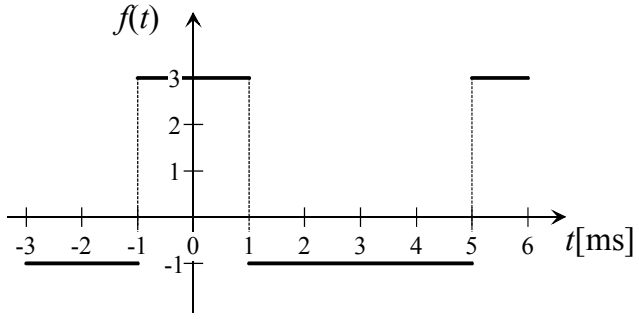
Rešitve izpitnih nalog

PROCESIRANJE SIGNALOV

Datum: 5. februar 1999

1. naloga

Izračunajte komponente amplitudnega spektra narisanega periodičnega signala! Kolikšna je osnovna frekvenca tega signala? Kolikšna je skupna normirana moč prve in druge harmonske komponente?



Rešitev:

Podani signal je simetričen na ordinatno os, zato je $f(t)$ soda funkcija. Izračunati moramo le koeficiente a_0 in a_n.V integralih nas lahko po nepotrebnem ovirajo enote zato, najprej določimo osnovno frekvenco potem pa enote za čas opustimo: 1ms → 1.

$$T = 6\text{ms} \;\Rightarrow\; f_0 = \frac{1}{T} = 166{,}6\text{ Hz} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{1.1}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{T}\left[\int_{-1}^{1} 3dt + \int_1^5 (-1)dt\right] = \frac{1}{6}(6-4) = \frac{1}{3} \tag{1.2}$$

Koeficiente a_n računamo po formuli:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_o^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-1}^{1} 3\cos(n\omega_0 t)dt + \int_1^5 (-1)\cos(n\omega_0 t)dt\right] = \\ &= \frac{2}{Tn\omega_0}\left[3\sin\left(n\frac{2\pi}{6}t\right)\Bigg|_{-1}^{1} - \sin\left(n\frac{2\pi}{6}t\right)\Bigg|_{1}^{5}\right] = \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[3\left(\sin\left(n\frac{2\pi}{6}1\right) - \sin\left(-n\frac{2\pi}{6}1\right)\right) - \left(\sin\left(n\frac{2\pi}{6}5\right) - \sin\left(n\frac{2\pi}{6}1\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{1.3}$$

V gornji enačbi upoštevamo periodičnost in lihost funkcije sinus.

$$\begin{aligned} &\sin(x + k\cdot 2\pi) = \sin(x) \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{in} \quad \sin(-x) = -\sin(x) \\ &\sin\left(n\frac{2\pi}{6}5 - n\cdot 2\pi\right) = \sin\left(n\left(\frac{5}{6}2\pi - 2\pi\right)\right) = \sin\left(-n\frac{2\pi}{6}\right) = -\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Z upoštevanjem gornjega v (1.3) dobimo

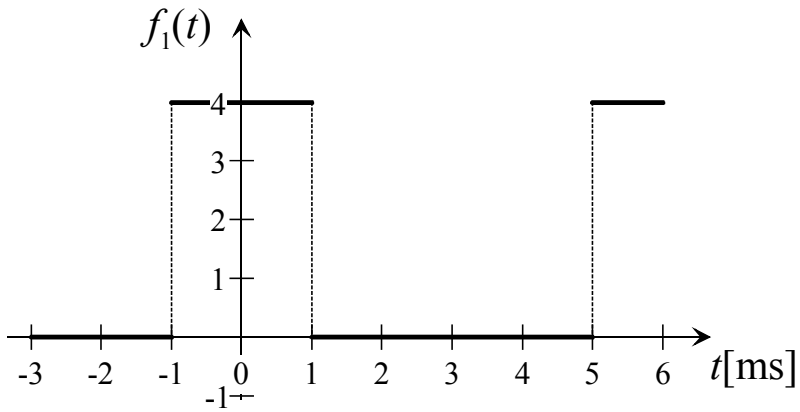
$$a_n = \frac{8}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{8}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \\ a_2 &= \frac{8}{2\pi}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \\ a_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Normirano moč prve in druge komponente izračunamo po Parsevalovem izreku z upoštevanjem, da so $b_n = 0$.

$$P = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2} c_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2} a_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2} b_n^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{16\cdot 3}{\pi^2} + \frac{4\cdot 3}{\pi^2}\right) = 3{,}04 \tag{1.7}$$

Nalogo bi lahko rešili še nekoliko hitreje in enostavneje z upoštevanjem dejstva, da enosmerna komponenta, ki jo dodamo signalu vpliva le na koeficient a_0, na izmenične komponente pa nima vpliva. Izračun koeficientov se v primeru pravokotnih periodičnih signalov z dvema vrednostima poenostavi s tem, da signal premaknemo tako, da je en nivo nič. V danem primeru prištejemo signalu konstanto 1. Na spodnji sliki je signal $f_1(t) = f(t) + 1$ za katerega izračunamo koeficiente a_n, ki so isti kot za originalni signal.

