5 ničelnega indikatorja



Nadomestni napetosti sta:

$$U_A = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad U_B = U_0 \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

Nadomestni upornosti sta:

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad R_B = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

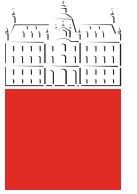
Slika 6.4 Nadomestno vezje za mostič z idealnim napetostnim virom

Tok ničelnega indikatorja z R_5 :

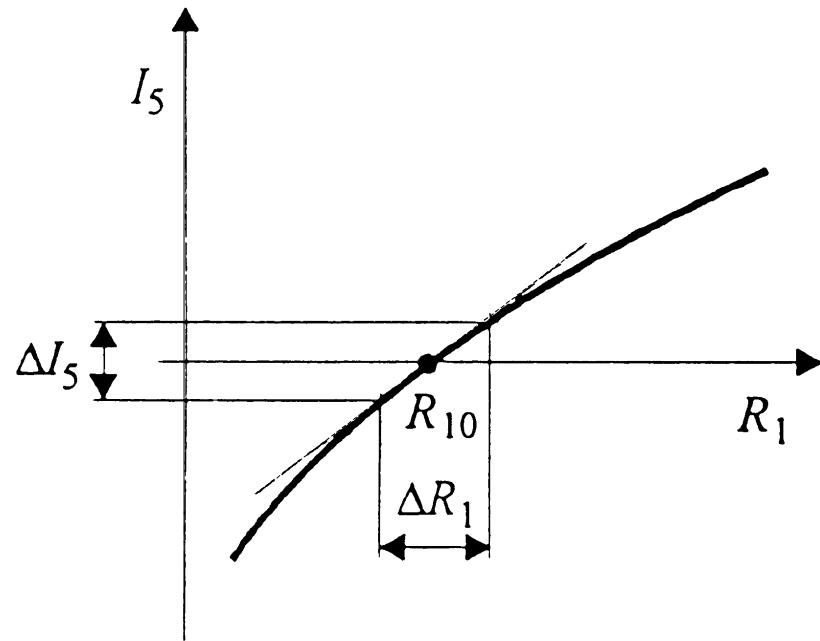
$$I_5 = \frac{U_B - U_A}{R_A + R_B + R_5} \Rightarrow$$

$$I_5 = U_0 \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2) + R_5 (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

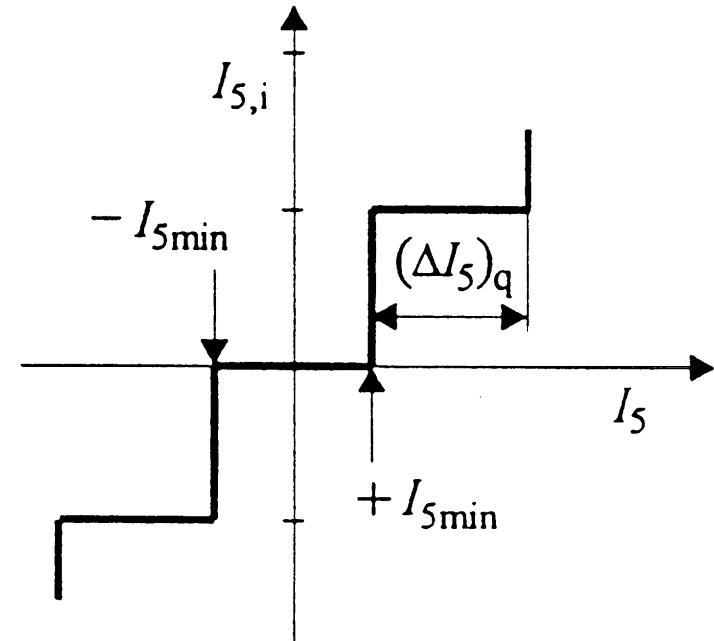




Spreminjanje toka I_5 v odvisnosti od R_1 v ravovesni legi:



a)



