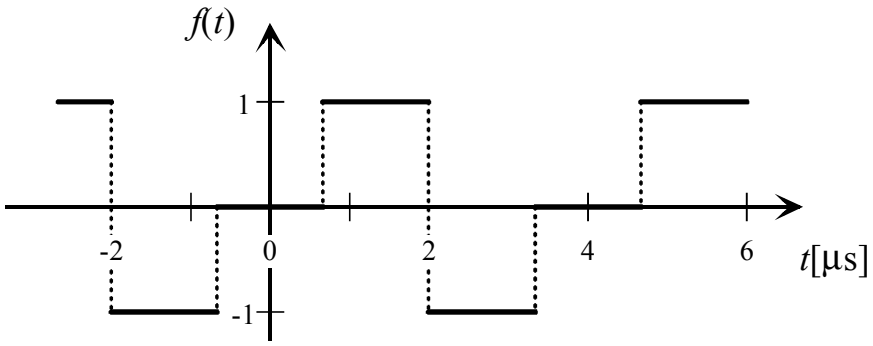
Rešitve izpitnih nalog

PROCESIRANJE SIGNALOV

Datum: 24. januar 2000

1. naloga

Izračunajte koeficiente kompleksne Fourierjeve vrste za podani periodični signal! Kolikšni sta amplituda in frekvenca osnovne harmonske komponente?



Rešitev:

Koeficienti kompleksne Fourierjeve vrste so dani z izrazom

$$A_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{6}} (-1)e^{-jn\omega_0 t}dt + \int_{\frac{T}{6}}^{\frac{T}{2}} (1)e^{-jn\omega_0 t}dt\right] \tag{1.1}$$

Integral za izračun koeficienta razdelimo na tri intervale tako kot je signal v eni periodi sestavljen iz treh konstantnih vrednosti., od katerih je ena enaka nič, zato sta v (1.1) pisana le dva integrala. Zgornjo mejo prvega ugotovimo na naslednji način: vsak ravni del v osnovni periodi podane funkcije zavzema eno tretjino periode zato je konec intervala dan kot

$$-\frac{T}{2}+\frac{T}{3}=\frac{-3+2}{6}T=-\frac{T}{6} \tag{1.2}$$

Podobno dobimo tudi za pozitivno polovico periode. Z integracijo postane (1.1)

$$A_n = \frac{1}{T}\left[\left.\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{jn\omega_0}\right|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{6}} + \left.\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right|_{\frac{T}{6}}^{\frac{T}{2}}\right] = \frac{1}{jn\omega_0 T}\left[e^{jn\omega_0\frac{T}{6}} - e^{jn\omega_0\frac{T}{2}} - e^{-jn\omega_0\frac{T}{2}} + e^{-jn\omega_0\frac{T}{6}}\right] =$$

$$= \frac{1}{jn2\pi}\left[\left(e^{jn\omega_0\frac{T}{6}} + e^{-jn\omega_0\frac{T}{6}}\right) - \left(e^{jn\omega_0\frac{T}{2}} + e^{-jn\omega_0\frac{T}{2}}\right)\right] = \frac{1}{jn\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos n\pi\right) = \tag{1.3}$$

$$= \frac{j}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

Prvi členi kompleksne Fourierjeve vrste so:

$$\begin{aligned} &A_0 = 0 \\ &A_1 = -j\frac{3}{2\pi} \qquad A_{-1} = j\frac{3}{2\pi} \\ &A_2 = j\frac{3}{4\pi} \qquad A_{-2} = -j\frac{3}{4\pi} \\ &A_3 = 0 \qquad A_{-3} = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Amplitudo realnih harmonskih komponent C_n izračunamo z izrazom

$$C_n = 2|A_n| \text{ za } n \neq 0 \text{ in } C_0 = A_0 \tag{1.5}$$

Amplituda prve harmonske komponente je torej

$$C_1 = \frac{3}{\pi} = 0{,}955 \tag{1.6}$$

Osnovno frekvenco določimo iz periode signala $f(t)$, ki jo odčitamo iz podanega grafa.

$$T = 4\,\mu\text{s} \;\Rightarrow\; f_0 = \frac{1}{T} = 250\,\text{kHz} \tag{1.7}$$

