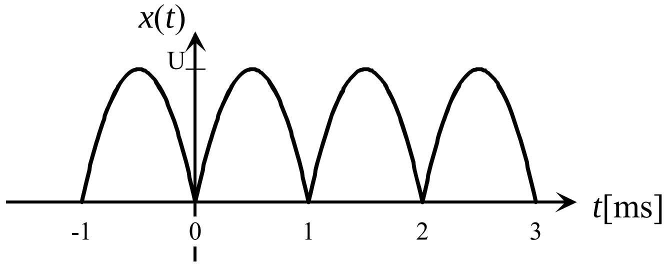
Naloge pisnega izpita

PROCESIRANJE SIGNALOV

Datum: 6. 2. 2006

1. Izračunajte komponente amplitudnega spektra periodičnega signala $x(t) = |U \sin(\omega t)|$! Kolikšna je efektivna vrednost signala na izhodu idealnega nizkega sita z mejno frekvenco 1,7kHz ?



Rešitev:

Osnovna krožna frekvenca ω_0 in frekvenca ω sta povezani z

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \omega = \frac{2\pi}{2T} \Rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{2}$$

Na osnovnem intervalu [0, 1 ms] je signal podan z enačbo

$$x(t) = U \cdot \sin \omega t = U \cdot \sin\left(\frac{\omega_0}{2} t\right) \quad \text{za} \quad 0 < t < T = 1 \text{ ms}$$

Koeficiente Fouriereve vrste izračunamo na osnovi enačbe za splošni člen

$$X_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_0^T U \cdot \sin(\omega t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\sin(\omega t) = \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) = \frac{e^{j\frac{\omega_0 t}{2}} - e^{-j\frac{\omega_0 t}{2}}}{2j}$$

$$X_k = \frac{U}{T}\int_0^T \frac{e^{j\frac{\omega_0 t}{2}} - e^{-j\frac{\omega_0 t}{2}}}{2j} \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{U}{j2T} \cdot \left[\int_0^T e^{j\frac{\omega_0 t}{2}} \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt - \int_0^T e^{-j\frac{\omega_0 t}{2}} \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt\right]$$

$$X_k = \frac{U}{j2T} \cdot \left[\int_0^T e^{-j\omega_0 t\left(k-\frac{1}{2}\right)} dt - \int_0^T e^{-j\omega_0 t\left(k+\frac{1}{2}\right)} dt\right] = \frac{U}{j2T} \cdot \left[\left. \frac{e^{-j\omega_0 t\left(k-\frac{1}{2}\right)}}{-j\omega_0\left(k-\frac{1}{2}\right)} \right|_0^T - \left. \frac{e^{-j\omega_0 t\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{-j\omega_0\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right|_0^T \right]$$

$$X_k = \frac{U}{-j\omega_0 j2T} \cdot \left[\left. \frac{e^{-j\omega_0 t\left(k-\frac{1}{2}\right)}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)} \right|_0^T - \left. \frac{e^{-j\omega_0 t\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right|_0^T \right]$$

$$X_k = \frac{U}{2\omega_0 T} \cdot \left[\frac{e^{-j\omega_0 T\left(k-\frac{1}{2}\right)}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)} - \frac{e^0}{\left(k-\frac{1}{2}\right)} - \frac{e^{-j\omega_0 T\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \frac{e^0}{\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right]$$

$$X_k = \frac{U}{2\omega_0 T} \cdot \left[\frac{e^{-j\omega_0 T\left(k-\frac{1}{2}\right)} - 1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)} - \frac{e^{-j\omega_0 T\left(k+\frac{1}{2}\right)} - 1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right] = \frac{U}{2\frac{2\pi}{T}T} \cdot \left[\frac{e^{-j\frac{2\pi}{T}T\left(k-\frac{1}{2}\right)} - 1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)} - \frac{e^{-j\frac{2\pi}{T}T\left(k+\frac{1}{2}\right)} - 1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right]$$

$$X_k = \frac{U}{4\pi} \cdot \left[\frac{e^{-j(2\pi k - \pi)} - 1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)} - \frac{e^{-j(2\pi k + \pi)} - 1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right] = \frac{U}{4\pi} \cdot \left[\frac{-1-1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)} - \frac{-1-1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right]$$

