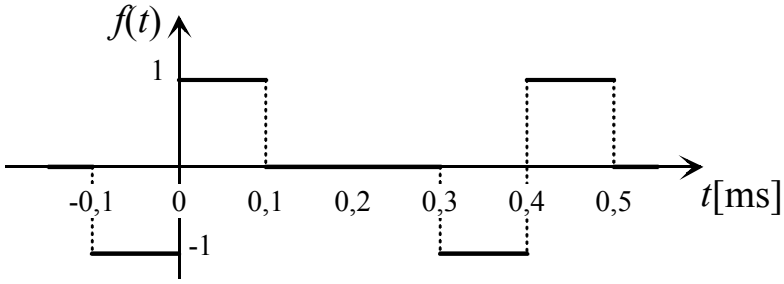
Rešitve izpitnih nalog

PROCESIRANJE SIGNALOV

Datum: 25. januar 1999

1. naloga

Izračunajte komponente amplitudnega spektra podanega periodičnega signala! Kolikšna je osnovna frekvenca tega signala? Tabelirajte prvih šest amplitud!



Rešitev:

Funkcija $f(t)$ nima enosmerne vrednosti zato velja:

$$a_0 = 0 \tag{1.1}$$

Časovna funkcija je liha zato velja:

$$a_n = 0 \tag{1.2}$$

Koeficiente b_n izračunamo po formuli:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_o^T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{4}}^{0}(-1)\sin(n\omega_0 t)\,dt + \int_0^{\frac{T}{4}}\sin(n\omega_0 t)\,dt\right] = \tag{1.3}$$

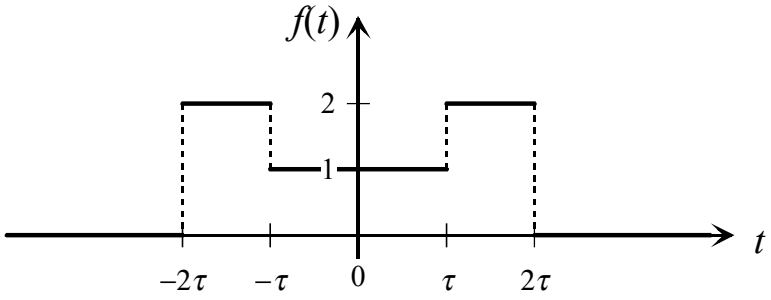
$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos(n\frac{\pi}{2})\right]$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{\pi} = 0{,}63 \\
b_2 &= \frac{2}{2\pi}2 = \frac{2}{\pi} = 0{,}63 \\
b_3 &= \frac{2}{3\pi}1 = \frac{2}{3\pi} = 0{,}21 \\
b_4 &= \frac{2}{4\pi}0 = 0 \\
b_5 &= \frac{2}{5\pi}1 = \frac{2}{5\pi} = 0{,}126 \\
b_6 &= \frac{2}{6\pi}2 = \frac{2}{3\pi} = 0{,}21
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$f_0 = \frac{1}{0{,}4\text{ms}} = 2500\text{Hz} \tag{1.5}$$

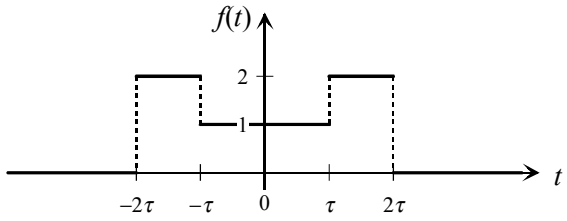
2. naloga

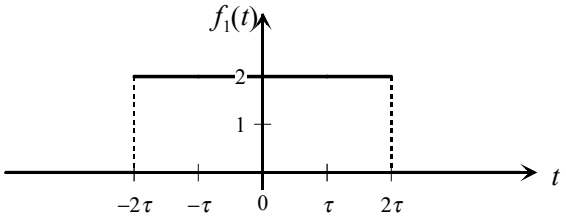
Izračunajte Fourierjev transform podanega aperiodičnega signala! Koliko znaša $F(0)$?