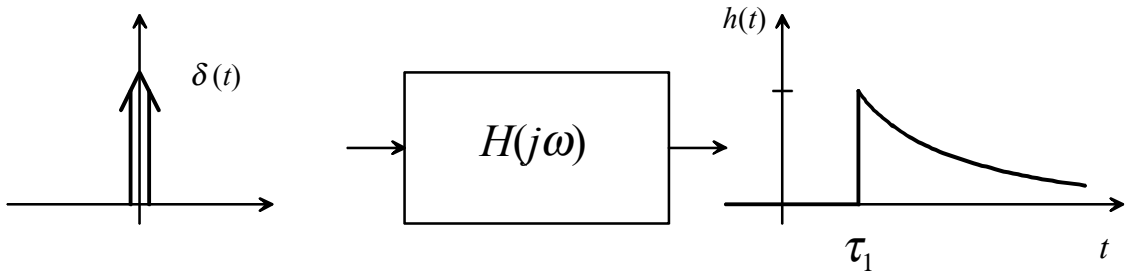
2. naloga

Impulzni odziv linearnega sistema je podan z enačbo:

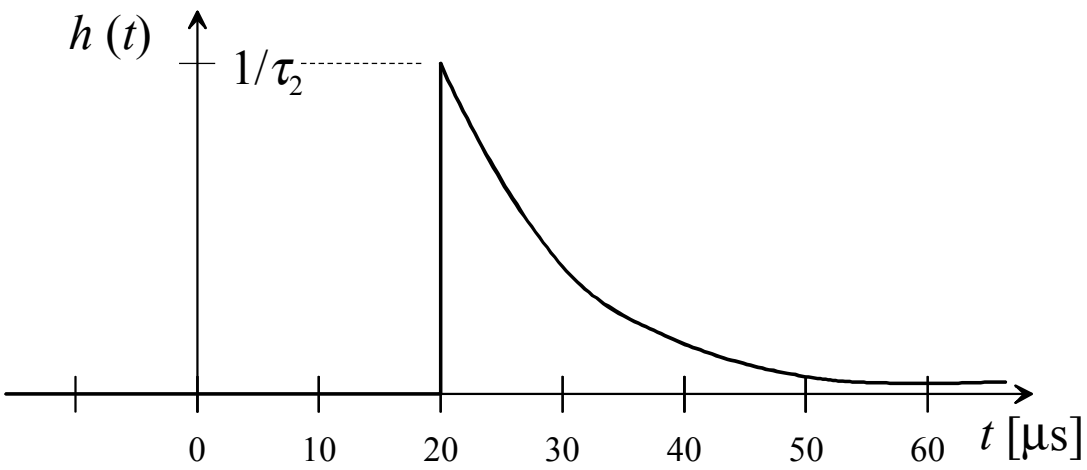
$$h(t) = \frac{1}{\tau_2} u(t-\tau_1) e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}},$$

kjer sta τ_1 = 20 μs in τ_2 = 10 μs. Narišite graf impulznega odziva $h(t)$. Izračunajte frekvenčni odziv podanega sistema $H(\omega)$. Koliko znaša vrednost $|H(\omega)|$ pri frekvenci 40 kHz.

Rešitev:



Slika 2.1: Odziv danega sistema na enotin impulz



Slika 2.2: Graf odziva $h(t)$

Frekvenčni odziv je Fourierjev transform impulznega odziva. Impulzni odziv je preprost eksponenten upad s časovno konstanto τ_2, ki je zakasnjen za τ_1 = 20 μs. Če v izraz impulznega odziva uvedemo zamenjavo $v = t - \tau_1$, dobimo

$$h(v) = \frac{1}{\tau_2} u(v) e^{-\frac{v}{\tau_2}} \quad \leftrightarrow \quad H(\omega) = \frac{1}{\tau_2} \frac{1}{\frac{1}{\tau_2} + j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_2} \tag{2.1}$$

Pri gornji transformaciji smo direktno uporabili tabelo Fourierjevih transformov. Zakasnitev za τ_1 moramo upoštevati po pravilu:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \;\Rightarrow\; f(t-\tau) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega\tau} \tag{2.2}$$