$$X_k = -\frac{U}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)} \right] = -\frac{U}{2\pi} \cdot \left[\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right) - \left(k-\frac{1}{2}\right)}{\left(k-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(k+\frac{1}{2}\right)} \right]$$

$$X_k = -\frac{U}{2\pi} \cdot \left[\frac{k + \frac{1}{2} - k + \frac{1}{2}}{k^2 - \frac{1}{4}} \right] = -\frac{U}{2\pi} \cdot \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{U}{2\pi} \cdot \frac{4}{1-4k^2}$$

$$\underline{\underline{X_K = \frac{U}{2\pi} \cdot \frac{4}{1-4k^2}}}$$

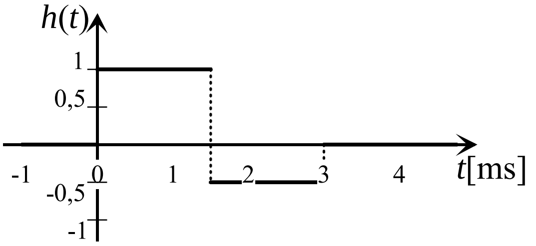
Za drugi del naloge uporabimo Parsevalov izrek. Seštejemo normalizirane moči komponent, ki jih filter prepušča, da dobimo normalizirano moč filtriranega signala. Moč prepuščenega signala nato korenimo, da dobimo efektivno vrednost signala.

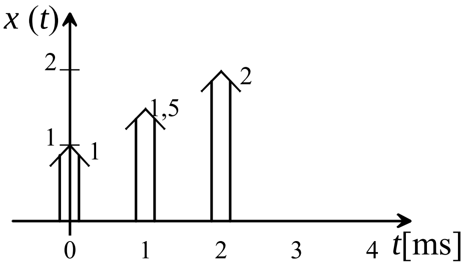
Osnovna harmonska komponenta signala je 1kHz, torej filter 2. harmonske komponente, ki je pri 2 kHz, ne prepušča več. Sešteti moramo torej le moči komponent X_0, X_1 in X_{-1}.

$$P_F = |X_0|^2 + |X_1|^2 + |X_{-1}|^2 = \frac{4U^2}{\pi^2} \cdot \left(1 + \left| \frac{1}{1-4} \right|^2 + \left| \frac{1}{1-4} \right|^2 \right) = \frac{4U^2}{\pi^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{4U^2 \cdot 11}{\pi^2 \cdot 9}$$

$$x_{Fef} = \sqrt{P_F} = \sqrt{\frac{4U^2 \cdot 11}{9\pi^2}} = \frac{2U}{3\pi} \cdot \sqrt{11} = \underline{\underline{0,7038U}}$$

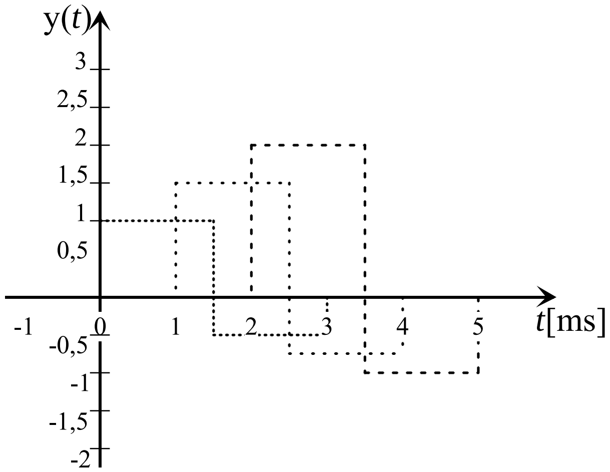
2. Narišite odziv LTI sistema na signal $x(t)$! Impulzni odziv sistema je podan z grafom $h(t)$.