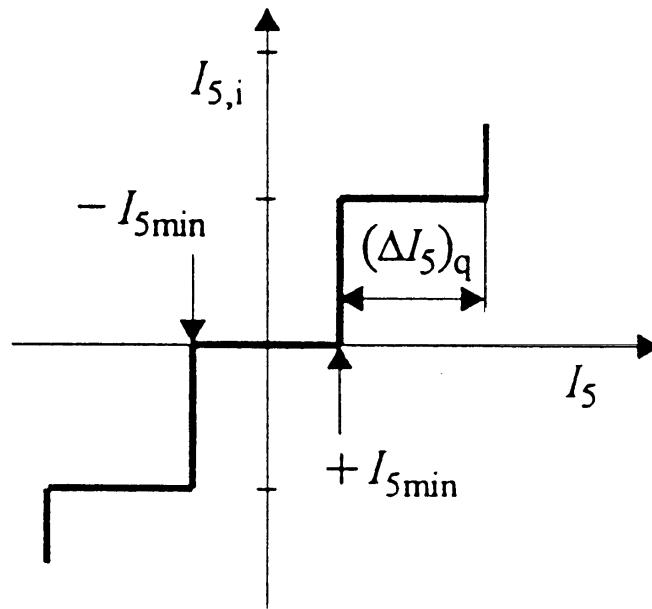
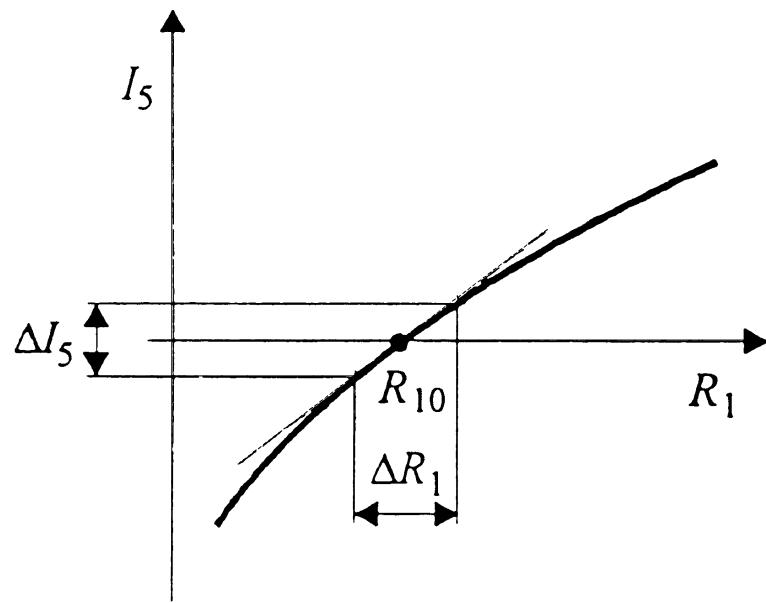
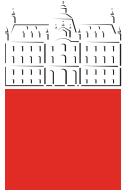
b)

Slika 6.5 Tok ničelnega indikatorja v odvisnosti od upornosti R_1 in njegova ločljivost

Če je tok $I_5 = 0$, je **ravnovesje**:

$$R_1 = R_{10} = \frac{R_2 R_3}{R_4}$$



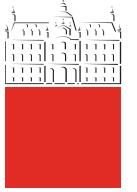


Sprememba toka v ravnovesni legi:

$$\left(\frac{dI_5}{dR_1} \right)_{R_{10}} = \frac{U_0 R_4}{R_{10} R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_{10} + R_2) + R_5 (R_{10} + R_2)(R_3 + R_4)}$$

$$\frac{\Delta I_5}{\Delta R_1} = \frac{U_0}{R_{10} [R_{10} + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 (R_{10}/R_2 + 2 + R_2/R_{10})]}$$





Občutljivost mostiča v okolici ravnovesne lege:

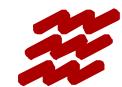
$$S = \frac{\Delta I_5}{\Delta R_1 / R_{10}} = \frac{U_0}{R_{10} + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 (R_{10} / R_2 + 2 + R_2 / R_{10})}$$

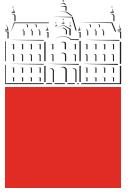
- **odvisna** od:
 - **napetosti** U_0 ,
 - in **vseh upornosti** mostiča vključno z R_5

Kolikšna relativna upornost $\Delta R_1 / R_{10}$ spremeni tok ničelnega indikatorja za ΔI_5 ?

in obratno:

Kako veliko relativno spremembo upornosti zaznamo s sprememboto ka ničelnega indikatorja za ΔI_5 ?





$$\frac{\Delta R_1}{R_{10}} = \frac{\Delta I_5}{U_0} \left[R_{10} + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \left(\frac{R_{10}}{R_2} + 2 + \frac{R_2}{R_{10}} \right) \right]$$

Če je ΔI_5 enaka ločljivosti ničelnega indikatorja $(\Delta I_5)_q$, dobimo (relativno) ločljivost Wheatstonovega mostiča:

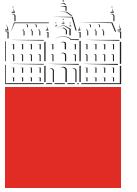
$$\delta_q = \frac{(\Delta R_1)_q}{R_{10}} = \frac{(\Delta I_5)_q}{U_0} \left[R_{10} + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \left(\frac{R_{10}}{R_2} + 2 + \frac{R_2}{R_{10}} \right) \right]$$

- napetosti U_0 ,
- odvisna od:
 - vseh upornosti mostiča vključno z R_5 ,
 - in ločljivosti ničelnega indikatorja!