Z upoštevanjem enačb 2.1 in 2.2 dobimo

$$H(\omega) = \frac{e^{-j\omega\tau_1}}{1 + j\omega\tau_2} \tag{2.3}$$

Do istega rezultata lahko pridemo tudi po direktni poti

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\infty} e^{-\frac{t-\tau_1}{\tau_2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\infty} e^{\frac{\tau_1}{\tau_2}} e^{-\frac{t}{\tau_2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{\frac{\tau_1}{\tau_2}}}{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\infty} e^{-(\frac{1}{\tau_2} + j\omega)t} dt = \\ &= \frac{e^{\frac{\tau_1}{\tau_2}}}{\tau_2} \left. \frac{e^{-(\frac{1}{\tau_2} + j\omega)t}}{-(\frac{1}{\tau_2} + j\omega)} \right|_{\tau_1}^{\infty} = \frac{e^{\frac{\tau_1}{\tau_2}}}{\tau_2} \frac{0 - e^{-(\frac{1}{\tau_2} + j\omega)\tau_1}}{-(\frac{1}{\tau_2} + j\omega)} = \frac{e^{\frac{\tau_1}{\tau_2}}}{\tau_2} \frac{e^{-\frac{\tau_1}{\tau_2}} e^{-j\omega\tau_1}}{(\frac{1}{\tau_2} + j\omega)} = \frac{e^{-j\omega\tau_1}}{1 + j\omega\tau_2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Naloga zahteva absolutno vrednost prevajalne funkcije $|H(\omega)|$ pri frekvenci 40 kHz zato imaginarni potenci števila e v števcih izrazov (2.3) in (2.4) ničesar ne spreminjata saj njuna absolutna vrednost vedno 1.

$$\begin{aligned}|H(\omega)| &= \frac{\left|e^{-j\omega\tau_1}\right|}{|1+j\omega\tau_2|} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f\tau_2)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi 4\cdot 10^4 \mathrm{s}^{-1} 10^{-5}\mathrm{s})^2}} = \underline{0{,}37}\end{aligned} \tag{2.5}$$

3. naloga

Izračunajte TDF transform signala $x(n) = y(n) * y(n)$, če je $y(n)$ podan z enačbo:

$$y(n) = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad 0 \le n \le 3 \\ 0 & \text{drugod} \end{cases}$$

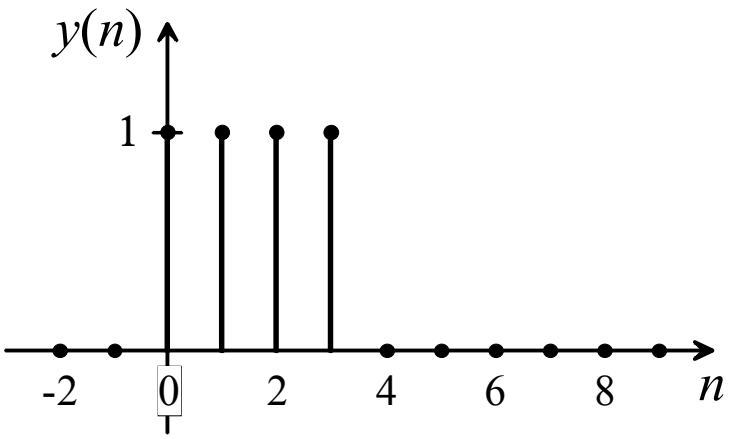
Nasvet: uporabite pravila za TDF transformacijo.

Rešitev:

Naloga zahteva izračun časovno diskretnega Fourierjevega transforma (TDF) signala $x(n)$, ki ga dobimo s konvolucijo signala $y(n)$ samega s seboj. To lahko razumemo v čisto matematičnem smislu ali pa kot odziv sistema, ki ga vzbujamo z njegovim lastnim impulznim odzivom. Prav zaradi tega nam ni treba računati signala $y(n)$, ker lahko v ta namen uporabimo osnovno lastnost transformacij iz časovnega v frekvenčni prostor. V primeru diskretne transformacije velja:

$$\left.\begin{aligned} x(n) &\leftrightarrow X(e^{j\Omega}) \\ y(n) &\leftrightarrow y(e^{j\Omega}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x(n) * y(n) \leftrightarrow X(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega}) \tag{3.1}$$

Zato najprej izračunamo le TDF signala $y(n)$, ki ga prikazuje tudi graf na sliki 3.1



