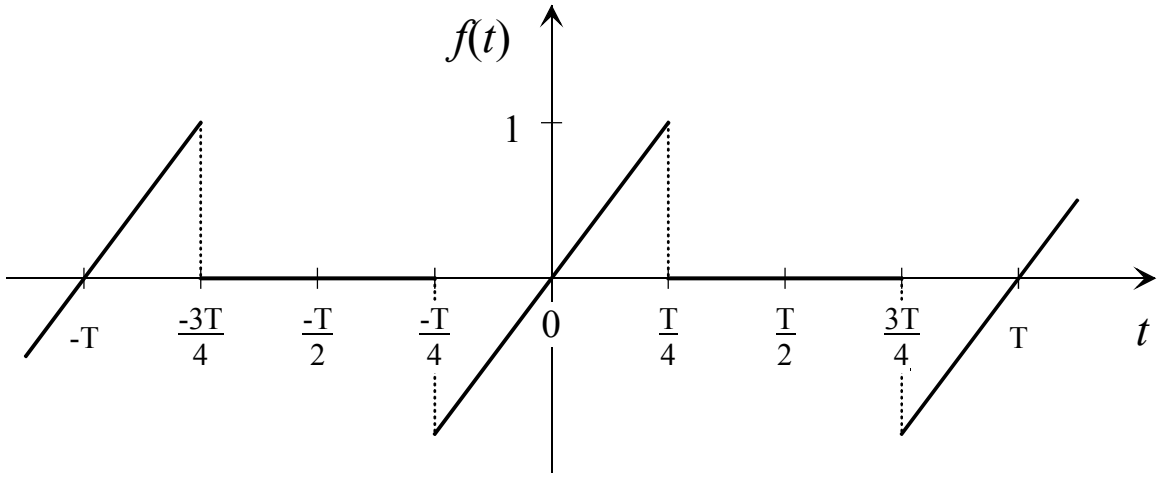
Rešitve pisnega izpita

PROCESIRANJE SIGNALOV

Datum: 7. 2. 2000

1. naloga

Kolikšna je amplituda tretje harmonske komponente narisanega periodičnega signala?



Rešitev:

Časovna funkcija na intervalu $(-T/4, T/4)$ je linearna funkcija:

$$f(t) = k \cdot t \quad k = \frac{f(\frac{T}{4})}{\frac{T}{4}} = \frac{4}{T} \tag{1.1}$$

Funkcija je liha zato velja $a_0 = a_n = 0$. Koeficiente b_n izračunamo:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \frac{4}{T} t\sin(n\omega_0 t)dt = \frac{8}{T^2}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} t\sin(n\omega_0 t)dt \tag{1.2}$$

Izračunamo najprej nedoločeni integral po metodi per partes (po delih):

$$\begin{aligned} &\int t\sin(at)dt = -t\frac{\cos(at)}{a} + \int \frac{\cos(at)}{a}dt = -t\frac{\cos(at)}{a} + \frac{\sin(at)}{a^2} \\ &\sin(at) = dv \;\Rightarrow\; v = -\frac{\cos(at)}{a} \\ &t = u \;\Rightarrow\; du = dt \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ker je funkcija v integralu (1.2) soda, lahko integriranje na intervalu s simetričnima mejama zamenjamo z dvojno vrednostjo integrala za pozitivne čase:

$$b_n = 2\frac{8}{T^2}\int_0^{\frac{T}{4}} t\sin(n\omega_0 t)dt = 2\frac{8}{T^2}\left[-t\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} + \frac{\sin(n\omega_0 t)}{(n\omega_0)^2}\right]\Bigg|_0^{\frac{T}{4}} =$$

$$= \frac{2\cdot 8}{T^2}\left[-\frac{T}{4}\frac{\cos(n\omega_0\frac{T}{4})}{n\omega_0} + \frac{\sin(n\omega_0\frac{T}{4})}{(n\omega_0)^2}\right] = -\frac{4\cos(n\omega_0\frac{T}{4})}{n\omega_0 T} + \frac{16\sin(n\omega_0\frac{T}{4})}{(n\omega_0 T)^2} \tag{1.4}$$