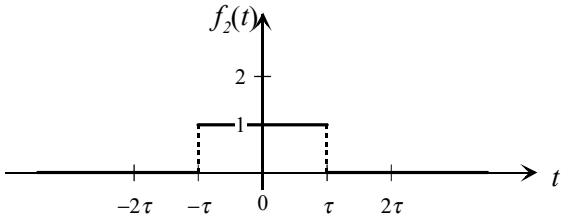


Rešitev:

2. nalogo najlaže rešimo z dekompozicijo podanega signala na razliko dveh signalov.







$$f(t) = f_1(t) - f_2(t) \;\Rightarrow\; F(\omega) = F_1(\omega) - F_2(\omega)$$

$$F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\,dt = 2\tau\frac{\sin\omega\tau}{\omega\tau} \tag{2.1}$$

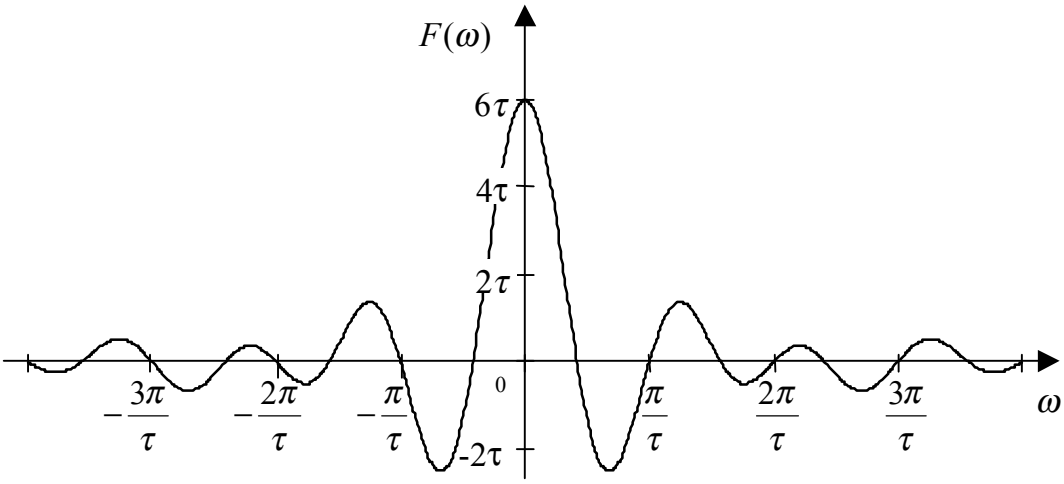
Na osnovi gornjega rezultata zapišemo še $F_1(\omega)$ s tem, da v $F_2(\omega)$ v (2.1) zamenjamo τ z 2τ in množimo z 2

$$F_1(\omega) = 2\cdot 2\cdot 2\tau\frac{\sin(\omega\cdot 2\tau)}{\omega\cdot 2\tau} = 4\cdot 2\tau\frac{2\sin(\omega\tau)\cos(\omega\tau)}{\omega\cdot 2\tau} = 2\tau\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}\cdot 4\cos(\omega\tau)$$

$$F(\omega) = 2\tau\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}\cdot 4\cos(\omega\tau) - 2\tau\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} = 2\tau\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}\left[4\cos(\omega\tau) - 1\right] \tag{2.2}$$

$$F(0) = 2\tau\cdot 1\cdot(4-1) = 6\tau$$

Vrednost transforma pri frekvenci $\omega = 0$ je enaka ploščini pod krivuljo časovne funkcije, ki jo lahko preprosto določimo tudi iz grafa časovne funkcije $f(t)$.