Iz ločljivosti mostiča izvira (relativna) standardna negotovost:

$$w(R_1)_q = \frac{u(R_1)_q}{R_{10}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{(\Delta R_1)_q}{R_{10}}$$





Ali drugače izpeljano:

- če ne zaznamo manjšega toka kot $\pm I_{5\text{min}}$ imamo v poleg $R_1 = R_2R_3/R_4$ še nek majhen delež $(\Delta R_1)_q$ zaradi **ločljivosti** ničelnega indikatorja $(\Delta I_5)_q$

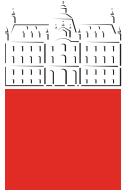
$$R_1 = \frac{R_2R_3}{R_4} + (\Delta R_1)_q$$

$$R_1 = \frac{R_2R_3}{R_4} + \frac{(\Delta I_5)_q}{U_0 R_4} [R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2) + R_5 (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)]$$

$R_1 = R_2R_3/R_4$ je ideal, ki se mu z eksperimentom samo približamo (ker $(\Delta I_5)_q$ ni nič, tudi $(\Delta R_1)_q$ ni nič!)

- vzpostavimo le **približno ravnovesje mostiča**





Ločljivost lahko izrazimo tudi z **mostičnimi razmerji**:

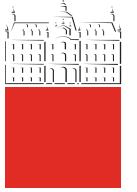
$$\left. \begin{array}{l} R_2 = mR_{10}, \\ R_3 = nR_{10}, \end{array} \right\} \Rightarrow R_4 = mnR_{10} ,$$

$$R_5 = pR_{10}$$

Ločljivost mostiča:

$$\delta_q = \frac{(\Delta I_5)_q}{U_0} R_{10} [1 + m + n + mn + p(m^{-1} + 2 + m)]$$

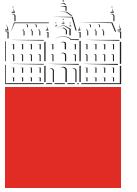




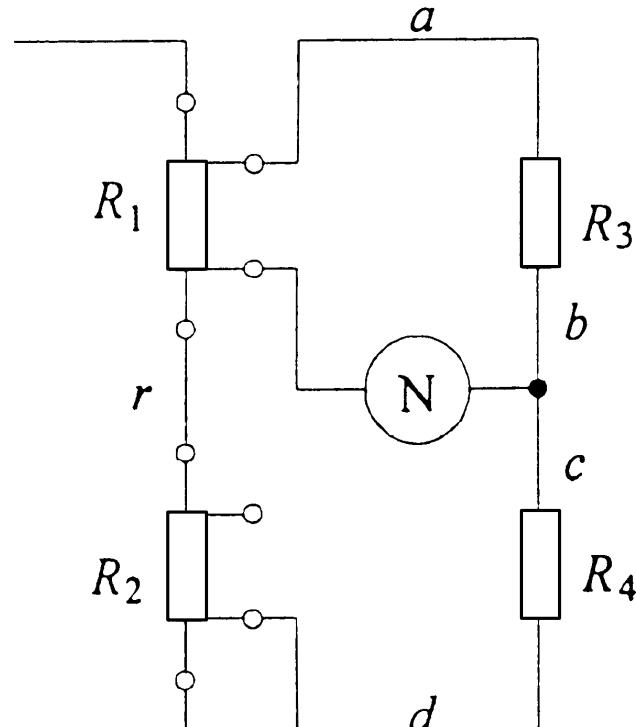
Merilno območje Wheatstonovega mostiča:

- **zgornja meja:** $\approx 10 \text{ M}\Omega$,
 - z uporabo elektronskih ničelnih indikatorjev – večja občutljivost - se lahko zviša do $\approx 1 \text{ G}\Omega$,
- **spodnja meja:** $\approx 0,1 \Omega$,
 - odvisna od upornosti veznih žic.