Sedaj upoštevamo še zvezo $T\omega_0 = 2\pi$ in dobimo

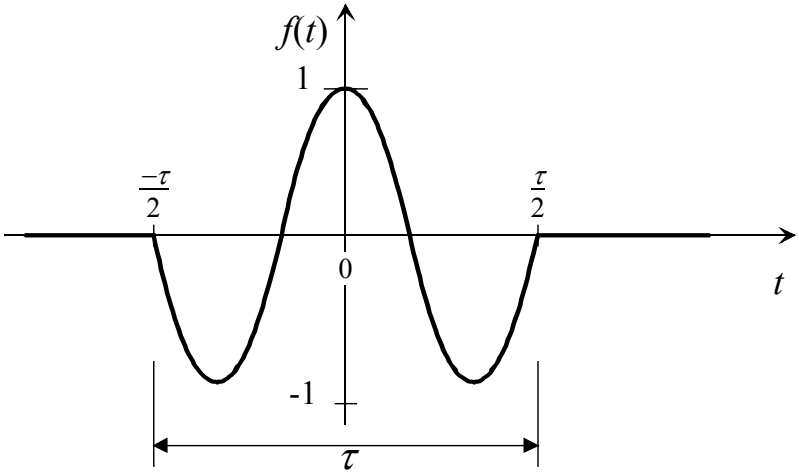
$$b_n = -\frac{2\cos(n\frac{\pi}{2})}{n\pi} + \frac{4\sin(n\frac{\pi}{2})}{(n\pi)^2} \tag{1.5}$$

Amplitude harmonskih komponent so $c_n = b_n$, ker velja $a_n = 0$.

$$c_3 = b_3 = -\frac{2\cos(3\frac{\pi}{2})}{3\pi} + \frac{4\sin(3\frac{\pi}{2})}{(3\pi)^2} = -\frac{4}{9\pi^2} = \underline{-0.045} \tag{1.6}$$

2. naloga

Izračunajte Fourierjev transform $H(\omega)$ narisanega časovnega signala.

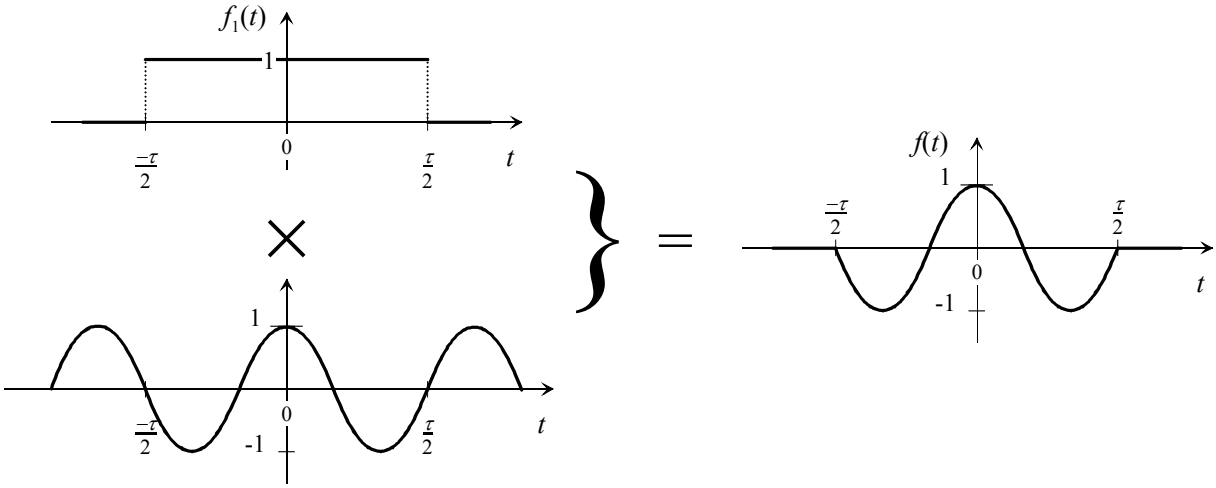


Navodilo: *Uporabite pravilo o modulaciji, oziroma množenju časovnega signala s harmoničnim signalom.*