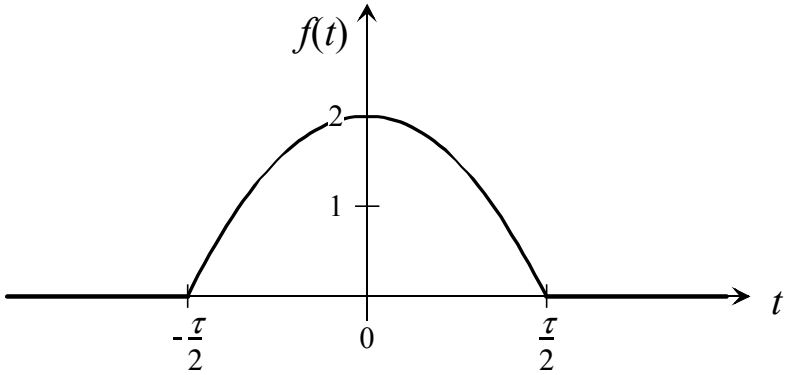


Slika 1.1: Signal s premaknjeno enosmerno komponento

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} 4\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{n\omega_0 T}4\sin\left(n\frac{2\pi}{6}t\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \tag{1.8}$$

2. naloga

Izračunajte Fourierjev transform podanega aperiodičnega signala (del harmonične funkcije) Koliko znaša $F(0)$?



Rešitev

Transform izračunamo z uporabo eksponentnega zapisa za kosinus.

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \tag{2.1}$$

Še hitreje lahko pridemo do rezultata z uporabo kosinusne Fourierjeve transformacije za časovne funkcije. Dano časovno funkcijo na intervalu [-τ/2,τ/2] zapišemo

$$f(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right) \tag{2.2}$$

$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 2\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 2\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right) \cos(\omega t) dt - j\int_{-\tau/2}^{\tau/2} 2\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right) \sin(\omega t) dt \tag{2.3}$$

Drugi integral je enak nič, ker je integral lihe funkcije na simetričnem intervalu. Produkt dveh kosinusov razstavimo na vsoto po pravilu

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big) \tag{2.4}$$

Upoštevamo še spremembo spodnje meje na 0 (zato moramo integral pomnožiti z 2). Izraz (2.3) postane sedaj

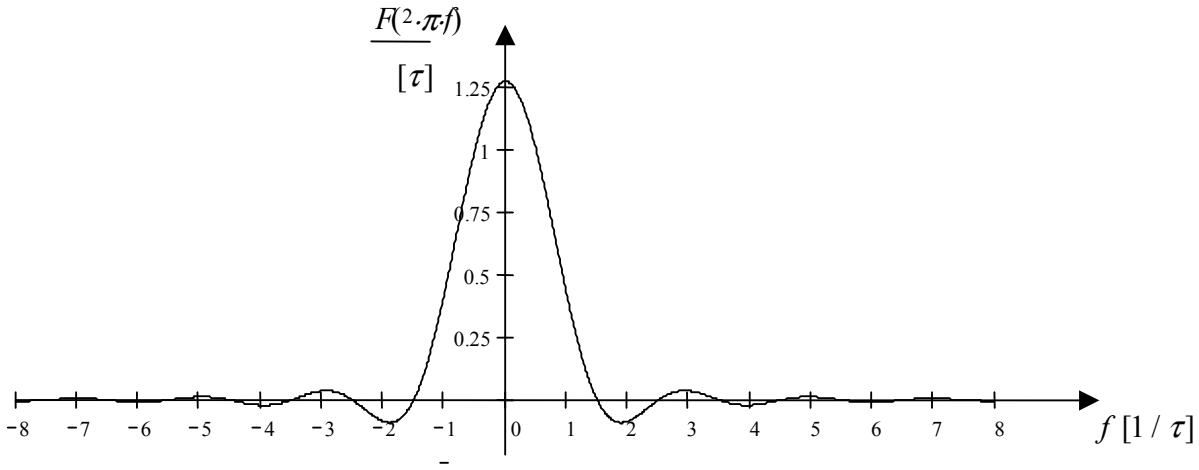
$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= 2\int_0^{\tau/2} 2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t+\omega t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t-\omega t\right)\right)dt = \\
&= 2\left[\int_0^{\tau/2}\cos\left((\frac{\pi}{\tau}+\omega)t\right)dt+\int_0^{\tau/2}\cos\left((\frac{\pi}{\tau}-\omega)t\right)dt\right] = \\
&= 2\left[\frac{\sin\left((\frac{\pi}{\tau}+\omega)t\right)}{\frac{\pi}{\tau}+\omega}+\frac{\sin\left((\frac{\pi}{\tau}-\omega)t\right)}{\frac{\pi}{\tau}-\omega}\right]_0^{\tau/2} = 2\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\pi}{\tau}+\omega}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\pi}{\tau}-\omega}\right] = \\
&= 2\tau\cos\frac{\omega\tau}{2}\left[\frac{1}{\pi+\omega\tau}+\frac{1}{\pi-\omega\tau}\right]
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