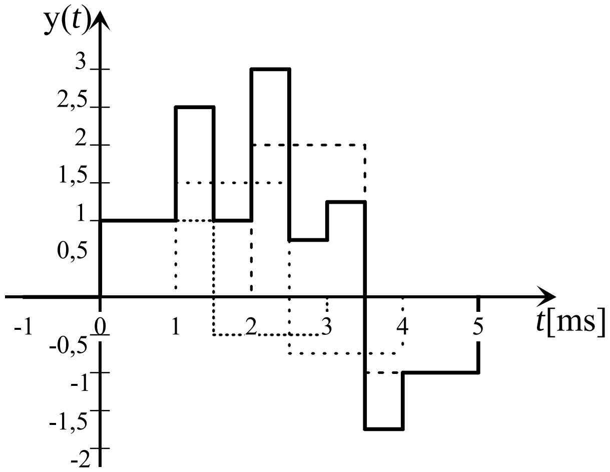




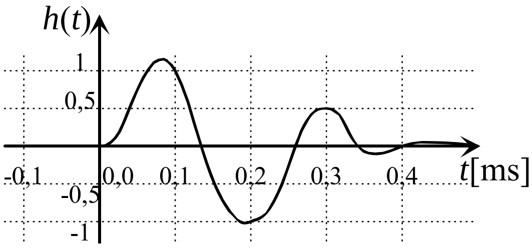
Rešitev:

Podan imamo odziv vezja na enotin impulz. Na vhodu vezja so trije impulzi različnih velikosti. Vezje se na vsakega od impulzov odzove z impulznim odzivom, ki je tako velik, kolikor je velik impulz. Vse tri odzive najprej narišemo, nato pa jih seštejemo.



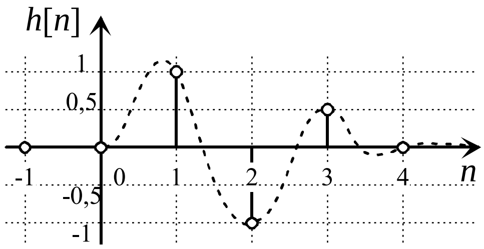


3. Načrtajte digitalno sito tako, da vzorčite impulzni odziv analognega sita. Narišite shemo vezja in določite lego ničel in polov v *z*-ravnini. Frekvenca vzorčenja analognega signala naj bo 10 kHz.



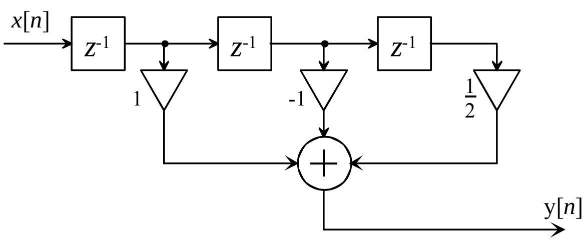
Rešitev:

Frekvenca vzorčenja je 10 kHz, torej je čas med dvema vzorcema 0,1 ms.



$$y[n] = x[n-1] - x[n-2] + 0,5x[n-3]$$

Shema vezja:

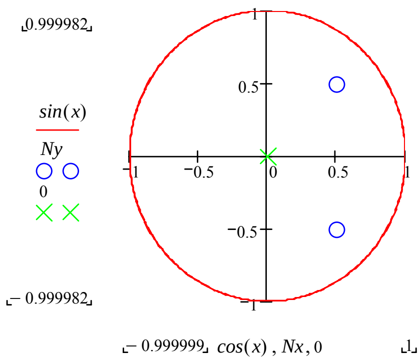


$$Y(z) = X(z)z^{-1} - X(z)z^{-2} + 0,5X(z)z^{-3}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-1} - z^{-2} + 0,5z^{-3} = \frac{z^2 - z + 0,5}{z^3} = \frac{\left(z - \frac{1}{2}(1+j)\right)\cdot\left(z - \frac{1}{2}(1-j)\right)}{z^3}$$