Rešitev:

Dani signal f(t) lahko zapišemo kot produkt dveh signalov. Razmere ilustrira slika 2.1.

$$f(t) = f_1(t)\cdot\cos(\omega_0 t)$$
$$3\frac{T}{2} = \tau \;\Rightarrow\; T = \frac{2\tau}{3} \;\Rightarrow\; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{3\pi}{\tau} \tag{2.1}$$



Slika 2.1: Ilustracija enačbe (2.1)

Na osnovi enačbe (2.1) in lastnosti Fourierjeve transformacije (2.2) dobimo

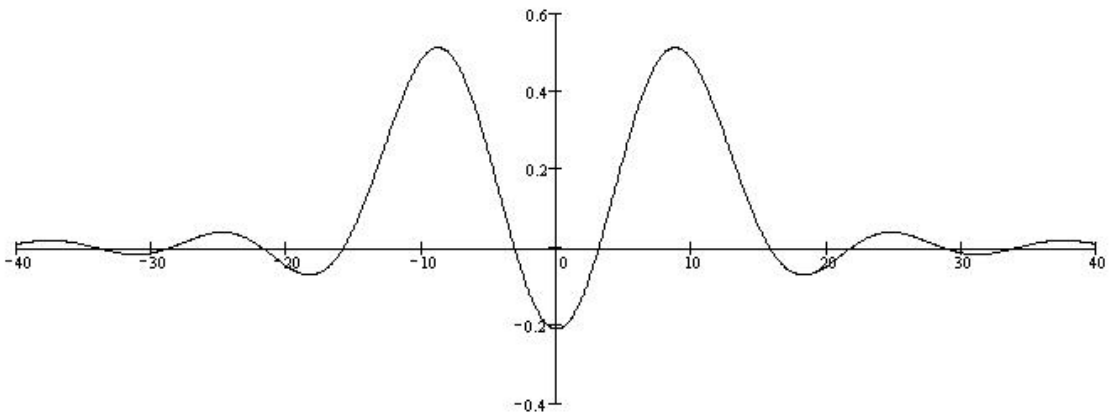
$$\begin{aligned} &f(t) \leftrightarrow F(\omega) \\ &f(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}(F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$f_1(t) \leftrightarrow \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}dt = \tau\frac{\sin\frac{\tau}{2}\omega}{\frac{\tau}{2}\omega} = 2\frac{\sin\frac{\tau}{2}\omega}{\omega} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} f_1(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow F(\omega) &= \frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}(\omega+\omega_0)\right)}{\omega+\omega_0} + \frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}(\omega-\omega_0)\right)}{\omega-\omega_0} = \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}(\omega+\frac{3\pi}{\tau})\right)}{\omega+\frac{3\pi}{\tau}} + \frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}(\omega-\frac{3\pi}{\tau})\right)}{\omega-\frac{3\pi}{\tau}} = \frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}\omega+\frac{3\pi}{2}\right)}{\omega+\frac{3\pi}{\tau}} + \frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}\omega-\frac{3\pi}{2}\right)}{\omega-\frac{3\pi}{\tau}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Gornji rezultat (2.4) sicer zadostuje, kot rešitev izpitne naloge, vendar ga lahko še predelamo. Z uporabo adicijskega izreka za sinus dobimo

$$F(\omega) = \frac{-\cos\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)}{\omega+\frac{3\pi}{\tau}} + \frac{\cos\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)}{\omega-\frac{3\pi}{\tau}} = \cos\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)\frac{\frac{3\pi}{\tau}}{\omega^2-\left(\frac{3\pi}{\tau}\right)^2} \tag{2.5}$$