V zadnjem prehodu smo upoštevali pravila o funkcijah komplementarnega kota

$$\sin(\frac{\pi}{2}\pm x)=\cos x \tag{2.6}$$

$$F(\omega)=\frac{4\pi\tau}{\pi^2-(\omega\tau)^2}\cos(\frac{\omega\tau}{2}) \tag{2.7}$$

Za $\omega = 0$ dobimo $4\pi\tau$, kar je tudi ploščina pod časovno funkcijo.



Slika 2.1: Graf Fourierjevega transforma podanega impulza

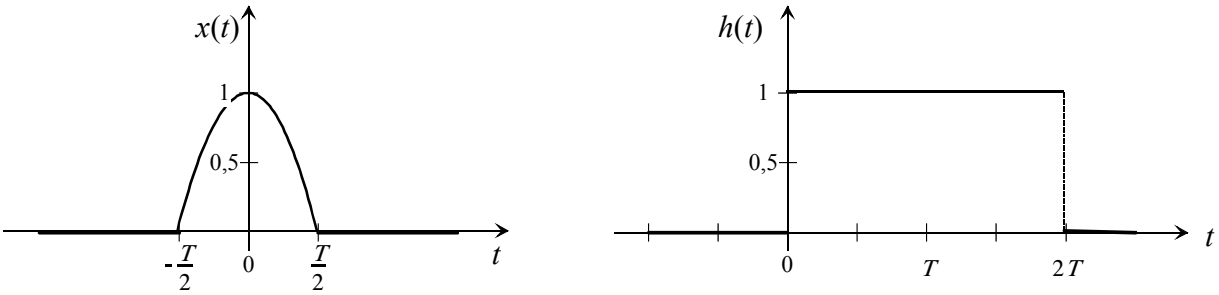
3. naloga

Izračunajte in narišite odziv $y(t)$ linearnega vezja, podanega z odzivom $h(t)$, za vhodni signal $x(t)$!

$$h(t)=\begin{cases}1 & \text{za} \quad 0\le t\le 2T\\ 0 & \text{drugod}\end{cases} \quad \text{in} \quad x(t)=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{T}t\right) & za \quad |t|<\dfrac{T}{2}\\ 0 & \end{cases} \; !$$

Rešitev:

