Vaja 3

Diferenčne enačbe v digitalni obdelavi signalov

V digitalni obdelavi signalov imajo posebno vrednost sistemi, ki jih lahko zapišemo v obliki linearnih diferenčnih enačb s konstantnimi koeficienti. Takšne sisteme lahko uporabljamo kot model realnih sistemov, še posebej pogosto pa kot orodje za obdelavo signalov. V tem primeru jih poimenjujemo z izrazom digitalni filtri.

V današnji vaji boste spoznali značilnosti tovrstnih sistemov v časovnem in v frekvenčnem prostoru.

3.1 Diferenčna enačba in njen časovni odziv

V nalogi boste oblikovali časovni odziv filtra z **neskončnim impulznim odzivom**, ki ga predstavlja naslednja linearna diferenčna enačba s konstantnimi koeficienti:

$$\sum_{k=0}^{N_a} a_k\, y[n-k] = \sum_{l=0}^{N_b} b_l\, x[n-l] \tag{3.1}$$

V MATLAB-u diferenčne enačbe predstavimo z dvema vektorjema; prvi predstavlja koeficiente b_l, ki ustrezajo elementom x, drugi pa koeficiente povratne vezave, a_k, soležne elementom y. Običajno oblikujemo diferenčno enačbo tako, da je koeficient a_0 enak 1, tako, da ga v izpeljavi izhodnega signala

$$y[n] = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{N_a} a_k\, y[n-k] + \frac{1}{a_0}\sum_{l=0}^{N_b} b_l\, x[n-l] \tag{3.2}$$

ni potrebno upoštevati. Še napotek za uporabo filtrov v MATLAB-u: iz zgornje enačbe je razvidno, da a_0 nikoli ne sme biti enak 0, saj sicer po preureditvi izraza izgine rezultat!

MATLAB-ova funkcija `y = filter(b,a,x)` predstavlja digitalno filtriranje signala x, kot ga definirata vektorja koeficientov a in b diferenčne enačbe 3.1. Če je x enotin impulz, bo rezultat y predstavljal impulzni odziv sita, $h[n]$. Pozor: funkcija $filter$ vrne le toliko vzorcev y, kot jih je v vhodnem vektorju x. Zato je impulzni odziv (načelno je neskončen!) "odrezan" na dolžino vhodnega vektorja x.

Naloga 1 Tvorite vektorja `b` in `a`, ki, glede na enačbo 3.1 vsebujeta ustrezne koeficiente sita, ki ga predstavlja naslednja diferenčna enačba:

$$y[n] + 0.9y[n-2] = 0.3x[n] + 0.6x[n-1] + 0.3x[n-2] \tag{3.3}$$

```
a = [________________________];

b = [________________________];
```

Dopolnite definicijo diskretnega impulza enote!

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \_\_\_\_\_\_ \\ 0, & \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

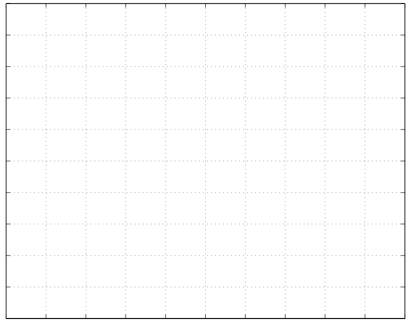
Oblikujte vektor impulza enote, `imp`, dolžine 128. Matlab pozna Boolove operatorje in jih izvaja tudi na vektorjih, zato si pri tem lahko pomagamo takole:

```
imp = (n==0);
```

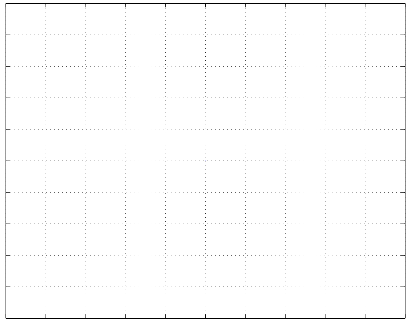
S pomočjo ukazov iz uvoda izračunajte impulzni odziv sita, ki ga podaja enačba 3.3. Upoštevajte seveda vhodni signal `imp` (napišite ukaz!).

```
y = ________________________;
```


Z uporabo funkcije `stem` narišite impulz



in impulzni odziv sistema



v diskretnem prostoru!

Podrobnosti bodo bolje vidne, če boste narisali le prvih 20 točk signala! Verificirajte rezultat!