Slika 2.2: Graf transforma $F(\omega)$ za $\tau = 1$

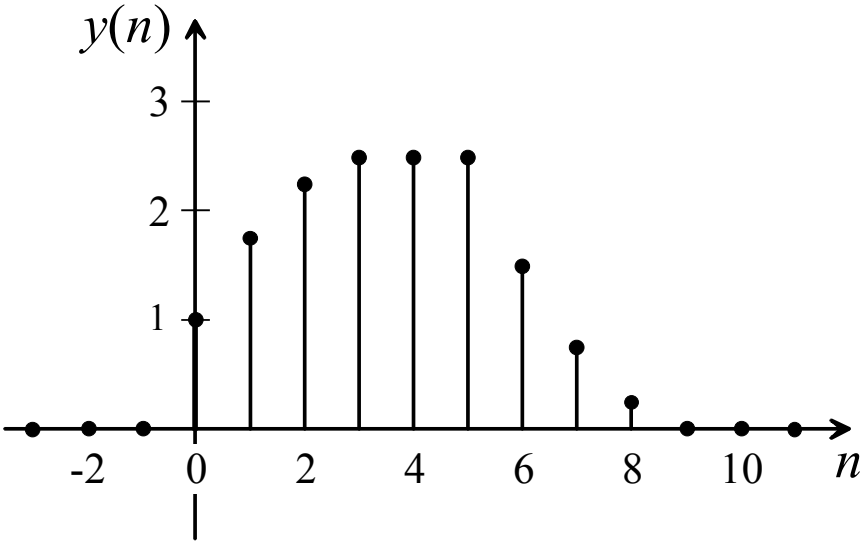
3. naloga

Poiščite odziv linearnega diskretnega sistema $y(n)$ na vhodni signal $x(n)$, če je sistem opisan z impulznim odzivom $h(n)$! Narišite tudi ustrezne grafe!

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & \text{za} \quad 0 \le n \le 4 \\ 0 & \text{drugod} \end{cases} \qquad x(n) = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad 0 \le n \le 5 \\ 0 & \text{drugod} \end{cases}$$

Rešitev:

Zaradi enostavnosti naloge je podana le rešitev $y(n)$. Podane so le neničelne vrednosti signala za n = 0,1…8; y = {1, 1.75, 2.25, 2.5, 2.5, 2.5, 1.5, 0.75, 0.25}. Drugod je $y(n) = 0$.



Slika 3.1: Graf odziva $y(n)$ na vhodni signal $x(n)$

4. naloga

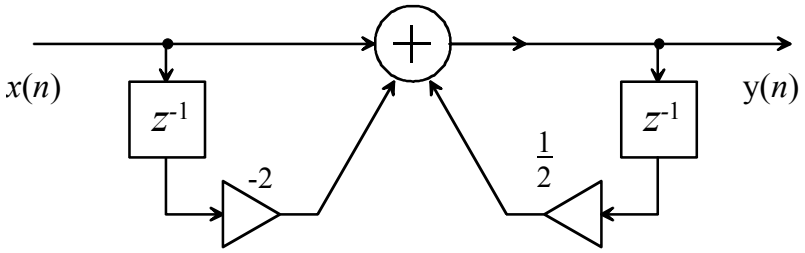
Časovno diskretno linearno vezje opisuje diferenčna enačba

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + \frac{1}{2}y(n-1)\,.$$

Določite njegov impulzni $h(n)$ in amplitudni frekvenčni odziv $|H(\Omega)|$ za $\Omega = \{0, \pi/2, \pi\}$!

Rešitev:

Na podlagi dane diferenčne enačbe lahko narišemo shemo diskretnega sistema.



Slika 4.1: Shema diskretnega sistema

Za vhodni signal $\delta(n)$ sestavimo naslednjo tabelo, ki izhaja iz podane enačbe ali pa slike 4.1

n	***x*(*n*)**	***x*(*n*-1)**	***y*(*n* - 1)**	***y*(*n*)**
-1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	-2×1 + 0,5×1 = -1,5
2	0	0	-1,5	-2×0 + 0,5×(-1,5) = -0,75
3	0	0	-0,75	-0,375
4	0	0	-0,375	-0,1875

Rezultirajoči signal $y(n)$ predstavlja impulzni odziv $h(n)$, ki ga lahko izračunamo tudi s pomočjo z-transformacije dane diferenčne enačbe.

$$Y(z) = X(z) - 2X(z)z^{-1} + \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} \tag{4.1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{4.2}$$