Slika 3.1: Graf signala $y(n)$

$$Y(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{3} e^{-j\Omega n} = 1 + e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega} + e^{-3j\Omega} =$$

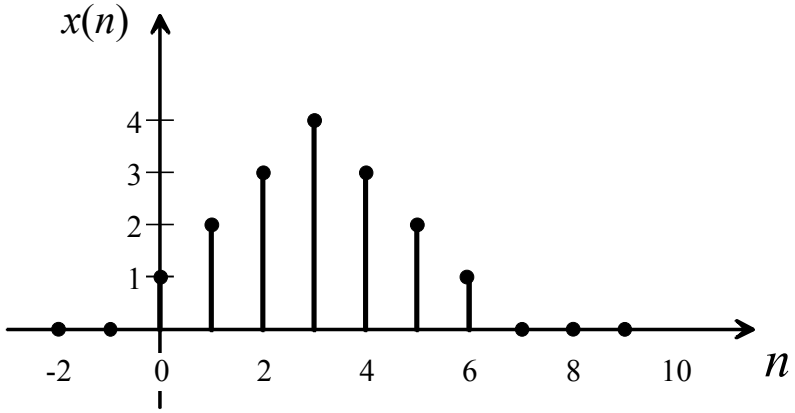
$$= \left(1 + e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega} + e^{-3j\Omega}\right)\frac{1-e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{1-e^{-4j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} = \tag{3.2}$$

$$= \frac{e^{-2j\Omega}\left(e^{2j\Omega} - e^{-2j\Omega}\right)}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{j\frac{\Omega}{2}} - e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right)} = e^{-j\frac{3}{2}\Omega}\frac{\sin 2\Omega}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$

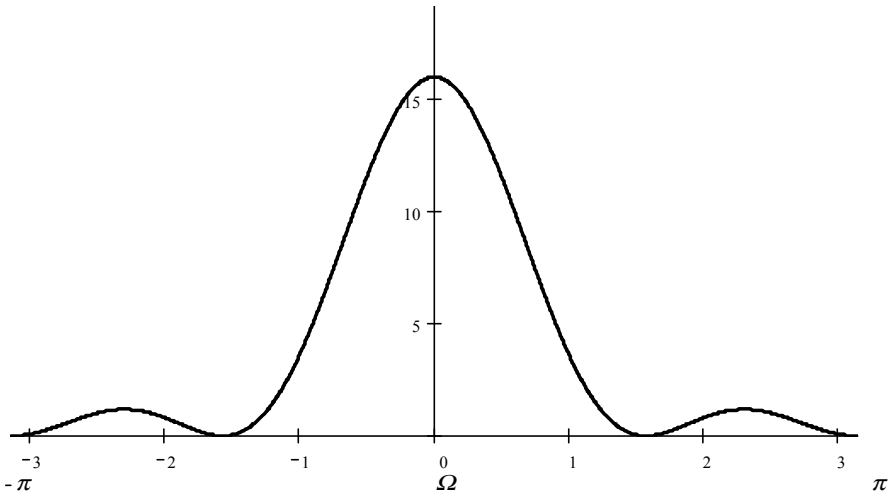
Z upoštevanjem pravila (3.1) in rezultatom (3.2) dobimo končno rešitev

$$X(e^{j\Omega}) = \left(Y(e^{j\Omega})\right)^2 = e^{-3j\Omega}\left(\frac{\sin 2\Omega}{\sin\frac{\Omega}{2}}\right)^2 \tag{3.3}$$

S tem je zadana naloga rešena. Za ilustracijo si poglejmo še sam signal $x(n)$ in graf absolutne vrednosti funkcije $X(e^{j\Omega})$. Signal $x(n)$ izračunamo z direktno konvolucijo v časovnem prostoru.