Slika 2.1

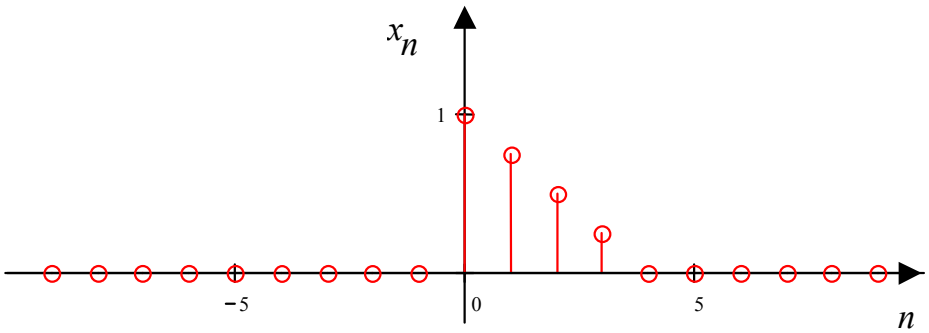
3. naloga

Poiščite konvolucijo $y(n)$ diskretnega signala $x(n)$ samega s seboj in narišite njen graf!

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & \text{za} \quad 0 \le n \le 4 \\ 0 & \text{drugod} \end{cases} \qquad\qquad y(n) = x(n) * x(n)$$

Rešitev:

Nalogo rešimo s pomočjo grafične predstavitve konvolucije diskretnih signalov. Najprej si narišemo graf časovno diskretnega signala $x(n)$

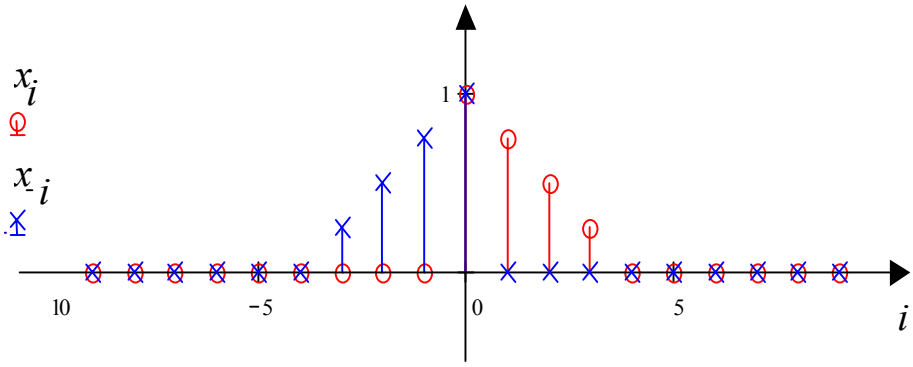


Slika 3.1: Graf diskretnega signala $x(n)$

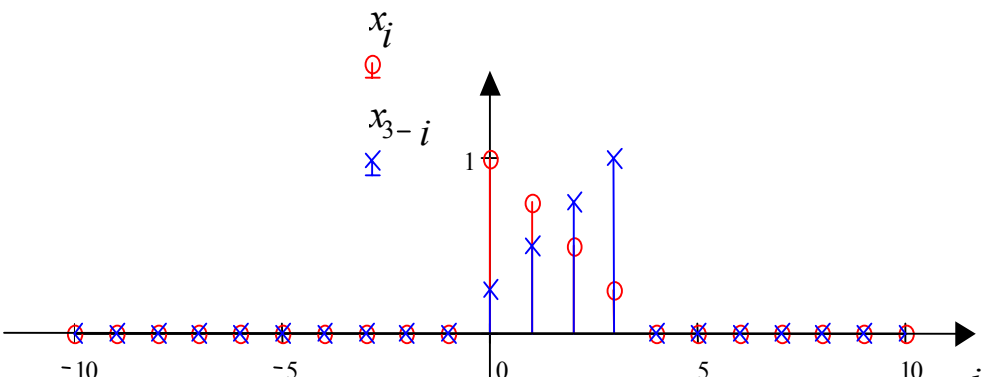
Konvolucija signala samega s seboj je dana z izrazom

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \cdot x(n-i) \tag{3.1}$$

Signala $x(i)$ in $x(n\text{-i})$ za $n = 0$ sta prikazano na spodnji sliki. Edini produkt, ki je od nič različen je pri $i = 0$.