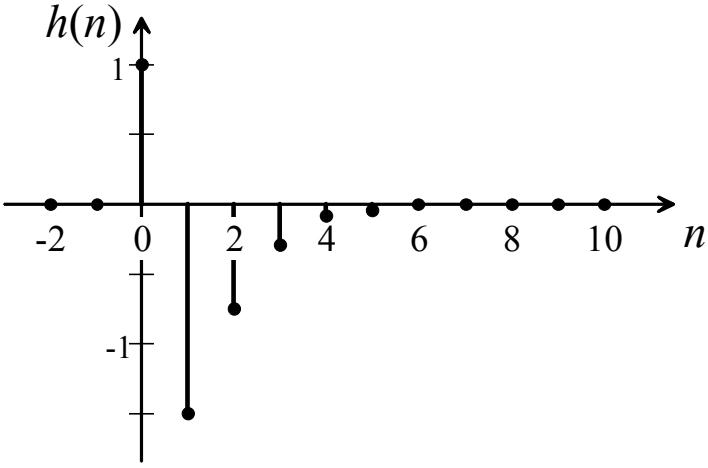
V izrazu (4.2) delimo števec z imenovalcem in dobimo

$$H(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{3}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = 1-\frac{3}{2}\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{4.3}$$

Z uporabo tabele z-transformov osnovnih funkcij dobimo za $h(n)$

$$h(n) = \delta(n) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot u(n-1) \tag{4.4}$$

Graf impulznega odziva $h(n)$ je prikazan na sliki 4.2.

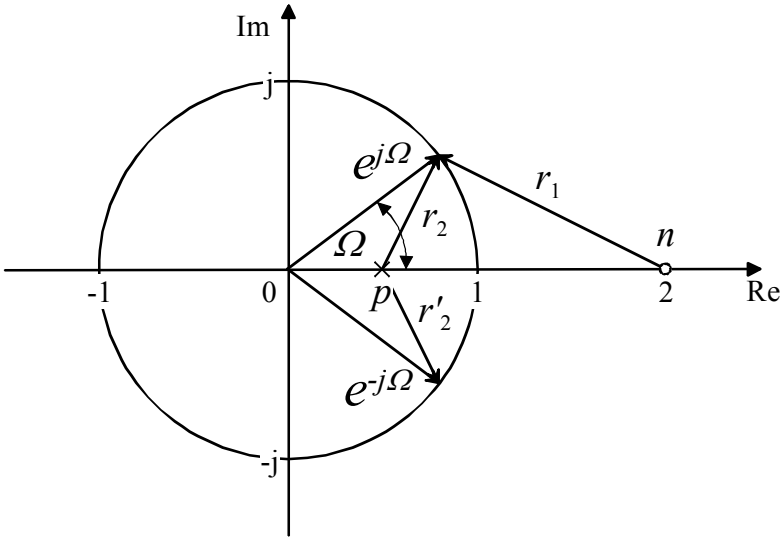


Slika 4.2:Graf impulznega odziva

Frekvenčni odziv in lego polov in ničel podanega sistema določimo iz sistemske funkcije $H(z)$ iz enačbe (4.2), ki jo razširimo z z

$$H(z) == \frac{z-2}{z-\frac{1}{2}} \Rightarrow n = 2 \text{ in } p = \frac{1}{2} \tag{4.5}$$

Lega ničle in pola v z ravnini je prikazana na sliki 4.3.



Slika 4.3: Lega ničle in pola sistemske funkcije $H(z)$ ter ilustracija izračuna amplitudnega frekvenčnega odziva $|H(e^{j\Omega})|$

Absolutno vrednost frekvenčnega odziva izračunamo iz izraza (4.5):

$$|H(\Omega)| = \left|\frac{e^{j\Omega}-2}{e^{j\Omega}-\frac{1}{2}}\right| = \left|\frac{2e^{j\Omega}(\frac{1}{2}-e^{-j\Omega})}{e^{j\Omega}-\frac{1}{2}}\right| = \left|\frac{-2e^{j\Omega}(e^{-j\Omega}-\frac{1}{2})}{e^{j\Omega}-\frac{1}{2}}\right| = \frac{|-2|\left|e^{j\Omega}\right|\left|e^{-j\Omega}-\frac{1}{2}\right|}{\left|e^{j\Omega}-\frac{1}{2}\right|} \tag{4.6}$$