Ničli: $n_1 = \frac{1}{2}(1+j)$, $n_2 = \frac{1}{2}(1-j)$

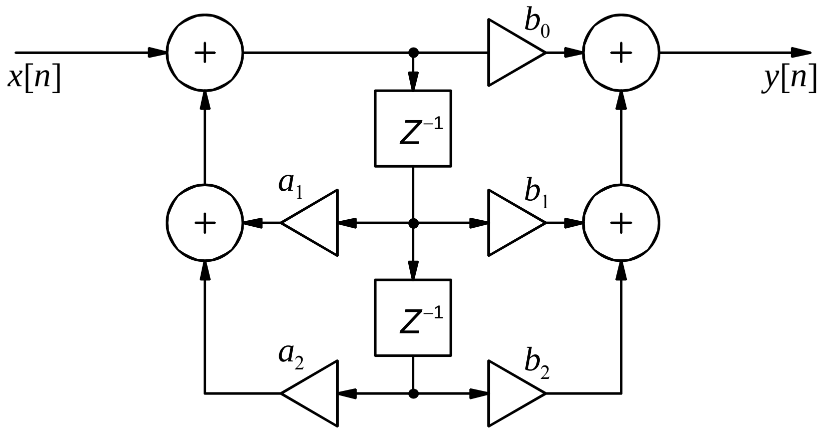
Trojni pol: $p_{1,2,3} = 0$



4. Teoretična vprašanja

a. Kaj je IIR filter (LTI sistem)?
IIR filter je časovno diskreten LTI sistem z neskončnim impulznim odzivom (Infinite Impulse Response). IIR filter je rekurziven in ima vsaj en koeficient $a_i \neq 0$.

b. Narišite splošno shemo IIR sistema drugega reda v direktni obliki II !



$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \cdot \left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \right) =$$

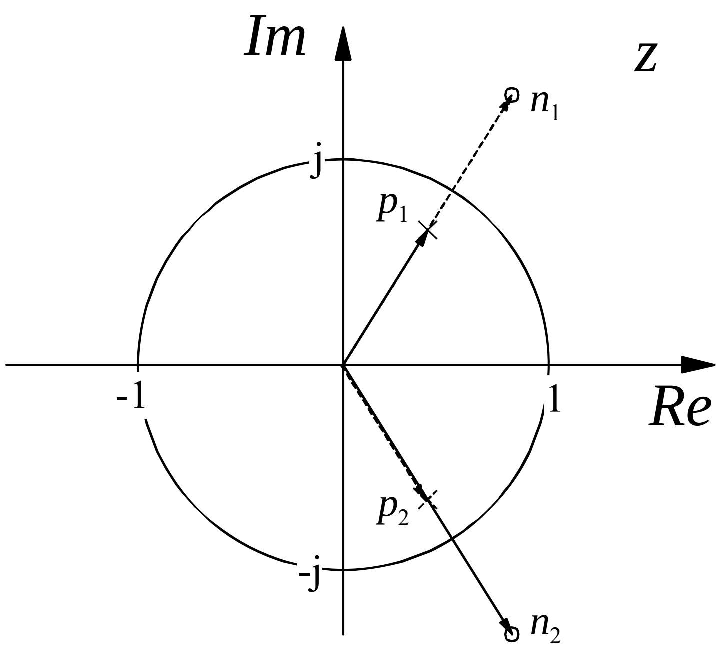
$$= \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z - a_2}$$

c. Kakšna mora biti razporeditev polov in ničel faznega sukalnika?
Ponazorite na primeru sistema drugega reda?

Ničle in poli morajo biti recipročne vrednosti. Za sistem drugega reda to pomeni, da mora imeti dva pola znotraj enotinega kroga in dve ničli izven njega.

$$p_2 = p_1^* \qquad |p_1| = |p_2| < 1$$

$$n_1 = \frac{1}{p_2} \qquad n_2 = \frac{1}{p_1}$$



d. Kaj mora veljati za impulzni odziv $h[n]$ kavzalnega (fizikalno uresničljivega) sistema? Kako se kavzalnost odraža na številu ničel oziroma polov?

Odziv kavzalnega (fizikalno uresničljivega sistema) ne more prehitevati vhodnega signala, zato mora veljati: $h[n] = 0$ za $n < 0$.
Število ničel je manjše kvečjemu enako številu polov.

e. Kaj velja za lego ničel in polov sistema z minimalno fazo?

Sistem z minimalno fazo mora imeti vse ničle znotraj enotskega kroga, kjer se nahajajo tudi poli stabilnega sistema.

$$|n_i| < 1 \text{ za } \quad i = 1, 2, \ldots, M$$