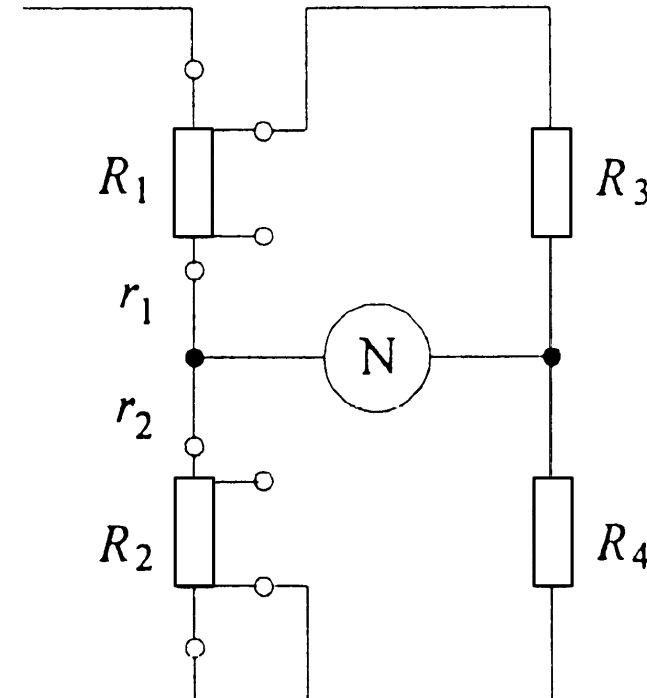




Primer znižanja spodnje meje na $\approx 0,01\Omega$:



a)

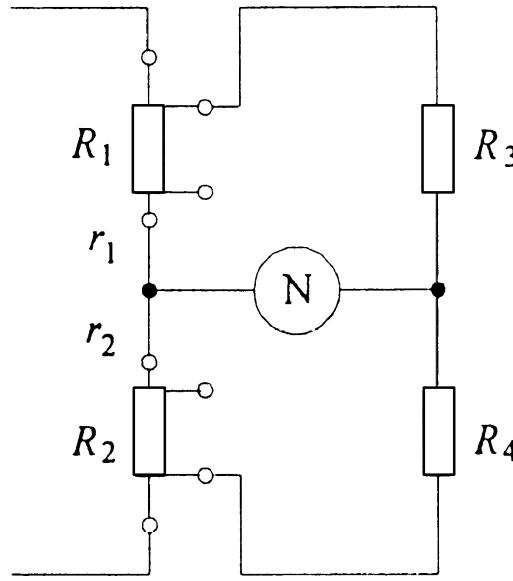
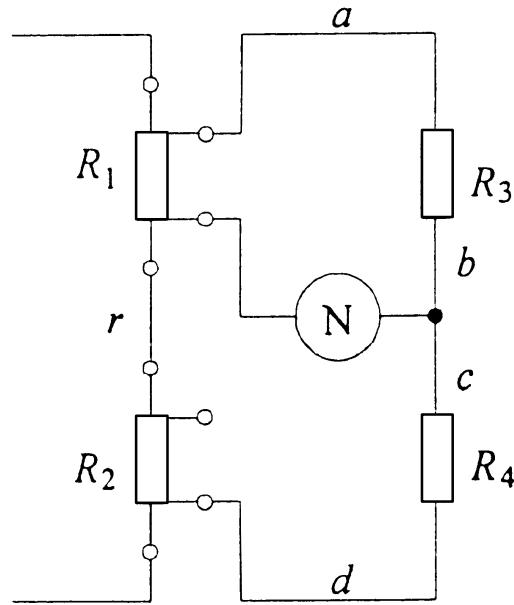
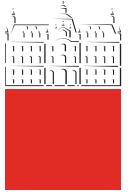


b)

Slika 6.6 Na spodnji meji merilnega območja

Mostič (a) je v ravnovesju pri: $R_1 = (R_2 + r) \frac{R_3 + a + b}{R_4 + c + d}$





$$R_1 = (R_2 + r) \frac{R_3 + a + b}{R_4 + c + d}$$

- če želimo **upore veznih žic zanemariti**, mora veljati:

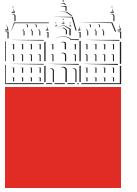
$$R_2 \gg r, \quad R_3 \gg a + b \quad \text{in} \quad R_4 \gg c + d$$