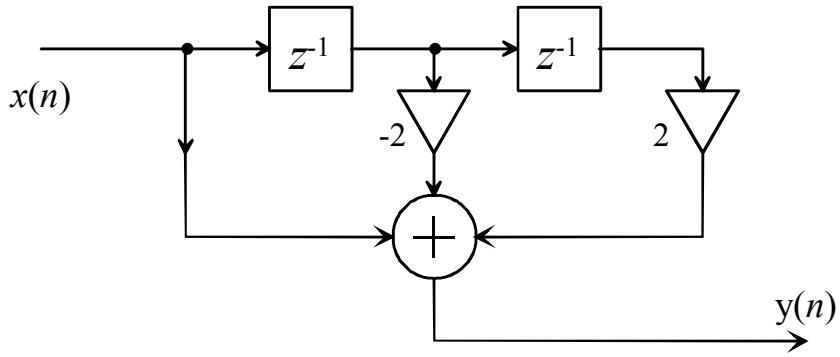
Slika 3.2: Graf signala $x(n) = y(n) * y(n)$



Slika 3.3: Graf $\left|X(e^{j\Omega})\right|$

4. naloga

Napišite diferenčno enačbo za podano časovno diskretno linearno vezje! V z-ravnini narišite lego ničel in polov sistemske funkcije $H(z)$! Ali je sistem stabilen? Izračunajte kvadrat frekvenčnega odziva $|H(e^{j\Omega})|^2$ in ga skicirajte!



Rešitev:

Gornja shema prikazuje diskreten sistem, ki nima povratnih vezav, zato ima impulzni odziv končno trajanje. Diferenčna enačba podanega sistema je

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 2x(n-2) \tag{4.1}$$

Ničle in pole sistemske funkcije $H(z)$ določimo z z-transformacijo diferenčne enačbe sistema (4.1)

$$Y(z) = X(z) - 2X(z)z^{-1} + 2X(z)z^{-2} = X(z)(1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}) \tag{4.2}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} = \frac{z^2 - 2z + 2}{z^2} \tag{4.3}$$

Iz (4.3) je razvidno, da ima $H(z)$ dvojni pol pri $z = 0$. Ničle sistemske funkcije $H(z)$ so koreni polinoma druge stopnje v imenovalcu

$$\begin{aligned} & z^2 - 2z + 2 = 0 \\ & n_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm \mathrm{j} \\ & \left| n_{1,2} \right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} > 1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Podano časovno diskretno linearno vezje je stabilno, ker ima končen impulzni odziv, kar vidimo tudi iz lege obeh polov, ki sta v izhodišču z-ravnine in tako znotraj kroga enote $|z| = 1$. Lega ničel ni pomembna za stabilnost vezij.

Frekvenčni odziv dobimo z izračunom vrednosti sistemske funkcije na krogu enote

$$H(e^{j\Omega}) = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = 1 - 2e^{-j\Omega} + 2e^{-2j\Omega} \tag{4.5}$$

Močnostni frekvenčni odziv $|H(e^{j\Omega})|^2$ izračunamo kot produkt

$$\left| H(e^{j\Omega}) \right|^2 = H(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega})^* \tag{4.6}$$

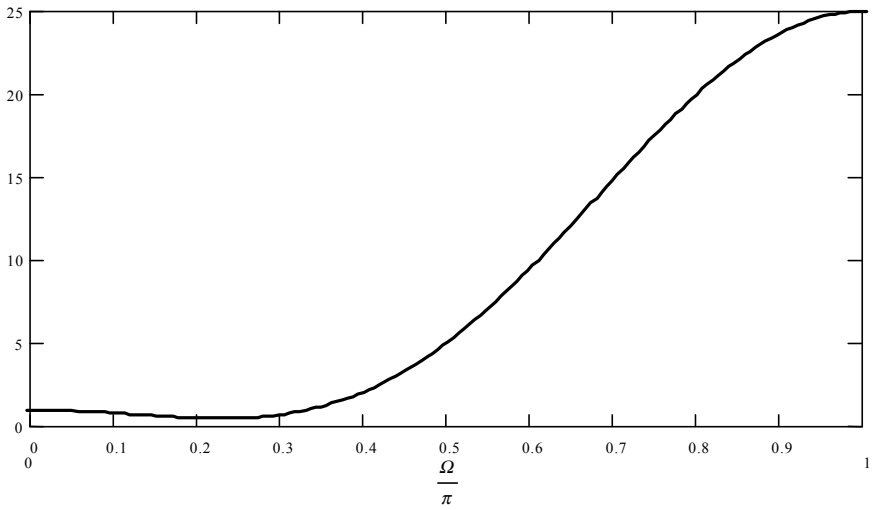
Ker so koeficienti polinoma $H(z)$ realni, velja