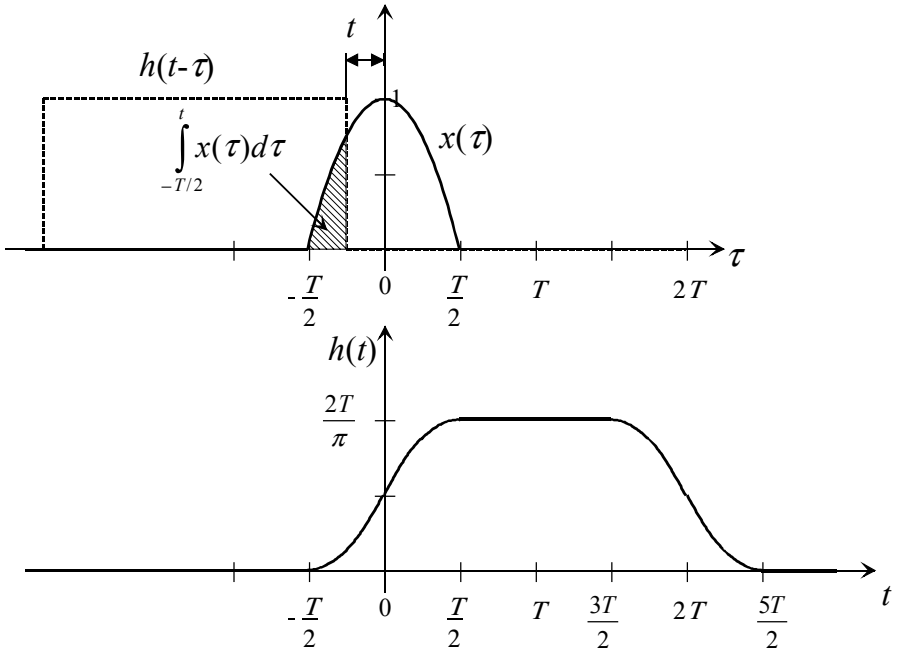
Na spodnji sliki sta prikazana signala $x(t)$ in $h(t)$.



Odziv linearnega vezja je dan s konvolucijskim integralom

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau \tag{3.1}$$

zaradi lažjega izračuna vzamemo drugo obliko. Grafično predstavitev izračuna predstavlja spodnja slika. Neskončne meje se zreducirajo na interval [-T/2, t]. Na spodnji sliki je narisana situacija za $t = -T/4$.



Slika 3.1: Predstavitev izračuna konvolucije

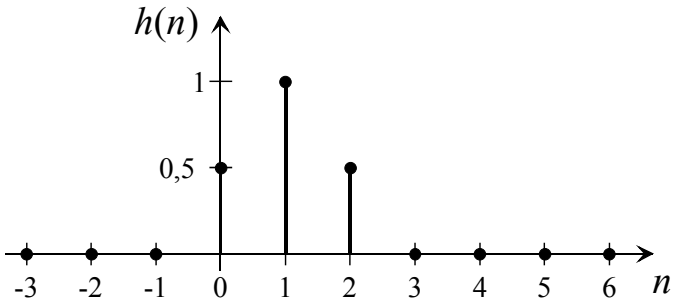
Za čase $-T/2 < t < T/2$ izrazimo odziv $y(t)$ z naslednjim integralom

$$y(t) = \int_{-T/2}^{t} \cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) d\tau = \frac{T}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)\Bigg|_{-T/2}^{t} = \frac{T}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \\ = \frac{T}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right) + 1\right] \tag{3.2}$$

V časih $T/2 < t < 3T/2$ se izhodni signal ne spreminja, ker ostaja prekrivanje nespremenjeno, za $3T/2 < t < 5T/2$ pa upada $y(t)$ na podoben način, kot je to izračunano v (3.2)

4. naloga

Diskretno časovno linearno vezje ima narisani impulzni odziv $h(n)$. Izračunajte sistemsko funkcijo $H(z)$ in narišite shemo vezja? V z-ravnini narišite lego ničel in polov! Kolikšna je vrednost frekvenčnega odziva $|H(f)|$ za zvezne signale pri frekvenci 1kHz, če je vzorčevalna frekvenca $f_0 = 4$kHz.

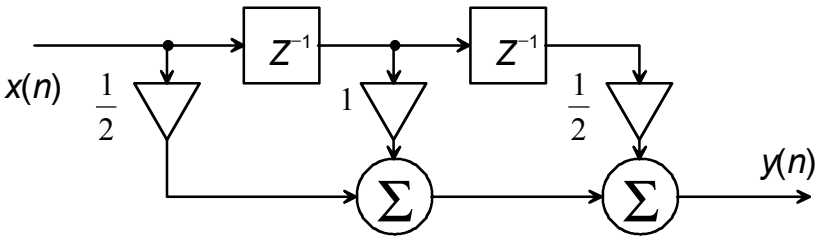


Rešitev:

Odziv diskretnega linearnega sistema na enotin impulz $\delta(n)$ je podan s tremi neničelnimi vrednostmi, ki jih zlahka razberemo iz slike. Sistemsko funkcijo $H(z)$ izračunamo kot z-transformacijo impulznega odziva.

$$h(0) = \frac{1}{2} \quad h(1) = 1 \quad h(2) = \frac{1}{2} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \frac{1}{2} + z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} \tag{4.1}$$