- $R_3, R_4 > 100\Omega \gg (a+b), (c+d) \approx 10m\Omega$

- ker je $R_2 \approx R_1$, upornost r **ni zanemarljiva**,

- razbijemo jo v **dva dela**: $r_1 : r_2 = R_3 : R_4$

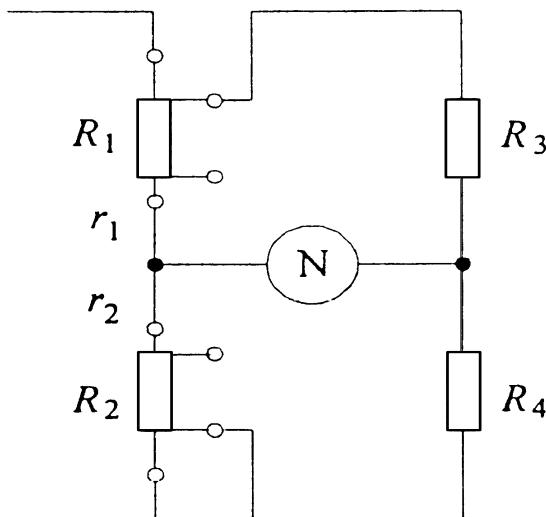
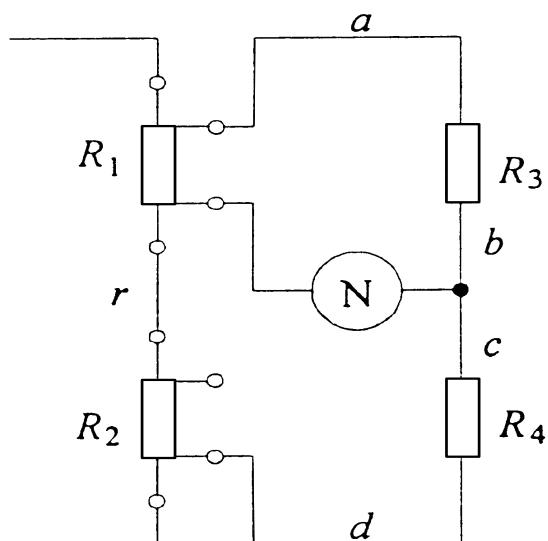




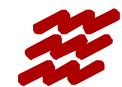
Ravnovesna enačba: $R_1 + r_1 = (R_2 + r_2) \frac{R_3}{R_4}$

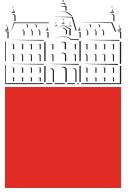
OZ.: $R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4} + r_2 \left(\frac{R_3}{R_4} - \frac{r_1}{r_2} \right) \rightarrow = R_2 \frac{R_3}{R_4}$

$$\left(\frac{R_3}{R_4} - \frac{r_1}{r_2} \right) \rightarrow 0$$



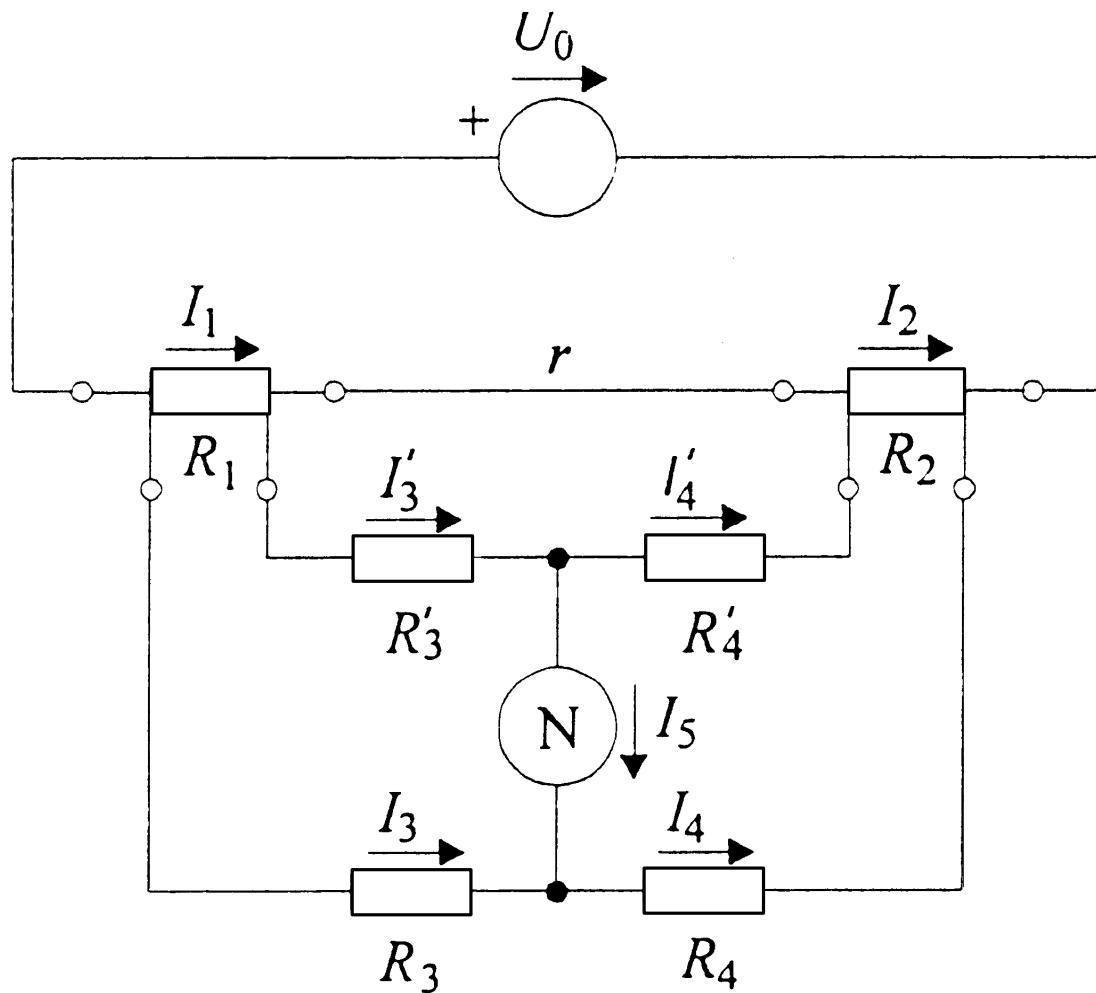
Ta ideja je realizirana z **dvojnim mostičem**, ki ga je vpeljal **Thomson** (kasneje **lord Kelvin**).