$$H(z)^* = H(z^*), \tag{4.7}$$

zato dobimo

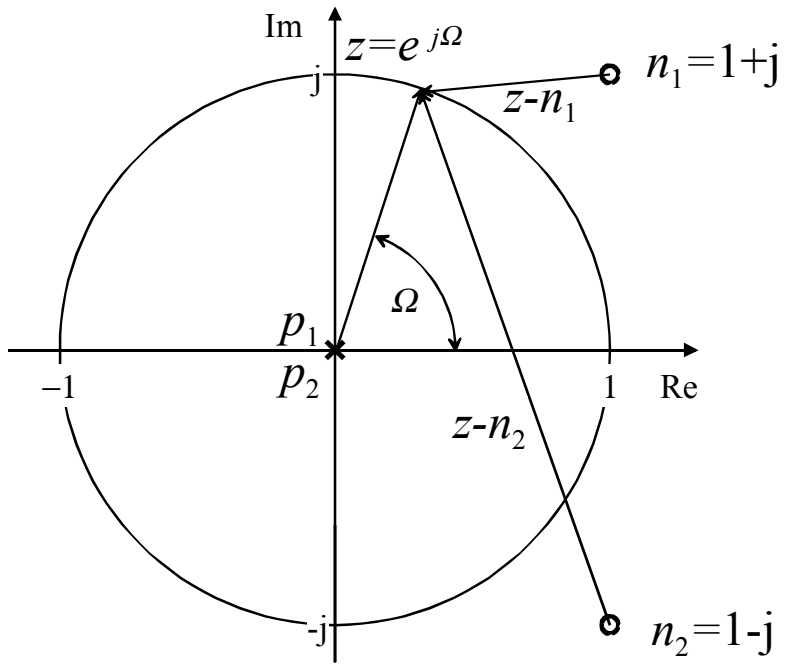
$$\begin{aligned}\left|H(e^{j\Omega})\right|^2 &= H(e^{j\Omega})H(e^{-j\Omega}) = (1-2e^{-j\Omega}+2e^{-2j\Omega})(1-2e^{j\Omega}+2e^{2j\Omega}) = \\ &= 1-2e^{-j\Omega}+2e^{-2j\Omega}-2e^{j\Omega}+4-4e^{-j\Omega}+2e^{2j\Omega}-4e^{j\Omega}+4 = \\ &= 9-6(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega})+2(e^{2j\Omega}+e^{-2j\Omega}) = \\ &= 9-12\cos\Omega+4\cos 2\Omega\end{aligned} \tag{4.8}$$

Potek funkcije je podan z grafom na sliki 4.1



Slika 4.1:Močnostni frekvenčni odziv $|H(e^{j\Omega})|^2$

Potek absolutne vrednosti frekvenčnega odziva lahko za določene vrednosti normirane krožne frekvence Ω določimo iz lege polov in ničel v z ravnini.