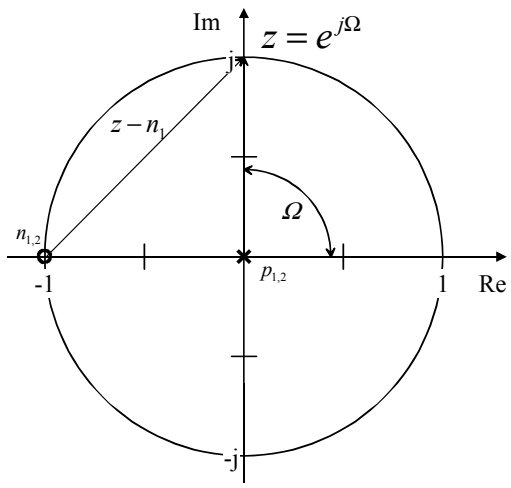
Iz samega odziva vidimo, da gre za vezje s končnim odzivom (FIR). Shemo vezja podaja slika 4.1



Slika 4.1: Shema diskretnega linearnega sistema

Pole in ničle sistemske funkcije $H(z)$ dobimo iz enačbe (4.1)

$$H(z)=\frac{z^{-2}}{2}\left(z^2+2z+1\right)=\frac{(z+1)^2}{2z^2}=\frac{(z-(-1))^2}{2z^2} \quad \Rightarrow \quad n_{1,2}=-1 \quad p_{1,2}=0 \tag{4.2}$$



Slika 4.2: Lega polov in ničel v *z*-ravnini

Zadnji del naloge se nanaša na zvezo med analognim signalom in normirano krožno frekvenco Ω. Če hočemo z časovno diskretnim vezjem procesirati (filtrirati) analogne, jih moramo pred tem vzorčiti. Če imamo na vhodu vzorčevalnika harmoničen signal, dobimo na izhodu diskretno harmonično funkcijo .

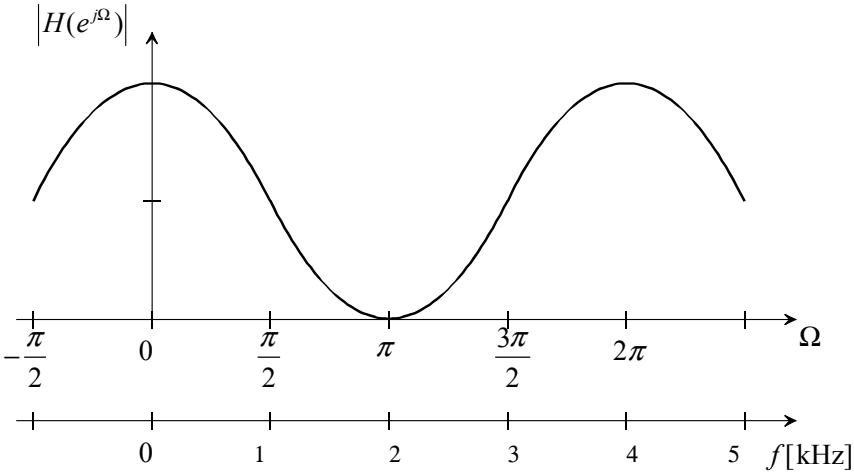
$$\begin{aligned}\sin(\Omega_1 n)&=\sin(2\pi f_1 nT)=\sin(2\pi\frac{f_1}{f_0}n)\\ \Omega_1&=\frac{2\pi 1\text{kHz}}{4\text{kHz}}=\frac{\pi}{2}\end{aligned} \tag{4.3}$$

Absolutno vrednost frekvenčnega odziva za analogno frekvenco 1kHz moramo torej izračunati za $z=e^{j\frac{\pi}{2}}=j$.

$$\left|H(z)\right|\Big|_{z=j}=\frac{\left|j+1\right|^2}{2\left|j\right|^2}=\frac{1^2+1^2}{2}=1 \tag{4.4}$$

Lahko pa bi izračunali splošen potek absolutne vrednosti frekvenčnega odziva.

$$\begin{aligned}\left|H(e^{j\Omega})\right|&=\frac{\left|e^{j\Omega}+1\right|^2}{2\left|e^{j\Omega}\right|^2}=\frac{\left|\cos\Omega+j\sin\Omega+1\right|^2}{2}=\frac{(\cos\Omega+1)^2+\sin^2\Omega}{2}=\\ &=\frac{\cos^2\Omega+2\cos\Omega+1+\sin^2\Omega}{2}=\cos\Omega+1\end{aligned} \tag{4.5}$$



Slika 4.3: Graf absolutne vrednosti frekvenčnega odziva