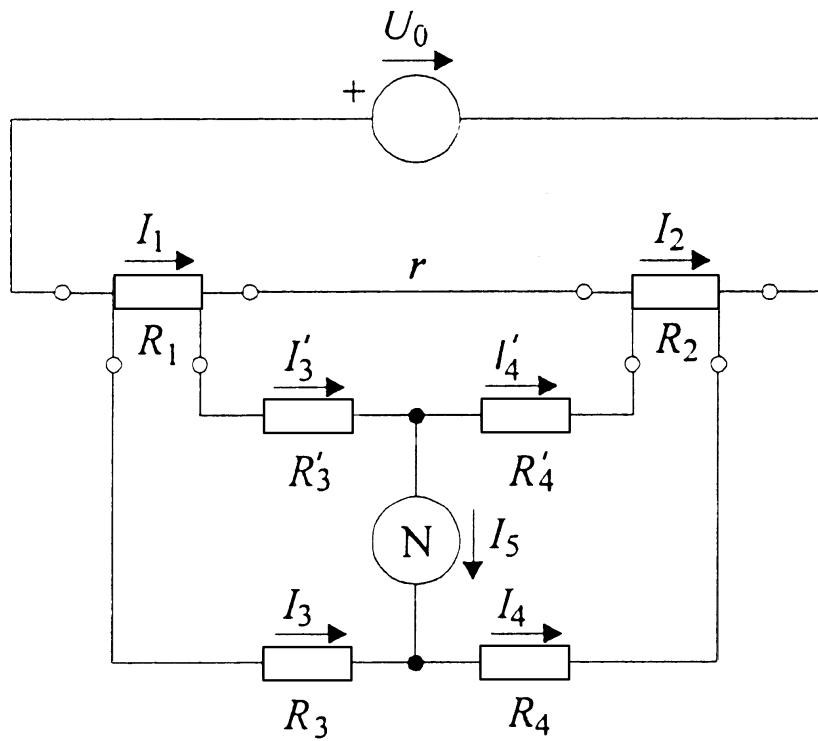
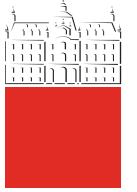
6.2 Thomsonov (Kelvinov) mostič

Uporablja se za merjenje upornosti **od $0,1\mu\Omega$ do 1Ω** .



Slika 6.7 Thomsonov
(Kelvinov) mostič





Ravnovesna enačba:

$$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4} + \frac{r R'_4}{r + R'_3 + R'_4} \left(\frac{R_3}{R_4} - \frac{R'_3}{R'_4} \right)$$

Povezava r med R_1 in R_2 je premoščena z uporomo R'_3 in R'_4 ,

- v ravnovesju je $I_5 = 0$, in zapišemo:

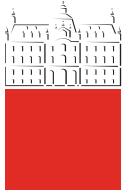
- $I_1 R_1 + I'_3 R'_3 - I_3 R_3 = 0$
- $I_2 R_2 + I'_4 R'_4 - I_4 R_4 = 0$
- tokovni delilnik:

$$\frac{I'_3}{I_1} = \frac{r}{r + R'_3 + R'_4}$$

- enakost tokov:

$$I_3 = I_4, I'_3 = I'_4 \text{ in } I_1 = I_2$$



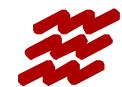


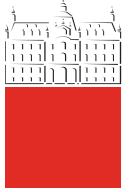
$$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4} + \frac{r R'_4}{r + R'_3 + R'_4} \left(\frac{R_3}{R_4} - \frac{R'_3}{R'_4} \right)$$

- če je R_3/R_4 enako razmerju R'_3/R'_4 :

$$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

- se ne razlikuje od enačbe za Wheatstonov mostič.
- ker absolutne enakosti razmerij ni, **enačbo uporabljamо pri nizkih r .**