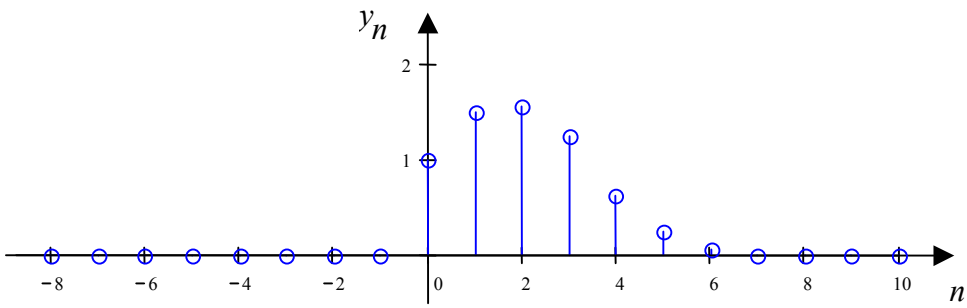


Slika 3.2: Računanje konvolucijske vsote za $n = 0$



Slika 3.3: Situacija pri $n = 3$

Na osnovi podobnih slik, kot sta gornji, izračunamo vrednosti signala $y(n)$. Podani sta grafična predstavitev in tabela vrednosti.



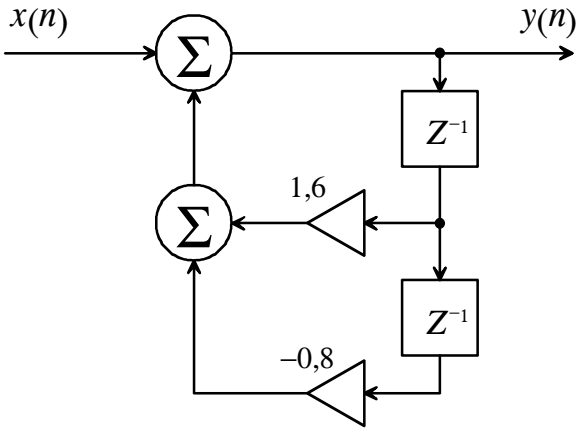
Slika 3.4: Graf rezultirajočega signala $y(n)$

$y^T =$

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-20	0	1	1.5	1.563	1.25	0.625	0.25	0.063	0	0	0	0

4. naloga

Ali je podano časovno diskretno linearno vezje stabilno? Izračunajte sistemsko funkcijo $H(z)$? V z-ravnini narišite lego ničel in polov! Skicirajte potek frekvenčnega odziva $|H(e^{j\Omega})|$!



Rešitev:

Najprej poiščemo sistemsko funkcijo podanega linearnega časovno diskretnega vezja $H(z)$. Iz vezja ugotovimo, da velja:

$$y(n) = x(n) + 1{,}6\,y(n-1) - 0{,}8\,y(n-2) \tag{4.1}$$

Gornjo enačbo transformiramo z Z-transformacijo in dobimo:

$$Y(z) = X(z) + 1{,}6\,Y(z)z^{-1} - 0{,}8\,Y(z)z^{-2} \tag{4.2}$$

Po preureditvi dobimo

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}8z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 1{,}6z + 0{,}8} \tag{4.3}$$

Iz končne razširjene oblike (3.3) vidimo, da ima sistemska funkcija dvojno ničlo pri $z = 0$. Poli so ničle imenovalca. Imenovalec razstavimo s pomočjo formule za korena kvadratne enačbe.

$$p_{1,2} = \frac{1{,}6 \pm \sqrt{1{,}6^2 - 0{,}8 \cdot 4}}{2}\ ,\ \ p_1 = 0{,}8 + 0{,}4\,\mathrm{j}\ ,\ \ p_2 = 0{,}8 - 0{,}4\,\mathrm{j} \tag{4.4}$$