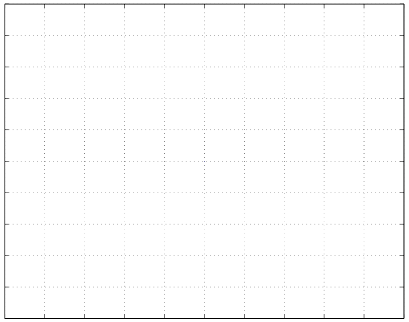
Naloga 2 Imamo naslednje diferenčne enačbe:

$$y_1[n] - 1.92\cos(\frac{\pi}{8})y_2[n-1] + 0.9216y_2[n-2] = x_2[n] + \frac{1}{2}x_2[n-1] \tag{3.4}$$

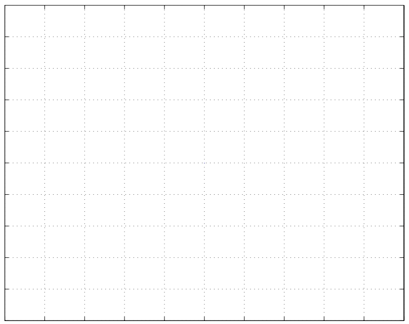
$$y_2[n] - 2\cos(\frac{\pi}{8})y_3[n-1] + y_3[n-2] = x_3[n] + \frac{1}{2}x_3[n-1] \tag{3.5}$$

Izračunajte odzive sistemov $h_1[n]$, $h_2[n]$, $h_3[n]$ in $h_4[n]$, ki jih podajajo enačbe 3.4 - 3.5, na impulz enote v območju $-10 \le n \le 100$!

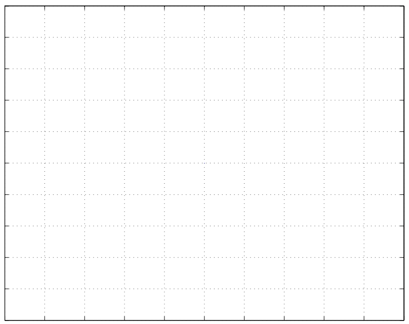
Impulz enote:



Signal $h_1[n]$:



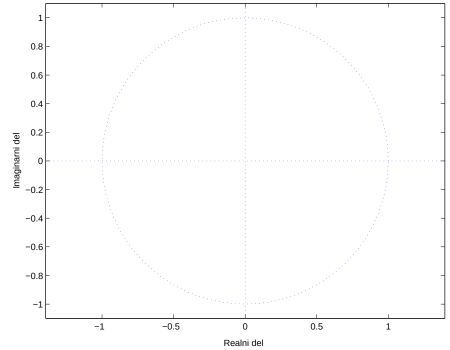
Signal $h_2[n]$:



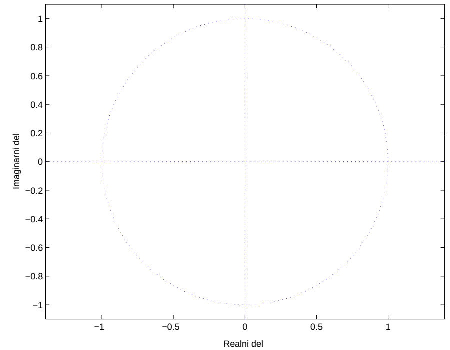
Naloga 3 Vemo, da je impulzni odziv diferenčne enačbe sestavljen iz naravnih frekvenc. Naravne frekvence določajo povratnozančni koeficienti a_k. Vsak koren (p_k^n) značilnega polinoma $A(z) = 1 + \sum_{k=1}^{N_a} a_k\, z^{-k}$ vzbuja izhodni signal oblike $p_k^n u[n]$, kjer je $u[n]$ diskretna stopnica enote. Poiščite korene (pole (poles) in ničle (zeros) značilnega polinoma diferenčnih enačb 3.4 – 3.5(pomagajte si z ukazom za iskanje korenov, `p=roots(a)` oz. `z=roots(b)`)!

Narišite lego korenov v kompleksni ravnini (`zplane(z,p)`)!

Koreni sistema 3.4 v kompleksni ravnini:



Koreni sistema 3.5 v kompleksni ravnini:



Primerjajte rezultate z odzivi sistema iz naloge 2! Kako lega korenov značilnega polinoma vpliva na odziv sistema?