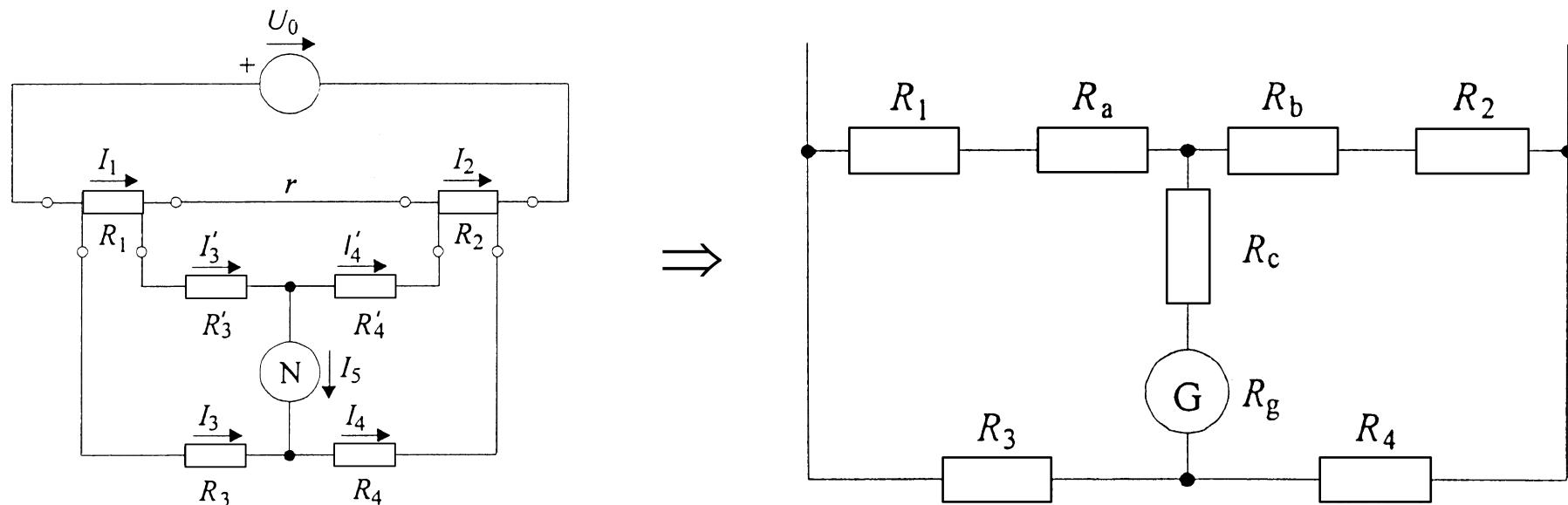




Ločljivost Kelvinovega mostiča

Izpeljemo jo iz enačbe za Wheatstonov mostič:

$$\delta_q = \frac{(\Delta R_1)_q}{R_{10}} = \frac{(\Delta I_5)_q}{U_0} \left[R_{10} + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \left(\frac{R_{10}}{R_2} + 2 + \frac{R_2}{R_{10}} \right) \right]$$

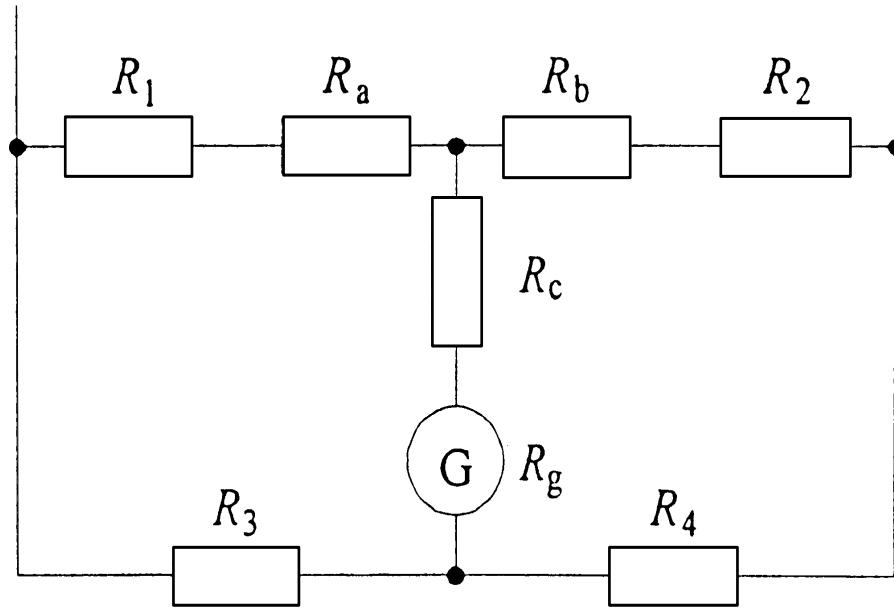
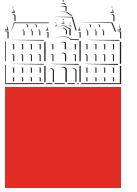