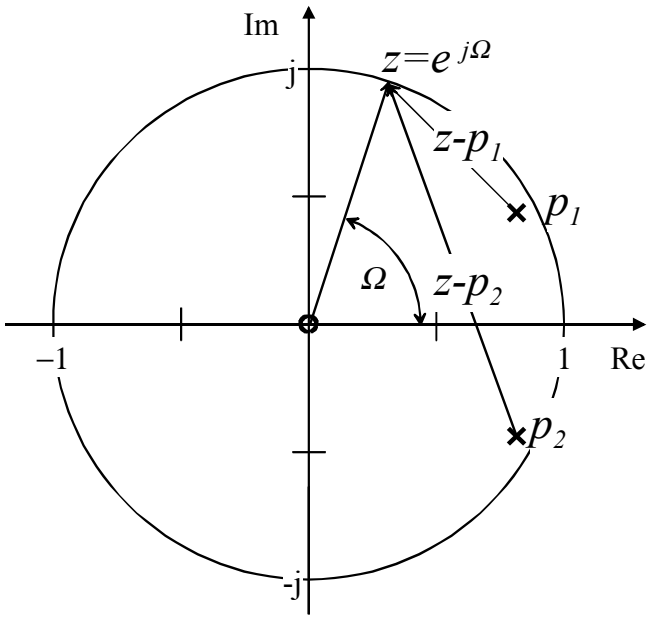
Ker je za stabilnost pomembna lega polov enačbe glede na krog enote ($|z| = 1$), izračunamo še absolutno vrednost obeh polov.

$$|p_1| = |p_2| = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}4^2} = 0{,}894 \tag{4.5}$$

Ker je absolutna vrednost polov manjša od 1, je vezje stabilno.

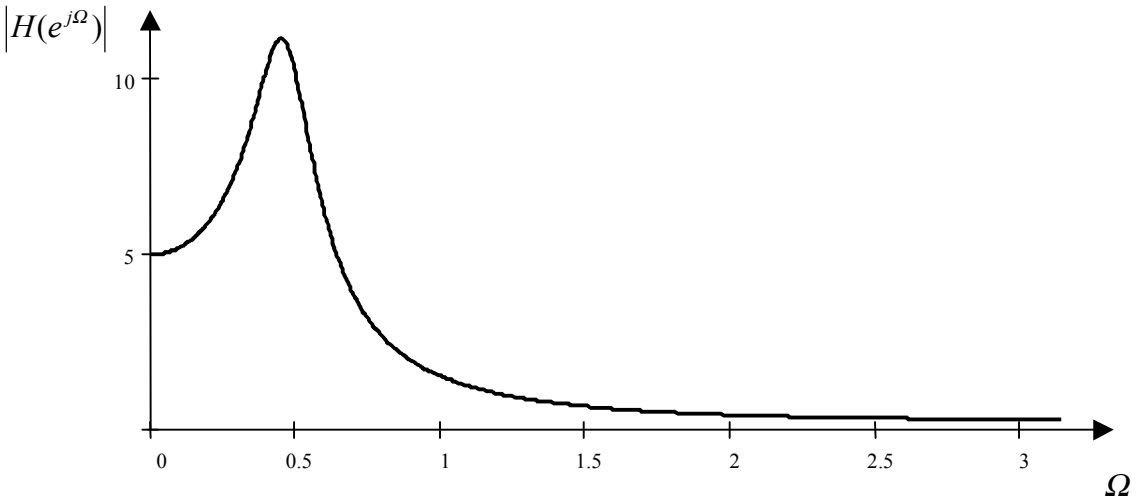
Iz lege ničel in polov narisanih v z-ravnini lahko tudi ocenimo potek absolutne vrednosti frekvenčnega odziva, saj velja

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \frac{\left|(e^{j\Omega})^2\right|}{\left|e^{j\Omega} - p_1\right| \cdot \left|e^{j\Omega} - p_2\right|} = \frac{1}{\left|e^{j\Omega} - p_1\right| \cdot \left|e^{j\Omega} - p_2\right|} \tag{4.6}$$



Slika 4.1: Ničle in poli v z-ravnini

Absolutna vrednost frekvenčnega odziva (4.6) je produkt obratnih vrednosti absolutnih vrednosti kompleksnih števil (kazalcev) z - p_1 in z - p_2. Izračunana vrednost frekvenčnega odziva vrednost je podana na spodnjem grafu. Maksimum nastopi, ko postane $e^{j\Omega}$ skoraj enak enemu izmed polov.



Slika 4.2: Frekvenčni odziv podanega vezja