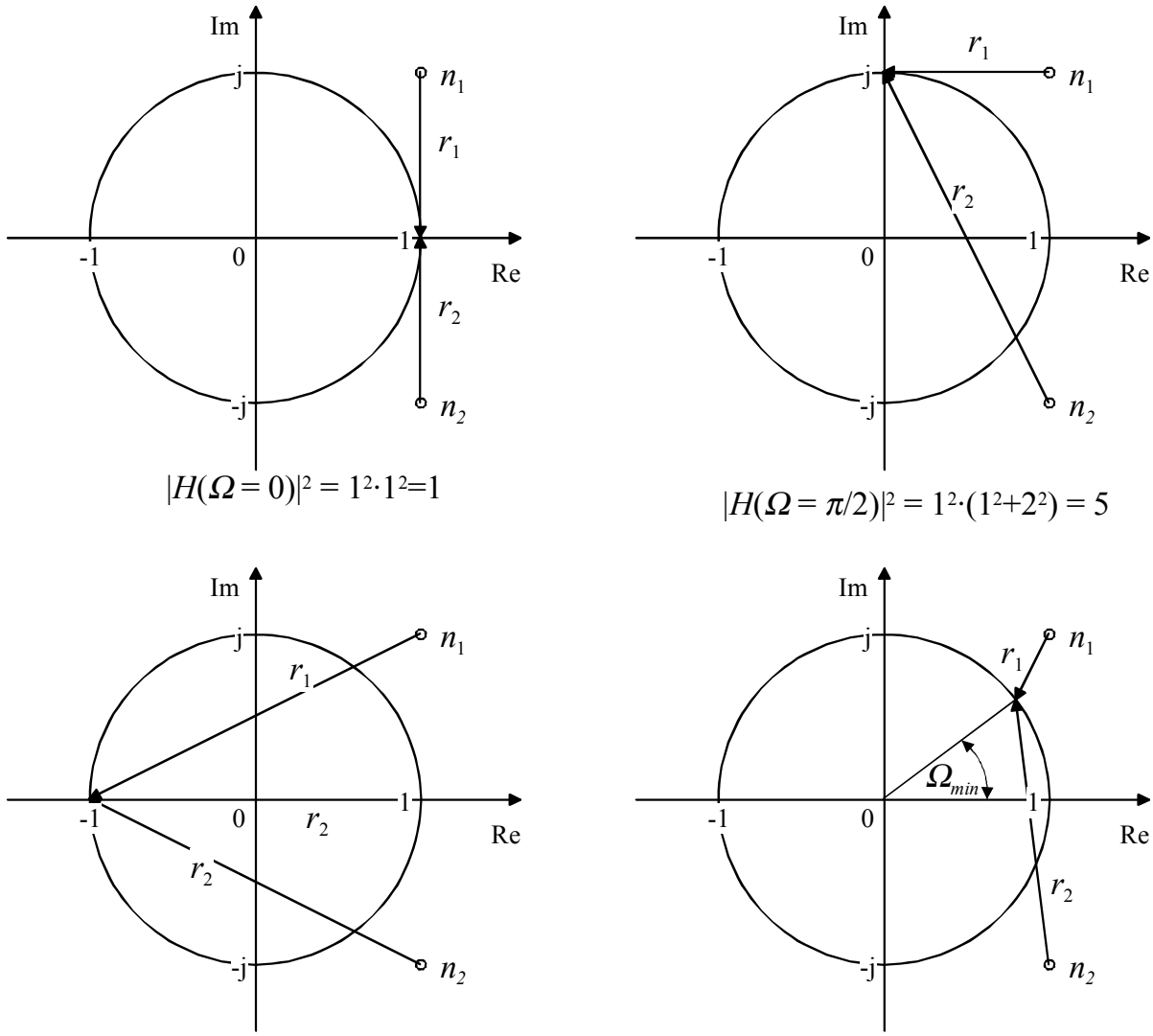


Slika 4.3: Lega ničel in polov sistemske funkcije $H(z)$ danega diskretnega sistema

Funkcijo $|H(e^{j\Omega})|^2$ lahko zapišemo tudi v razstavljeni obliki

$$\left|H(e^{j\Omega})\right|^2 = \left|\frac{(z-n_1)(z-n_2)}{z^2}\right|^2\Bigg|_{z=e^{j\Omega}} = \left|e^{j\Omega}-n_1\right|^2\left|e^{j\Omega}-n_2\right|^2 = r_1^2 r_2^2 \qquad (4.9)$$

Imenovalec v enačbi (4.9) izgine, ker je njegova absolutna vrednost za vse Ω enaka 1. Z r_1 in r_2 smo označili absolutni vrednosti kompleksnih števil (kazalcev) z - n_1 in $z - n_2$, katerih produkt odloča o absolutni vrednosti frekvenčnega odziva. Na sliki 4.4 so prikazani položaji omenjenih kompleksnih števil iz katerih je moč zlahka izračunati dolžine ustreznih vektorjev s katerimi ponazarjamo kompleksna števila.



$|H(\Omega = 0)|^2 = 1^2 \cdot 1^2 = 1$

$|H(\Omega = \pi/2)|^2 = 1^2 \cdot (1^2+2^2) = 5$

$|H(\Omega = \pi)|^2 = (2^2+1^2)\cdot(2^2+1^2) = 25$

Slika 4.4: Značilne točke za katere lahko enostavno določimo vrednost frekvenčnega odziva in ocena položaja frekvence Ω_{min}

Vrednosti frekvenčnega odziva izračunanega na podlagi geometrijsko določenih dolžin kazalcev r_1 in r_2 (slika 4.4) lahko primerjamo tudi z eksaktno izračunanim grafom v sliki 4.1.