Slika 6.8 Nadomestno vezje Kelvinovega mostiča

Transformacija trikot \rightarrow zvezda:

$$R_a = \frac{r R'_3}{r + R'_3 + R'_4}, \quad R_b = \frac{r R'_4}{r + R'_3 + R'_4}, \quad R_c = \frac{R'_3 R'_4}{r + R'_3 + R'_4}$$



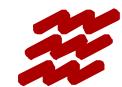


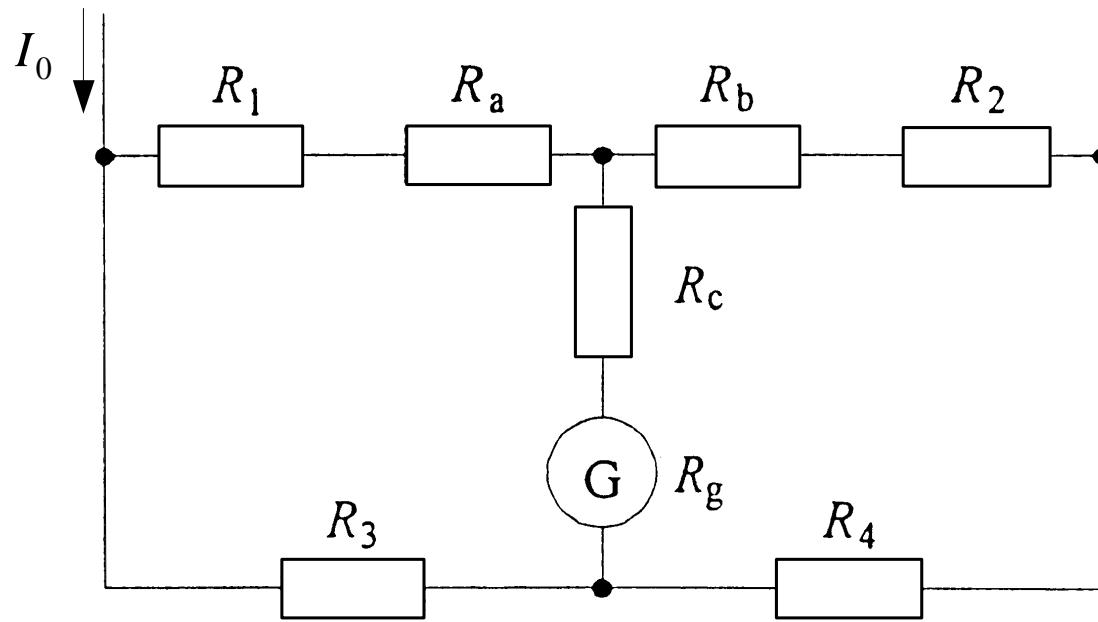
- $R_{10} + R_a + R_2 + R_b \ll R_3 + R_4$,
- $r \ll R'_3 + R'_4 \Rightarrow R_c = \frac{R'_3 R'_4}{R'_3 + R'_4}$,
- $\left(\frac{R_3}{R_4} + 2 + \frac{R_4}{R_3} \right) = \frac{(R_3 + R_4)^2}{R_4 R_3}$,
- enakost uporov: $R_3 = R'_3$, $R_4 = R'_4$

Ločljivost Kelvinovega mostiča:

$$\delta_q = \frac{(\Delta R_1)_q}{R_{10}} = \frac{(\Delta I_5)_q}{U_0} \left[(R_{10} + R_a) + (R_2 + R_b) + R_3 + R_4 + (R_c + R_g) \left(\frac{R_3}{R_4} + 2 + \frac{R_4}{R_3} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad \delta_q = \frac{(\Delta I_5)_q}{U_0} (R_3 + R_4) \left[2 + R_g \frac{R_3 + R_4}{R_3 R_4} \right]$$





Če napajamo mostič s **stalnim tokom** I_0 :

$$\frac{U_0}{R_3 + R_4} = I_3 = I_0 \frac{R_{10} + R_a + R_2 + R_b}{R_{10} + R_a + R_2 + R_b + R_3 + R_4} \approx I_0 \frac{R_{10} + R_2}{R_3 + R_4} = I_0 \frac{R_{10}}{R_3}$$

enac̊ba : $\delta_q = \frac{(\Delta I_5)_q}{U_0} (R_3 + R_4) \left[2 + R_g \frac{R_3 + R_4}{R_3 R_4} \right]$

v: $\delta_q = \frac{(\Delta I_5)_q}{I_0 R_{10}} \left[2R_3 + R_g \left(1 + \frac{R_3}{R_4} \right) \right]$