Če v izrazu (4.6) uporabimo zapis

$$e^{j\Omega} - \frac{1}{2} = r_2 \text{ in } e^{-j\Omega} - \frac{1}{2} = r_2', \tag{4.7}$$

potem se (4.6) spremeni v

$$|H(\Omega)| = 2\frac{|r_2'|}{|r_2|} = 2, \tag{4.8}$$

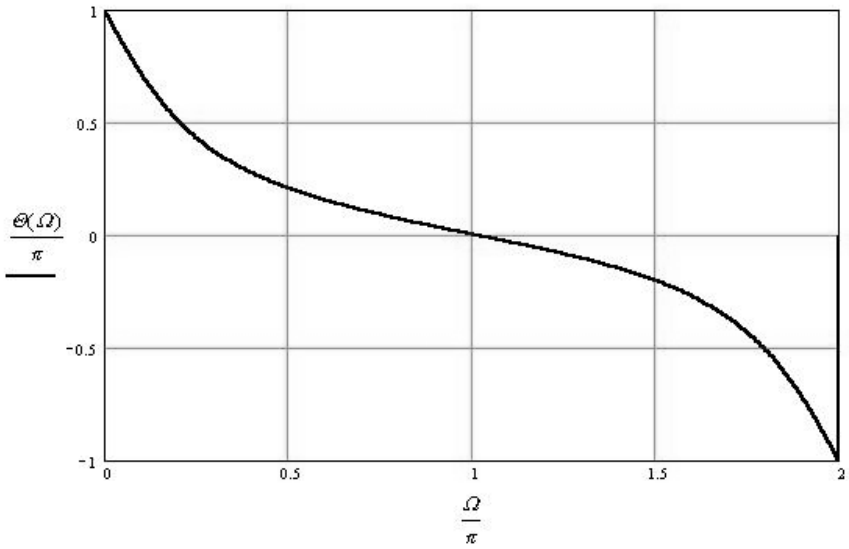
saj lahko iz slike 4.3 brez težav ugotovimo, da sta absolutni vrednosti kompleksnih števil r_2 in r'_2 enaki (števili sta kompleksno konjugiran par). Dobljeni rezultat pomeni, da je amplitudni odziv podanega diskretnega sistema za vse frekvence enak, spreminja pa se faza $\theta(e^{j\Omega})$. Podano vezje oz. sistem predstavlja fazni sukalnik. V dani nalogi fazni potek sicer ni bil zahtevan, vendar ga na tem mestu izračunajmo.

$$\Theta(\Omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(H(e^{j\Omega}))}{\operatorname{Re}(H(e^{j\Omega}))}\right) \tag{4.9}$$

Izraz frekvenčnega odziva razširimo s kompleksno konjugirano vrednostjo imenovalca, da lahko izračunamo razmerje imaginarne in realne komponente.

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \frac{e^{j\Omega} - 2}{e^{j\Omega} - \frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{-j\Omega} - \frac{1}{2}}{e^{-j\Omega} - \frac{1}{2}} = \frac{1 - 2e^{-j\Omega} - \frac{1}{2}e^{j\Omega} + 1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega} - \frac{1}{2}e^{j\Omega} + \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{2 - (2\cos(-\Omega) + 2j\sin(-\Omega)) - \frac{1}{2}\cos\omega - \frac{j}{2}\sin\Omega}{\frac{5}{4} - \cos\Omega} = \frac{4 - 5\cos\Omega + j3\sin\Omega}{\frac{5}{2} - 2\cos\Omega} \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\Theta(e^{j\Omega}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3\sin\Omega}{4 - 5\cos\Omega}\right) \tag{4.11}$$



Slika 4.4: Faza frekvenčnega oziva $\theta(\Omega)$ za vrednosti 0 do 2π